Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
“Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины”

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ
по спецкурсу
"Теория конечных групп и их классов"
для студентов специализации
"алгебра и теория чисел"
математического факультета

Гомель 2003

ББК 22.144
М 77
УДК 512.542

В авторской редакции

Составитель — В.С.Монахов, профессор, доктор физико–математических наук

Рецензент — В.Н.Семенчук, доцент, доктор физико–математических наук

Рекомендовано к опубликованию в открытой печати научно-методическим советом УО “Гомельский государственный университет им.Ф.Скорины” 28 мая 2003 года, протокол № 9.

Настоящий практикум отражает начальные фрагменты спецкурса и состоит из 7 работ. Каждая из работ содержит вопросы для самоконтроля, призваные активизировать индивидуальную работу студентов, и пять вариантов практических заданий. Теоретический материал соответствует учебному пособию: В.С.Монахов, Введение в теорию конечных групп и их классов // Гомель: ГГУ им. Ф.Скорины, 2003. 319 с.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

ГРУППЫ И ИХ ПОДГРУППЫ

Вопросы для самоконтроля

1. Дать определение группы с произвольной бинарной алгебраической операцией.

2. Как задать группу?

3. Что значит аддитивная (мультипликативная) группа?

4. Сколько единиц (нулей) в мультипликативной (аддитивной) группе?

5. Сколько противоположных (обратных) имеет элемент в аддитивной (мультипликативной) группе?

6. Что является в аддитивной группе аналогом степени элемента?

7. Дать определение изоморфизма для (мультипликативных) аддитивных групп.

8. Дать определение изоморфизма, когда одна группа аддитивна, а другая — мультипликативная.

9. Является ли изоморфизм отношением эквивалентности?

10. Является ли мультипликативная группа $\mathbb{R}^{\#}$ подгруппой аддитивной группы $\mathbb{R}$?

11. Сформулировать критерий для подгрупп аддитивных групп.

12. Дать определение порядка элемента в аддитивной группе.

13. Конечны ли порядки элементов в конечной группе?

14. Могут ли в группе все элементы иметь бесконечный порядок?

15. Будут ли равны порядки $|x|$ и $|\langle x\rangle|$, где x — элемент группы?

16. В аддитивных группах определить сумму подмножеств и смежный класс.

17. Записать тождество Дедекинда для подгрупп K, L, M, где $L \subseteq M$.

18. Сформулировать свойства смежных классов в аддитивной записи.

19. Что называется индексом подгруппы?

20. Пусть A и B нормальные подгруппы группы G, $A \cap B = E$. Доказать, что $ab = ba$ для любых $a \in A$ и $b \in B$.

Задачи к лабораторной работе

1. Определена ли операция на множестве? Будут ли они группами?

1.1. $M = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$;

1.2. $Q_p = \{\frac{n}{p^m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$, p — фиксированное простое число;

1.3. $S = \{e, (13)(24), (1234), (1432)\}$;

1.4. $K = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$;

1.5. $L = \{e, (23), (24), (34), (234), (243)\}$.

2. Будет ли множество H подгруппой группы $GL(n, \mathbb{R})$?

2.1. $n=4$; $H=\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b \in \mathbb{R} \right\}$;

2.2. $n=4$; $H=\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b \in \mathbb{R} \right\}$;

2.3. $n=3$; $H=\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b \in \mathbb{R} \right\}$;

2.4. $n=3$; $H=\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b \in \mathbb{R} \right\}$;

2.5. $n=4$; $H=\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b \in \mathbb{R} \right\}$.

3. Найти все элементы подгруппы M группы S_n и индекс подгруппы M в группе S_n.

3.1. $n=5$; $M=\langle(153)(24)\rangle$;
3.2. $n=5$; $M=\langle(12)(345)\rangle$;
3.3. $n=6$; $M=\langle(135)(624)\rangle$;
3.4. $n=4$; $M=\langle(3214)\rangle$;
3.5. $n=6$; $M=\langle(15)(3624)\rangle$.

4. Найти порядок элемента g, принадлежащего мультипликативной группе G. Вычислить g^{100}.

