4 Проверка параметрических гипотез

1. Статистическая гипотеза.
2. Параметрическая гипотеза.
3. Критерии проверки статистических гипотез.

Статистической называют гипотезу о виде неизвестного распределения или о параметрах известного распределения.

Статистическая гипотеза называется *параметрической*, если в ней сформулированы предположения относительно значений параметров функции распределения известного вида.

Нулевой (*основной*) называют выдвинутую гипотезу H_0.

Конкурирующей (*альтернативной*) называют гипотезу H_1, которая противоречит нулевой.

Параметрическая гипотеза называется *простой*, если содержит только одно предположение относительно параметра (например, если a – математическое ожидание нормально распределенной случайной величины, то гипотеза $H_0 : a = 0$ – простая).

Параметрическая гипотеза называется *сложной*, если она состоит из конечного или бесконечного числа простых гипотез (например, если a – математическое ожидание нормально распределенной случайной величины, то гипотеза $H_0 : a > 0,5$ – сложная).

При проверке гипотезы могут быть допущены ошибки двух родов.

Ошибка первого рода состоит в том, что будет отвергнута правильная нулевая гипотеза. Вероятность ошибки первого рода называют *уровнем значимости* и обозначают α.

Ошибка второго рода состоит в том, что будет принята неправильная нулевая гипотеза. Вероятность ошибки второго рода обозначают β.

Статистическим критерием (*статистикой критерия*) называют случайную величину, которая служит для проверки гипотезы.

Наблюдаемым (*эмпирическим*) значением называют то значение критерия, которое вычислено по выборке.

Критической областью называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают.

Областью принятия гипотезы (*областью допустимых значений*) называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу принимают.

Основной принцип проверки статистических гипотез: если наблюдаемое значение критерия принадлежит критической области, то нулевую гипотезу отвергают; если наблюдаемое значение критерия принадлежит области принятия гипотезы, то гипотеза согласуется с экспериментальными данными.

Правосторонней называют критическую область вида $K=[k_{кр};+\infty)$.

Левосторонней называют критическую область вида $K=(-\infty;k_{кр}]$.

Двусторонней называют критическую область вида $K=(-\infty;k_1]\cup[k_2;+\infty)$.

Проверка гипотез о равенстве математического ожидания случайной величины гипотетическому (предполагаемому) значению.

1) Пусть выборка X получена из нормального распределения с параметрами a и σ^2. Предположим, что дисперсия σ^2 известна.

При заданном уровне значимости α проверяется нулевая гипотеза

$$H_0: a=a_0,$$
$$H_1: a\neq a_0.$$

Критическая область имеет вид

$$K=(-\infty;-u_{кр}]\cup[u_{кр};+\infty),$$

где $u_{кр}$ – корень уравнения $\Phi(u_{кр})=\dfrac{1-\alpha}{2}$,

$\Phi(x)$ – функция Лапласа.

Для проверки нулевой гипотезы вычисляется наблюдаемое значение критерия

$$u_{набл}=\frac{\bar{x}-a_0\ \cdot\sqrt{n}}{\sigma}.$$

Если $u_{набл}\notin K$, т. е. $|u_{набл}|<u_{кр}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу; если $u_{набл}\in K$, т. е. $|u_{набл}|\geq u_{кр}$, то нулевую гипотезу отвергают.

Пример 4.1 Пусть выборка X объема $n=30$ получена из нормального распределения с известным средним квадратическим отклонением $\sigma=1$, выборочное среднее $\bar{x}=0{,}05$. При уровне значимости $\alpha=0{,}01$ проверить нулевую гипотезу $H_0: a=0$ при альтернативной гипотезе $H_1: a\neq 0$.

Найдем наблюдаемое значение критерия

$$u_{набл}=\frac{\bar{x}-a_0\ \cdot\sqrt{n}}{\sigma}=\frac{0{,}05-0\ \cdot\sqrt{30}}{1}\approx 0{,}27.$$

По таблицам значений функции Лапласа найдем критическую точку $u_{\text{кр}} = 2{,}58$. Критическая область $K = (-\infty; -2{,}58] \cup [2{,}58; +\infty)$. Так как $u_{\text{набл}} \notin K$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

2) Пусть выборка X получена из нормального распределения с неизвестными параметрами a и σ^2.

