7. Двумерные случайные величины

Распределение дискретной двумерной случайной величины (ξ, η) задано таблицей:

$\eta \setminus \xi$	–2	2	4
0	0	0,1	0,2
1	0,4	0,1	0,2

Найти:

а) одномерные распределения случайных величин;

б) совместную функцию распределения;

в) коэффициент корреляции случайных величин.

Проверить независимость случайных величин.

Решение

а) рассмотрим случайную величину ξ. Случайная величина принимает три значения: –2, 2 и 4. Для нахождения вероятностей, с которыми случайная величина ξ принимает свои значения, просуммируем вероятности в столбцах таблицы. Ряд распределения случайной величины ξ:

ξ	–2	2	4
p	0,4	0,2	0,4

Аналогично получим ряд распределения случайной величины η (суммируем вероятности в строках)

η	0	1
p	0,3	0,7

б) совместная функция распределения

$$F(x,y) = P\{\xi < x, \eta < y\} = \begin{cases} 0, & x \le -2, y \le 0, \\ 0, & -2 < x \le 2, 0 < y \le 1, \\ 0{,}1, & 2 < x \le 4, 0 < y \le 1, \\ 0{,}3, & x > 4, 0 < y \le 1, \\ 0{,}4, & -2 < x \le 2, y > 1, \\ 0{,}6, & 2 < x \le 4, y > 1, \\ 1, & x > 4, y > 1. \end{cases}$$

в) для нахождения коэффициента корреляции найдем:

– математическое ожидание случайной величины ξ

$$M\xi = -2 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,4 = 1,2;$$

– математическое ожидание случайной величины η

$$M\eta = 0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,7 = 0,7;$$

– среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ

$$\sigma\xi = \sqrt{D\xi} = \sqrt{M\xi^2 - (M\xi)^2} = \sqrt{(-2)^2 \cdot 0,4 + 2^2 \cdot 0,2 + 4^2 \cdot 0,4 - (1,2)^2} = \sqrt{7,36};$$

– среднее квадратическое отклонение случайной величины η

$$\sigma\eta = \sqrt{D\eta} = \sqrt{M\eta^2 - (M\eta)^2} = \sqrt{0^2 \cdot 0,3 + 1^2 \cdot 0,7 - (0,7)^2} = \sqrt{0,21}.$$

Найдем ряд распределения случайной величины $\xi \cdot \eta$:

$\xi \cdot \eta$	-2	0	2	4
p	0,4	0,3	0,1	0,2

Математическое ожидание случайной величины $\xi \cdot \eta$

$$M(\xi \cdot \eta) = -2 \cdot 0,4 + 0 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,2 = 0,2.$$

Таким образом, коэффициент корреляции случайных величин ξ и η

$$r = \frac{M(\xi \cdot \eta) - M\xi \cdot M\eta}{\sigma\xi \cdot \sigma\eta} = \frac{0,2 - 1,2 \cdot 0,7}{\sqrt{7,36} \cdot \sqrt{0,21}} \approx -0,52.$$

Для установления независимости проверим равенство

$$P(\xi = a, \eta = b) = P(\xi = a) P(\eta = b)$$

для всех возможных значений a случайной величины ξ и значений b случайной величины η. Рассмотрим, например, значения $\xi = -2$, $\eta = 0$.

$$P(\xi = -2, \eta = 0) = 0,$$

$$P(\xi = -2) P(\eta = 0) = 0,4 \cdot 0,3 = 0,12,$$

$$P(\xi = -2, \eta = 0) \neq P(\xi = -2) P(\eta = 0).$$

Следовательно, случайные величины ξ и η не являются независимыми.