

Вычисление вероятностей с помощью комбинаторных формул

1. В коробке пять золотых и семь серебряных шаров. Из коробки наугад вынимают три шара. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу трех шаров будет:

- ровно два золотых;
- хотя бы два золотых.

Решение

Из множества двенадцати шаров выбирается без возвращения три шара. Выборки неупорядоченные, т. к. порядок извлечения не имеет значения. Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь три шара из двенадцати неупорядоченным образом без возвращения, т. е. числу сочетаний из 12 по 3:

$$N = C_{12}^3 = \frac{12!}{3!(12-3)!} = \frac{12!}{3!9!} = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 220.$$

а) рассмотрим событие $A = \{\text{среди взятых наудачу трех шаров ровно два золотых}\}$. Событие A происходит, если извлечены два золотых и один серебряный шар. Два золотых шара можно взять из пяти золотых шаров C_5^2 способами; один же серебряный шар из семи серебряных шаров можно взять семью способами. Следовательно, число исходов, благоприятствующих событию A ,

$$N_A = C_5^2 \cdot 7 = \frac{5!}{2!3!} \cdot 7 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 70.$$

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов:

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{70}{220} = \frac{7}{22}.$$

б) рассмотрим событие $B = \{\text{среди взятых наудачу трех шаров хотя бы два золотых}\}$. Событие B есть сумма двух событий:

$$B = B_1 + B_2,$$

где $B_1 = \{\text{среди взятых наудачу трех шаров два золотых и один серебряный шар}\}$,

$B_2 = \{\text{среди взятых наудачу трех шаров три золотых шара}\}$,

B_1 и B_2 – несовместные события.

Тогда

$$P(B) = P(B_1) + P(B_2).$$

Событие $B_1 = A$, поэтому

$$P(B_1) = P(A) = \frac{7}{22}.$$

Найдем вероятность события B_2

$$P(B_2) = \frac{N_{B_2}}{N} = \frac{C_5^3}{C_{12}^3} = \frac{1}{22}.$$

Вероятность события B

$$P(B) = P(B_1) + P(B_2) = \frac{7}{22} + \frac{1}{22} = \frac{8}{22} = \frac{4}{11}.$$

2. Школьник загадал трехзначное число от 000 до 999. Найти вероятность того, что:

- задуманное число содержит различные цифры;
- задуманное число содержит ровно одну цифру 3.

Решение

Из множества цифр от 0 до 9 выбираются три цифры с повторениями. Порядок цифр имеет значение, поэтому выборки упорядоченные. Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу размещений из 10 по 3 с повторениями:

$$N = \bar{A}_{10}^3 = 10^3 = 1000.$$

а) рассмотрим событие $A = \{\text{задуманное число содержит различные цифры}\}$. Из множества цифр от 0 до 9 выбираются упорядоченным образом три цифры без повторений. Следовательно, число исходов, благоприятствующих событию A ,

$$N_A = A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

Вероятность события A

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{720}{1000} = \frac{18}{25}.$$

б) рассмотрим событие $B = \{\text{задуманное число содержит ровно одну цифру 3}\}$. Воспользуемся основным правилом комбинаторики. Количество элементарных исходов с цифрой 3 на первой позиции $1 \cdot 9 \cdot 9$. С учетом того, что цифра 3 могла стоять на втором или на третьем месте, число исходов, благоприятствующих событию B

$$N_B = 1 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 3 = 243.$$

Вероятность события B

$$P(B) = \frac{N_B}{N} = \frac{243}{1000}.$$