При заданном уровне значимости α проверяется нулевая гипотеза

$$H_0 : a = a_0,$$

$$H_1 : a \neq a_0.$$

Критическая область имеет вид

$$K = \left(-\infty; -t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}\right] \cup \left[t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}; +\infty\right),$$

где $t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} = t\left(100\frac{\alpha}{2}\%; n-1\right)$ – $100\frac{\alpha}{2}$-процентная точка распределения Стьюдента с $(n-1)$ степенями свободы.

Для проверки нулевой гипотезы вычисляется наблюдаемое значение критерия

$$t_{\text{набл}} = \frac{\bar{x} - a_0}{S}\sqrt{n}.$$

Если $t_{\text{набл}} \notin K$, т. е. $|t_{\text{набл}}| < t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу; если $t_{\text{набл}} \in K$, т. е. $|t_{\text{набл}}| \geq t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$, то нулевую гипотезу отвергают.

Пример 4.2 Пусть выборка X из примера 1.1 получена из нормального распределения. При уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ проверить нулевую гипотезу $H_0 : a = 0$ при альтернативной гипотезе $H_1 : a \neq 0$.

Найдем наблюдаемое значение критерия

$$t_{\text{набл}} = \frac{\bar{x} - a_0}{S}\sqrt{n} = \frac{0{,}05 - 0}{1{,}14}\sqrt{30} \approx 0{,}24.$$

По таблице процентных точек распределения Стьюдента найдем $t_{0{,}005;29} = 2{,}76$. Критическая область $K = (-\infty; -2{,}76] \cup [2{,}76; +\infty)$. Так как $t_{\text{набл}} \notin K$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Проверка гипотез о равенстве математических ожиданий двух

случайных величин, имеющих нормальное распределение.

1) Пусть исследуются две случайные величины *X* и *Y*, каждая из которых подчиняется нормальному закону: $X \sim N(a_1, \sigma_1^2), Y \sim N(a_2, \sigma_2^2)$, дисперсии σ_1^2, σ_2^2 известны.

При заданном уровне значимости α проверяется нулевая гипотеза

$$H_0 : a_1 = a_2,$$
$$H_1 : a_1 \neq a_2.$$

Критическая область имеет вид

$$K = (-\infty; -u_{\text{кр}}] \cup [u_{\text{кр}}; +\infty),$$

где $u_{\text{кр}}$ – корень уравнения $\Phi(u_{\text{кр}}) = \dfrac{1-\alpha}{2}$,

$\Phi(x)$ – функция Лапласа.

Для проверки нулевой гипотезы вычисляется наблюдаемое значение критерия

$$u_{\text{набл}} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}.$$

Если $u_{\text{набл}} \notin K$, т. е. $|u_{\text{набл}}| < u_{\text{кр}}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу; если $u_{\text{набл}} \in K$, т. е. $|u_{\text{набл}}| \geq u_{\text{кр}}$, то нулевую гипотезу отвергают.

Пример 4.3 Пусть независимые выборки *X* и *Y*, объем которых $n_1 = 30$ и $n_2 = 31$, извлечены из нормальных распределений, выборочные средние $\bar{x} = 0{,}05$ и $\bar{y} = 0{,}78$, дисперсии $\sigma_1^2 = 1, \sigma_2^2 = 0{,}58$. При уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу $H_0 : a_1 = a_2$ при альтернативной гипотезе $H_1 : a_1 \neq a_2$ (a_1, a_2 – математические ожидания выборок *X* и *Y* соответственно).

Найдем наблюдаемое значение критерия

$$u_{\text{набл}} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{0{,}05 - 0{,}78}{\sqrt{\dfrac{1}{30} + \dfrac{0{,}58}{31}}} \approx -3{,}2.$$

По таблицам значений функции Лапласа найдем критическую точку $u_{\text{кр}} = 2{,}58$. Критическая область $K = (-\infty; -2{,}58] \cup [2{,}58; +\infty)$. Так как $u_{\text{набл}} \in K$, то нулевую гипотезу отвергают.

2) Пусть исследуются две случайные величины *X* и *Y*, каждая из которых подчиняется нормальному закону: $X \sim N(a_1, \sigma_1^2), Y \sim N(a_2, \sigma_2^2)$. Дисперсии σ_1^2, σ_2^2 неизвестны, но предполагается, что $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

При заданном уровне значимости α проверяется нулевая гипотеза

$$H_0 : a_1 = a_2,$$
$$H_1 : a_1 \neq a_2.$$

Критическая область имеет вид

$$K = \left(-\infty; -t_{\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2}\right] \cup \left[t_{\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2}; +\infty\right),$$

где $t_{\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2} = t\left(100\frac{\alpha}{2}\%; n_1 + n_2 - 2\right)$ – $100\frac{\alpha}{2}$-процентная точка распределения Стьюдента с $(n_1 + n_2 - 2)$ степенями свободы.

Для проверки нулевой гипотезы вычисляется наблюдаемое значение критерия

$$t_{\text{набл}} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{n_1\tilde{S}_1^2 + n_2\tilde{S}_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}.$$

Если $t_{\text{набл}} \notin K$, т. е. $|t_{\text{набл}}| < t_{\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу; если $t_{\text{набл}} \in K$, т. е. $|t_{\text{набл}}| \geq t_{\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2}$, то нулевую гипотезу отвергают.

Пример 4.4 Пусть независимые выборки *X* и *Y*, объемы которых $n_1 = 30$ и $n_2 = 31$, извлечены из нормальных распределений, выборочные средние $\bar{x} = 0{,}05$, $\bar{y} = 0{,}78$, смещенные выборочные дисперсии $\tilde{S}_1^2 = 1{,}26$, $\tilde{S}_2^2 = 0{,}27$ соответственно. При уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу $H_0 : a_1 = a_2$ при альтернативной гипотезе $H_1 : a_1 \neq a_2$ (a_1, a_2 – математические ожидания выборок *X* и *Y* соответственно).

Найдем наблюдаемое значение критерия

$$t_{\text{набл}} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{n_1\tilde{S}_1^2 + n_2\tilde{S}_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{0{,}05 - 0{,}78}{\sqrt{\frac{30 \cdot 1{,}26 + 31 \cdot 0{,}27}{30 + 31 - 2}\left(\frac{1}{30} + \frac{1}{31}\right)}} \approx -3{,}22.$$

По таблице процентных точек распределения Стьюдента найдем $t_{0,005;59} = 2{,}66$. Критическая область $K = (-\infty; -2{,}66] \cup [2{,}66; +\infty)$. Так как

$t_{\text{набл}} \in K$, то нулевую гипотезу отвергают.

Проверка гипотезы о дисперсиях двух случайных величин, распределенных по нормальному закону.

Пусть заданы две независимые выборки, извлеченные из нормальных распределений.

При заданном уровне значимости α проверяется нулевая гипотеза

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2,$$
$$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2.$$

Для проверки нулевой гипотезы вычисляется наблюдаемое значение критерия

$$F_{\text{набл}} = \frac{S_{\text{Б}}^2}{S_{\text{М}}^2}.$$

Критическая область имеет вид

$$K = \left[F_{\frac{\alpha}{2};n_1-1,n_2-1}; +\infty \right),$$

где $F_{\frac{\alpha}{2};n_1-1,n_2-1} = F(100\frac{\alpha}{2}\%; n_1-1, n_2-1)$ – $100\frac{\alpha}{2}$-процентная точка распределения Фишера с (n_1-1) и (n_2-1) степенями свободы,

n_1, n_2 – объемы выборок с большей и меньшей дисперсиями соответственно.

Если $F_{\text{набл}} \notin K$, т. е. $F_{\text{набл}} < F_{\frac{\alpha}{2};n_1-1,n_2-1}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу; если $F_{\text{набл}} \in K$, т. е. $F_{\text{набл}} \geq F_{\frac{\alpha}{2};n_1-1,n_2-1}$, то нулевую гипотезу отвергают.

*Пример 4.*5 Пусть независимые выборки *X* и *Y*, объем которых $n_1 = 30$ и $n_2 = 31$, извлечены из нормальных распределений, несмещенные выборочные дисперсии $S_1^2 = 1{,}3$, $S_2^2 = 0{,}27$. При уровне значимости 0,1 проверить нулевую гипотезу $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ при альтернативной гипотезе $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ (σ_1^2, σ_2^2 – дисперсии выборок *X* и *Y* соответственно).

Найдем наблюдаемое значение критерия

$$F_{\text{набл}} = \frac{S_{\text{Б}}^2}{S_{\text{М}}^2} = \frac{1{,}3}{0{,}27} \approx 4{,}81.$$

По таблице процентных точек распределения Фишера найдем $F_{0,05;29,30} = 1{,}62$. Критическая область $K = [1{,}62; +\infty)$. Так как $F_{\text{набл}} \in K$, то нулевую гипотезу отвергают.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение статистической гипотезы.
2. Что такое статистический критерий?
3. Какая гипотеза называется параметрической?