4.1. $g=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$, $G=\mathbb{C}^{\#}$;
4.2. $g=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix}$, $G=GL(2,\mathbb{C})$;
4.3. $g=\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $G=GL(2,\mathbb{C})$;
4.4. $g=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$, $G=\mathbb{C}^{\#}$;
4.5. $g=-i$, $G=\mathbb{C}^{\#}$.

5. Пусть A и B подгруппы группы S_4. Будет ли подгруппой произведение AB? Найти число элементов множества AB.

5.1. $A=\langle(12)(34)\rangle$, $B=\langle(142)\rangle$;
5.2. $A=\langle(341)\rangle$, $B=\langle(12)\rangle$;
5.3. $A=\langle(1234)\rangle$, $B=\langle(234)\rangle$;
5.4. $A=\langle(3142)\rangle$, $B=\langle(214)\rangle$;

5.5. $A = \langle (14)(23) \rangle$, $B = \langle (132) \rangle$.

6. Составить таблицу сложения для факторгруппы $k\mathbb{Z}$ по подгруппе $t\mathbb{Z}$.
6.1. $k = 5$, $t = 15$;
6.2. $k = 6$, $t = 18$;
6.3. $k = 2$, $t = 6$;
6.4. $k = 2$, $t = 8$;
6.5. $k = 3$, $t = 9$.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

ГОМОМОРФИЗМЫ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПОДГРУПП

Вопросы для самоконтроля

1. Дать определение гомоморфизма аддитивной группы в мультипликативную.

2. Будет ли естественный гомоморфизм эпиморфизмом?

3. Будет ли изоморфизм естественным гомоморфизмом?

4. Укажите гомоморфизм, который не является ни мономорфизмом, ни эпиморфизмом.

5. Что называется нециклической группой?

6. Дать определение порядка элемента в аддитивной записи.

7. Показать, что аддитивная группа $\mathbb{Z}$ целых чисел циклическая. Найти все образующие.

8. Найти все подгруппы группы целых чисел. Указать все образующие каждой подгруппы.

9. Найти все факторгруппы группы целых чисел. Указать все образующие каждой факторгруппы.

10. Рассмотреть аддитивную группу и дать определения разложения этой группы в прямую сумму своих подгрупп.

11. Чему равен порядок прямого произведения двух подгрупп?

12. Чему равен порядок элемента прямого произведения двух конечных групп?

Задачи к лабораторной работе

1. Пусть

$$f : (n\mathbb{Z}, +) \to (m\mathbb{Z}, +)$$

такое отображение, что $f : nk \mapsto rk$, $k \in \mathbb{Z}$, n, m, r — фиксированные натуральные числа. Доказать, что f — гомоморфизм. Найти ядро и образ f. Будет ли f мономорфизмом, эпиморфизмом, изоморфизмом?

1.1. $n = 2, m = 3, r = 3$;
1.2. $n = 3, m = 6, r = 12$;
1.3. $n = 3, m = 2, r = 4$;
1.4. $n = 2, m = 2, r = 6$;
1.5. $n = 1, m = 2, r = 4$.

2. Пусть ϕ — отображение группы $(M, *)$ в группу $(M, \cdot)$. Будет ли ϕ гомоморфизмом? Если ϕ гомоморфизм, то найти $Ker\phi$ и $Im\phi$. Будет ли ϕ мономорфизмом, эпиморфизмом, изоморфизмом?

2.1.
$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\};$$
$$N = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a^2 + b^2 > 0\},$$
$*$ — сложение, $\cdot$ — умножение,
$$\phi : \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \mapsto a + b\sqrt{2};$$

2.2.
$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 + b^2 > 0 \right\},$$
$$N = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a^2 + b^2 > 0\},$$
$*$ и $\cdot$ — умножение,
$$\phi : \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \mapsto a + b\sqrt{3};$$

2.3.
$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}, \quad N = 3\mathbb{Z},$$
$*$ и $\cdot$ — сложение,
$$\phi : \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mapsto 3a + 3b;$$

2.4.
$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}^{\#} \right\}, \quad N = \mathbb{R}^{\#},$$
$*$ и $\cdot$ — умножение,
$$\phi : \begin{pmatrix} a & 20 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mapsto ab;$$

2.5.
$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 + b^2 > 0 \right\}, \quad N = \mathbb{Q},$$
$*$ — умножение, $\cdot$ — сложение,
$$\phi : \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \mapsto a - b.$$

3. Найти все элементы циклической подгруппы $H = \langle g \rangle$ группы $(\mathbb{C}^{\#}, \cdot)$:
3.1. $g = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$;

3.2. $g = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$;
3.3. $g = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$;
3.4. $g = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$;
3.5. $g = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

4. Доказать, что порядки указанных элементов группы равны:
4.1. ab и ba;
4.2. bca и cab;
4.3. abc и bca;
4.4. ab^{-1} и ba^{-1};
4.5. a и $b^{-1}ab$.

5. Разложить в прямую сумму циклическую группу порядка n:
5.1. $n = 238$;
5.2. $n = 256$;
5.3. $n = 200$;
5.4. $n = 156$;
5.5. $n = 164$.

6. Пусть H и K — подгруппы группы S_8. Существует ли в S_8 подгруппа $A = H \times K$?
6.1. $H = \langle(123567)\rangle$, $K = \langle(12)(3567)\rangle$;
6.2. $H = \langle(1235)\rangle$, $K = \langle(3576)\rangle$;
6.3. $H = \langle(1234)(5678)\rangle$, $K = \langle(1537)(2846)\rangle$;
6.4. $H = \langle(137)(25)\rangle$, $K = \langle(5716)\rangle$;
6.5. $H = \langle(37641)\rangle$, $K = \langle(2316)\rangle$.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

ЛИНЕЙНЫЕ ГРУППЫ

Вопросы для самоконтроля

1. Критерий невырожденности матрицы.

2. Формула обратной матрицы.

3. Проверить, что множество $GL(n, \mathbb{P})$ невырожденных $n \times n$-матриц над полем $\mathbb{P}$ образует группу. Является ли эта группа абелевой?

4. Проверить, что множество $SL(n, \mathbb{P})$ невырожденных $n \times n$-матриц с единичным определителем над полем $\mathbb{P}$ образует группу. Является ли эта группа абелевой? Абелева ли группа $SL(2, 2)$?

5. Формулы порядков $GL(n, p^m)$ и $SL(n, p^m)$ с доказательством.

6. Доказать, что $SL(n, \mathbb{P}) \triangleleft GL(n, \mathbb{P})$ и $GL(n, \mathbb{P})/SL(n, \mathbb{P}) \simeq (\mathbb{P}^{\#}, \cdot)$.

7. Центр группы и его свойства.

8. Центры группы $GL(n, \mathbb{P})$ и группы $SL(n, \mathbb{P})$.

9. Проективная общая и проективная специальная линейные группы и их порядки над конечными полями.

10. Разложение $GL(2, 2^m)$ в прямое произведение своих подгрупп.

11. Вложение группы $PSL(2, p^m)$ в $PGL(2, p^m)$.

12. Теорема о подгруппах группы $PSL(2, p^m)$.

Задание к лабораторной работе

1. Написать таблицу сложения и умножения для элементов поля $\mathbb{Z}_p$. Указать каждому элементу противоположный и обратный

1.1. $p = 7$;

1.2. $p = 5$;

1.3. $p = 11$;

1.4. $p = 7$;

1.5. $p = 5$.

2. Вычислить противоположную и обратную матрицы над полем $\mathbb{Z}_p$ для матрицы A

2.1. $p = 7$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

2.2. $p = 5$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$;

2.3. $p = 11$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

2.4. $p = 7,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix};$

2.5. $p = 5,\ A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

3. Вычислить порядки групп $GL(3, p^m)$, $SL(3, p^m)$, $PGL(3, p^m)$, $PSL(3, p^m)$. Найти порядки центров групп $GL(3, p^m)$, $SL(3, p^m)$.

3.1. $p^m = 2^2$ и $p^m = 17^2$;
3.2. $p^m = 3^2$ и $p^m = 13^2$;
3.3. $p^m = 5^2$ и $p^m = 11^2$;
3.4. $p^m = 7^2$ и $p^m = 2^3$;
3.5. $p^m = 3^2$ и $p^m = 2^4$.

4. Вычислить порядки и перечислить подгруппы группы $PSL(2, p^m)$.

4.1. $p^m = 7,\ p^m = 2^6,\ p^m = 13^2$;
4.2. $p^m = 5,\ p^m = 2^5,\ p^m = 11^3$;
4.3. $p^m = 11,\ p^m = 2^4,\ p^m = 3^3$;
4.4. $p^m = 7,\ p^m = 2^2,\ p^m = 5^3$;
4.5. $p^m = 5,\ p^m = 2^3,\ p^m = 7^2$.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

ЦЕНТР И КОММУТАНТ

Вопросы для самоконтроля

1. Коммутатор элементов, коммутант группы.
2. Коммутант и факторгруппа, теорема Миллера.
3. Коммутант факторгруппы.
4. n–ый коммутант, разрешимые группы.
5. n–ый коммутант факторгруппы.
6. Примеры разрешимых групп.
7. Подгруппы и факторгруппы разрешимых групп.
8. Прямые произведения разрешимых групп.
9. Теорема о разрешимости группы с разрешимой нормальной подгруппой и разрешимой факторгруппой по ней.
10. Центр группы и его свойства.
11. Абелевость группы с циклической факторгруппой по центру.

Задачи к лабораторной работе

1. В группе $GL(2,\mathbb{R})$ для матриц

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \; Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

найти коммутаторы:

1.1. $[x,y]$ и $[x^{-1},y]$;
1.2. $[x,z]$ и $[x,z^{-1}]$;
1.3. $[y,z]$ и $[y^{-1},z]$;
1.4. $[z,x]$ и $[x^{-1},z]$;
1.5. $[z,y]$ и $[z^{-1},y]$.

2. В группе $GL(3,\mathbb{R})$ для матриц

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \; V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

найти коммутаторы:

2.1. $[U,V]$;
2.2. $[U,W]$;
2.3. $[V,W]$;
2.4. $[W,U]$;
2.5. $[V,U]$.

3. В симметрической группе S_4 для элементов

$$\tau_1 = (12),\ \tau_2 = (123),\ \tau_3 = (1234),\ \tau_4 = (13)(24)$$

найти коммутаторы:

3.1. $[\tau_1, \tau_2]$ и $[\tau_3, \tau_4]$;
3.2. $[\tau_1, \tau_3]$ и $[\tau_2, \tau_4]$;
3.3. $[\tau_1, \tau_4]$ и $[\tau_4, \tau_3]$;
3.4. $[\tau_2, \tau_3]$ и $[\tau_3, \tau_1]$;
3.5. $[\tau_4, \tau_2]$ и $[\tau_3, \tau_2]$.

4. Пусть в группе G коммутант содержится в центре группы, то есть $G' \leq Z(G)$. Доказать, что для любых x, y и $z \in G$ справедливы равенства:

4.1. $[xy, z] = [x, z][y, z]$;
4.2. $[x, yz] = [x, y][x, z]$;
4.3. $[x^2, y] = [x, y^2] = [x, y]^2$;
4.4. $[x, [y, z]][y, [z, x]] = [z, [x, y]] = e$;
4.5. $(xy)^2 = x^2y^2[y, x]$.

5. Докажите, что для любых a, b и $c \in G$ справедливы равенства:

5.1. $[a, b]^{-1} = [b, a]$;
5.2. $[a^{-1}, b] = a[b, a]a^{-1}$;
5.3. $[ab, c] = b^{-1}[a, c]b[b, c]$;
5.4. $[a, bc] = [a, c][a, b]^c = [a, c][a, b][[a, b], c]$;
5.5. $[ab, c] = [a, c]^b[b, c] = [a, c][[a, c], b][b, c]$.

6.1. Докажите, что в S_n любой коммутатор принадлежит A_n.

6.2. Пусть элемент z группы G является коммутатором. Показать, что при любом $x \in G$ элемент xzx^{-1} также будет коммутатором.

6.3. Пусть в группе все коммутаторы равны e. Показать, что группа абелева.

6.4. Каковы коммутаторы элементов в абелевой группы?

6.5. Пусть элемент z группы G является коммутатором. Показать, что при любом $x \in G$ элемент $x^{-1}zx$ также будет коммутатором.

7. Доказать, что коммутант группы $GL(n, \mathbb{R})$ содержится в $SL(n, \mathbb{R})$.

8. Пусть в конечной группе G порядок коммутанта равен 2, то есть $|G'| = 2$. Доказать, что индекс коммутанта $|G : G'|$ — четное число.

9. Докажите, что если G — неразрешимая группа, то $G/Z(G)$ — также неразрешимая группа.

10. Докажите, что центр группы $GL(n, \mathbb{R})$ состоит из скалярных матриц.

11. Доказать, что если в группе G имеются две различные абелевы максимальные подгруппы M_1 и M_2, то их пересечение $M_1 \cap M_2$ содержится в центре группы G.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5

ПОРЯДОК ЭЛЕМЕНТА

Вопросы для самоконтроля

1. Определение порядка элемента группы. Элементы конечного и бесконечного порядков.
2. Циклическая группа, порожденная элементом конечного порядка.
3. Циклическая группа, порожденная элементом бесконечного порядка.
4. Изоморфизм циклических групп.
5. Подгруппы и факторгруппы бесконечной циклической группы.
6. Подгруппы и факторгруппы конечной циклической группы.
7. Порядок перестановки.
8. Порядки элементов конечной циклической группы.
9. Цикличность группы простого порядка.

Задачи к лабораторной работе

1. Найти все элементы циклической подгруппы $\langle g \rangle$ группы $(\mathbb{C}^{\#}, \cdot)$.

1.1. $g = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$;

1.2. $g = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$;

1.3. $g = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i$;

1.4. $g = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} i$;

1.5. $g = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

2. Найти порядок перестановки.

2.1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in S_5$;

2.2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} \in S_6$;

2.3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_5$;

2.4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 6 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in S_7$;

2.5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in S_5$.

3. В группе $GL(2, \mathbb{C})$ найти порядки элементов.

3.1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

3.2. $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

3.3. $\begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$;

3.4. $\begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

3.5. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -2+3i & -2+2i \\ 1-i & 3-2i \end{pmatrix}$.

4. В группе $GL(2, \mathbb{P})$ найти порядки элементов.

4.1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \mathbb{Z}_3$;

4.2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \mathbb{Z}_5$;

4.3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \mathbb{Z}_5$;

4.4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $P = \mathbb{Z}_3$;

4.5. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \mathbb{Z}_3$.

5. Доказать, что порядки указанных элементов группы равны.

5.1. ab и ba;

5.2. a и $b^{-1}ab$;

5.3. ab и ba^{-1};

5.4. a и $b^{-1}a^{-1}b$;

5.5. abc и bca.

6. В циклической группе $\langle a \rangle$ порядка n найти все элементы g, удовлетворяющие условию $g^k = e$, и все элементы порядка n.

6.1. $n = 24$, $k = 6$;

6.2. $n = 100$, $k = 5$;

6.3. $n = 24$, $k = 4$;

6.4. $n = 100$, $k = 20$;

6.5. $n = 36$, $k = 4$.

7. Доказать, что порядок нечетной перестановки есть четное число.

8. Найти порядки всех элементов группы S_n, $n \leq 7$.

9. Доказать, что группа абелева, если в ней все неединичные элементы имеют порядок 2. Кроме того, если группа конечна, то ее порядок равен 2^n.

10. Могут ли в группе существовать точно два элемента порядка 2?

11. Доказать, что в абелевой группе множество элементов, порядки которых делят фиксированное число n, является подгруппой.

12. Доказать, что всякая конечная подгруппа группы $(\mathbb{C}^{\#}, \cdot)$ циклическая.

13. Найти число элементов порядка p^m в циклической группе порядка p^n, где p — простое число, $0 < m \leq n$.

14. В группе $(\mathbb{C}^{\#}, \cdot)$ найти все элементы 5–го порядка, 6–го порядка.

15. Доказать, что существуют перестановки любого порядка.

16. Доказать, что в абелевой группе нечетного порядка каждый элемент является квадратом некоторого элемента.

17. Доказать, что конечная абелева группа порядка, не делящегося на квадрат простого числа, является циклической.

18. Пусть в абелевой конечной группе G все неединичные элементы имеют один и тот же порядок p. Доказать, что:

(а) число p простое;

(б) группа G разложима в прямое произведение подгрупп порядка p;

(в) порядок группы G равен p^n, где n — число сомножителей в прямом произведении;

(г) любая неединичная подгруппа является прямым произведением подгрупп порядка p.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6

ПОЛУПРЯМЫЕ И ПРЯМЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Вопросы для самоконтроля

1. Прямое произведение и его свойства.

2. Неразложимость циклической примарной группы в прямое произведение подгрупп.

3. Разложение циклической группы составного порядка в прямое произведения примарных подгрупп.

4. Прямое произведение групп и его связь с прямым произведением подгрупп.

5. Центр,коммутант и подгруппа Фраттини прямого произведения.

6. Порядки элементов в циклической группе.

7. Полупрямое произведение двух групп. Обратные элементы и единичный элемент.

8. Полупрямое произведение подгрупп.

9. Связь полупрямых и прямых произведений.

Задачи к лабораторной работе

1. Указать порядки всех элементов циклической группы порядка n.

1.1. $n = 12$;

1.2. $n = 10$;

1.3. $n = 8$;

1.4. $n = 15$;

1.5. $n = 6$.

2. В диэдральной группе

$$D = \langle a, b \mid a^4 = b^2 = e, a^b = a^3 \rangle$$

порядка 8 перечислите все элементы группы и найдите их порядки. Вычислите следующие произведения и найдите их порядки.

2.1. a^3ba^2b;

2.2. a^3bab;

2.3. a^2ba^3b;

2.4. aba^3b;

2.5. a^2bab.

3. В полудиэдральной группе

$$S_4 = \langle a, b \mid a^8 = b^2 = e, a^b = a^3 \rangle$$

порядка 16 перечислите все элементы группы и найдите их порядки. Вычислите следующие произведения и найдите их порядки.

3.1. aba^2b;
3.2. a^2ba^4b;
3.3. a^2ba^2b;
3.4. a^3ba^5b;
3.5. a^5ba^4b.

4. В модулярной группе

$$M_3(3) = \langle a, b \mid a^9 = b^3 = e, a^b = a^4 \rangle$$

порядка 27 перечислите все элементы группы и найдите их порядки. Вычислите следующие произведения и найдите их порядки.

4.1. $a^5ba^2b^2$;
4.2. $a^2ba^3b^2$;
4.3. $a^3b^2a^2b$;
4.4. aba^5b^2;
4.5. a^3b^2ab.

5. В группе кватернионов

$$Q_4 = \langle a, b \mid a^8 = 1, b^2 = a^4, a^b = a^7 \rangle$$

порядка 16 перечислите все элементы группы и найдите их порядки. Вычислите следующие произведения и найдите их порядки.

5.1. $abab^2$;
5.2. a^2bab^3;
5.3. $a^3ba^3b^2$;
5.4. a^4b^3ab;
5.5. a^7b^3ab.

6. Указать разложение циклической группы порядка n в прямое произведение циклических примарных подгрупп.

6.1. $n = 12$;
6.2. $n = 18$;
6.3. $n = 36$;
6.4. $n = 20$;
6.5. $n = 45$.

7. Сколько подгрупп порядка k в нециклической абелевой группе порядка n?

7.1. $k = 10,\ n = 20$;
7.2. $k = 6,\ n = 12$;
7.3. $k = 15,\ n = 45$;

7.4. $k = 21,\ n = 63$;

7.5. $k = 14,\ n = 28$.

8. Указать разложение S_3 в полупрямое произведение подгрупп порядков 2 и 3.

9. Проверить, что множество

$$K = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

является нормальной подгруппой группы A_4 и $A_4 = K\langle(123)\rangle$.

10. Проверить, что $S_4 = HK$, где $H \simeq S_3$, а

$$K = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

11. Проверить, что $S_4 = AB$, где $A = \langle(1234)\rangle$ — циклическая группа порядка 4, а $B \simeq S_3$.

12. Доказать, что диэдральная группа порядка 16 не является произведением двух подгрупп порядка 4.

13. Доказать, что полудиэдральная группа порядка 16 не является произведением двух подгрупп порядка 4.

14. Доказать, что

$$GL(2, 2^n) = Z(GL(2, 2^n)) \times SL(2, 2^n).$$

15. Пусть p и q — простые числа $p > q$. Доказать, что группа порядка pq разложима в полупрямое произведение нормальной подгруппы порядка p и подгруппы порядка q. Если q не делит $p - 1$, то такое произведение будет прямым.

16. Доказать, что мультипликативная группа комплексных чисел является прямым произведением группы положительных действительных чисел и группы всех комплексных чисел, по модулю равных 1.

17. Доказать, что при $n \geq 3$ мультипликативная группа кольца вычетов $\mathbb{Z}_2 n$ является прямым произведением подгруппы $\{\pm 1\}$ и циклической группы порядка 2^{n-2}.

18. Доказать, что если k — наименьшее общее кратное порядков всех элементов конечной абелевой группы, то в группе существует элемент порядка k.

19. Найти все классы сопряженных элементов группы $A \times B$, если известны классы сопряженных элементов групп A и B.

20. Доказать, что если факторгруппа A/B абелевой группы A — бесконечная циклическая группа, то подгруппа B выделяется в A прямым множителем, то есть существует подгруппа C такая, что $A = B \times C$.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7

ГРУППЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ ДВУМЯ ЭЛЕМЕНТАМИ

Если группа G содержит элементы a и b, то, очевидно, она содержит и циклические подгруппы $\langle a\rangle$ и $\langle b\rangle$. Что касается других подгрупп, содержащих элементы a и b, то их принадлежность группе G зависит от соотношений между элементами a и b. Наименьшая из подгрупп, содержащих a и b, называется *подгруппой порождённой элементами* a и b и обозначается как $\langle a, b\rangle$. Простейшее соотношение между a и b есть равенство $ab = ba$. Например, если a и b — перестановки, являющиеся независимыми циклами, то a и b перестановочны в группе.

Другим соотношением между a и b может быть равенство $ab = ba^{-1}$.

1. Пусть a и b — элементы конечной группы и $ab = ba$.

1.1. Докажите, что $a^n b = ba^n$ для всех $n \in \mathbb{Z}$.

1.2. Пусть, кроме того, элемент b имеет порядок 2. Заполните таблицу умножения.

	a^i	ba^j
a^m		
ba^n		

1.3. Докажите, что множество $\{a^n, ba^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ образует подгруппу $\langle a, b\rangle$.

2. Пусть a и b — элементы конечной группы и $ab = ba$.

2.1. Докажите что $a^n b^2 = b^2 a^n$.

2.2. Пусть, кроме того, элемент b имеет порядок 3. Заполните таблицу умножения

	a^i	ba^j	b^2a^k
a^l			
ba^m			
b^2a^n			

2.3. Докажите, что множество $\{a^n, ba^n, b^2a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ образует подгруппу $\langle a, b\rangle$.

3. Пусть a и b — элементы группы и $ab = ba$.

3.1. Докажите что $a^m b^n = b^n a^m$ для любых натуральных n и m.

3.2. Докажите, что множество $\{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ образует подгруппу $\langle a, b\rangle$.

4. Пусть a и b — элементы группы и $(ab)^2 = a^2b^2$. Докажите что $ab = ba$.

5. Пусть a и b — элементы группы и $ab = ba$. Докажите что $(ab)^n = a^n b^n$ для всех целых n.

6. Если $a = (12)$ и $b = (345)$, то каков порядок перестановки ab?

7. Если $a = (12)$ и $b = (34567)$, то каков порядок перестановки ab?

8. Если $a = (1234)$ и $b = (56789)$, то каков порядок перестановки ab?

9. Если перестановки a и b являются циклами длины m и n соответственно, и наибольший общий делитель для m и n есть k, то каков порядок перестановки ab?

10. Приведите пример, показывающий, что если a и b — элементы группы, a имеет порядок 6, b имеет порядок 10, то произведение ab может иметь порядок, отличный от 30. Даже когда $ab = ba$.

11. Пусть $a = (123)$, $b = (23)$.
11.1. Проверьте, что $a^3 = b^2 = e$.
11.2. Проверьте, что $ab = ba^{-1}$.
11.3. Вычислите перестановки a^2, ba и ba^2.
11.4. