2 Статистические оценки неизвестных параметров распределения

1. Статистическая оценка неизвестного параметра теоретического распределения.
2. Виды статистических оценок.
3. Нахождение оценок неизвестных параметров теоретического распределения методами моментов и максимального правдоподобия.

Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ – выборка из теоретического распределения $F(x\,|\,\theta)$, зависящего от неизвестного параметра θ.

Оценкой (статистикой) $\hat{\theta}_n$ неизвестного параметра θ называется любая борелевская функция $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$.

Оценка $\hat{\theta}_n$ неизвестного параметра θ называется *несмещенной*, если ее математическое ожидание равно оцениваемому параметру, т. е. $M\left(\hat{\theta}_n\right) = \theta$. В противном случае оценка называется *смещенной*.

Можно показать, что выборочное среднее $\bar{x}$ является несмещенной оценкой теоретического математического ожидания, а выборочная дисперсия $\tilde{S}^2$ является смещенной оценкой теоретической дисперсии. Исправленная выборочная дисперсия

$$S^2 = \frac{n}{n-1}\tilde{S}^2$$

является несмещенной оценкой теоретической дисперсии.

Оценка $\hat{\theta}_n$ неизвестного параметра θ называется *состоятельной*, если она сходится по вероятности к оцениваемому параметру:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|\hat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon\right) = 1.$$

Можно показать, что оценки $\bar{x}$, $\tilde{S}^2$ и S^2 являются состоятельными оценками теоретического математического ожидания и теоретической дисперсии соответственно.

Несмещенная оценка $\hat{\theta}_n$ параметра θ называется *эффективной*, если она имеет наименьшую дисперсию в классе несмещенных оценок, т. е. если $\tilde{\theta}_n$ – произвольная несмещенная оценка параметра θ, а $\hat{\theta}_n$ – эффективная, то $D(\hat{\theta}_n) \le D(\tilde{\theta}_n)$.

Рассмотрим основные методы получения оценок.

Метод моментов. Пусть имеется выборка $x_1, x_2, ..., x_n$ из распределения $F(x;\theta_1,\theta_2,...,\theta_k)$, зависящего от неизвестных параметров $\theta_1,\theta_2,...,\theta_k$, которые нужно оценить. Поскольку известен вид теоретической функции распределения, можем вычислить первые k теоретических моментов (начальных или центральных). Эти моменты будут зависеть от k неизвестных параметров $\theta_1,\theta_2,...,\theta_k$:

$$\begin{cases} m_1 = m_1(\theta_1,\theta_2,...,\theta_k), \\ m_2 = m_2(\theta_1,\theta_2,...,\theta_k), \\ \qquad ... \\ m_k = m_k(\theta_1,\theta_2,...,\theta_k). \end{cases}$$

Суть метода моментов заключается в следующем: выборочные моменты являются оценками соответствующих теоретических моментов, поэтому теоретические моменты $m_1,m_2,...,m_k$ приравнивают к соответствующим выборочным $m_1^*,m_2^*,...,m_k^*$, а затем, решая систему относительно $\theta_1,\theta_2,...,\theta_k$, находят оценки неизвестных параметров. Таким образом, в методе моментов оценки $\hat\theta_1,\hat\theta_2,...,\hat\theta_k$ неизвестных параметров $\theta_1,\theta_2,...,\theta_k$ определяются как решение системы k уравнений с k неизвестными:

$$\begin{cases} m_1^* = m_1(\hat\theta_1,\hat\theta_2,...,\hat\theta_k), \\ m_2^* = m_2(\hat\theta_1,\hat\theta_2,...,\hat\theta_k), \\ \qquad ... \\ m_k^* = m_k(\hat\theta_1,\hat\theta_2,...,\hat\theta_k). \end{cases}$$

В таблице 4 приведены формулы для вычисления выборочных и соответствующих им теоретических моментов порядка k:

Таблица 4 – Выборочные и теоретические моменты

Моменты	Теоретические	Выборочные
Начальные	$b_k = M\xi^k$	$b_k^* = \overline{x^k} = \frac{1}{n}\sum_i x_i^k$
Центральные	$c_k = M(\xi - M\xi)^k$	$c_k^* = \tilde{S}^k = \frac{1}{n}\sum_i (x_i - \bar{x})^k$

Пример 2.1 Предполагая, что выборка X из примера 1.1 получена из показательного распределения с параметром λ, методом моментов найти точечную оценку параметра.

Для показательного распределения плотность распределения вероятностей имеет вид

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x \ge 0.$$

Для данного закона распределения определим теоретический момент

$$b_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx = \int_{0}^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}.$$

По заданной выборке определим значение выборочного момента

$$b_1^* = \overline{x} = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30} x_i \approx 0{,}05.$$

Составим уравнение

$$\frac{1}{\lambda} = \overline{x}.$$

Таким образом, получим оценку

$$\hat{\lambda} = 20.$$

Пример 2.2 Предполагая, что выборка X из примера 1.1 получена из равномерного распределения на отрезке $[a,b]$ методом моментов найти точечные оценки параметров a и b.

Для равномерного распределения плотность распределения вероятностей имеет вид

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Равномерное распределение имеет два параметра, поэтому необходимо составить два уравнения. Определим теоретические моменты

$$b_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx = \int_{a}^{b} \frac{x}{b-a} dx = \frac{a+b}{2};$$

$$b_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx = \int_{a}^{b} \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}.$$

По выборке определим значения выборочных моментов

$$b_1^* = \overline{x} = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30} x_i \approx 0{,}05;$$

$$b_2^* = \overline{x^2} = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30} x_i^2 \approx 1{,}26.$$

Составим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{2} = 0{,}05, \\ \dfrac{a^2+ab+b^2}{3} = 1{,}26. \end{cases}$$

Решив ее относительно неизвестных параметров a и b, получим

$$a_1 = -1{,}89,\ b_1 = 1{,}99;$$
$$a_2 = 1{,}99,\ b_2 = -1{,}89.$$

Поскольку $a < b$,

$$\hat{a} = -1{,}89,$$
$$\hat{b} = 1{,}99.$$

Метод максимального правдоподобия. Пусть имеется выборка $x_1, x_2, ..., x_n$ из распределения $F(x;\theta_1,\theta_2,...,\theta_k)$, зависящего от неизвестных параметров $\theta_1,\theta_2,...,\theta_k$, которые нужно оценить. Основу метода составляет *функция правдоподобия:*

$$L(x_1,x_2,...,x_n;\theta_1,\theta_2,...,\theta_k) = p(x_1;\theta_1,\theta_2,...,\theta_k)\, p(x_2;\theta_1,\theta_2,...,\theta_k) ... p(x_n;\theta_1,\theta_2,...,\theta_k).$$

В дискретном случае функция $p(x_i;\theta_1,\theta_2,...,\theta_k)$ выражает вероятность того, что теоретическая случайная величина примет значение x_i, $i = 1,...,n$. В абсолютно непрерывном случае функция $p(x_i;\theta_1,\theta_2,...,\theta_k)$ – значение теоретической плотности распределения вероятностей в точке x_i, $i = 1,...,n$.

Согласно методу максимального правдоподобия в качестве оценки неизвестных параметров $\theta_1,\theta_2,...,\theta_k$ принимаются такие значение $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,...,\hat{\theta}_k$, которые максимизируют функцию правдоподобия.

Нахождение оценок может упрощаться, если максимизировать не саму функцию L, а $\ln L$.

Пример 2.3 Предполагая, что выборка *X* из примера 1.1 получена из показательного распределения с параметром λ, методом максимального правдоподобия найти точечную оценку параметра.

Запишем функцию правдоподобия

$$L = \lambda e^{-\lambda x_1} \lambda e^{-\lambda x_2} ... \lambda e^{-\lambda x_{30}} = \lambda^{30} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{30} x_i}.$$

Логарифмируя, имеем

$$\ln L = 30 \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{30} x_i.$$

Задача сводится к нахождению максимума функции одной переменной. Дифференцируя по параметру λ, находим

$$\frac{d\ln L}{d\lambda}=\frac{30}{\lambda}-\sum_{i=1}^{30}x_i\ .$$

Приравнивая производную к нулю, получим

$$\frac{30}{\lambda}-\sum_{i=1}^{30}x_i=0\Rightarrow\lambda=\frac{30}{\sum\limits_{i=1}^{30}x_i}=\frac{1}{\overline{x}}\,.$$

Таким образом, получим оценку

$$\hat{\lambda}=20\,.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение статистической оценки неизвестного параметра теоретического распределения.
2. В чем заключается суть метода моментов?
3. В чем заключается суть метода максимального правдоподобия?