4. Схема Бернулли

Из урны, содержащей три белых и пять черных шаров, последовательно извлекли пять шаров. Каждый раз извлеченный шар возвращали назад в урну. Найти вероятность того, что:

а) все извлеченные шары белые;

б) хотя бы один раз извлекли белый шар.

Решение

Рассмотрим последовательность пяти испытаний, состоящих в извлечении одного шара из урны. После извлечения шар возвращается в урну, поэтому испытания являются независимыми.

В каждом испытании возможны два исхода: «удача» $У$ = {извлекли белый шар}, «неудача» $Н$ = {извлекли черный шар}. Вероятность того, в n независимых испытаниях «удача» происходит k раз вычисляется по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k},$$

где $p = P(У) = \frac{3}{8}$,

$q = P(Н) = \frac{5}{8}$,

$n = 5$.

а) рассмотрим событие A = {все извлеченные шары белые}. В каждом из пяти испытаний исход «удача» должен произойти пять раз, тогда по формуле Бернулли

$$P(A) = P_5(5) = C_5^5 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^0 = \frac{243}{32768};$$

б) рассмотрим событие B = {хотя бы один раз извлекли белый шар}.

$$P(B) = P_5(1) + P_5(2) + P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) =$$

$$= C_5^1 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^4 + C_5^2 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^3 + C_5^3 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^2 +$$

$$+ C_5^4 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^1 + C_5^5 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^0 = \frac{29643}{32643}.$$

Можно рассмотреть противоположное событие $\overline{B}$ = {ни разу не извлекли белый шар}, $\overline{B} = P_5(0)$, тогда вероятность события B:

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - C_5^0 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^5 = 1 - \frac{3125}{32768} = \frac{29643}{32643}.$$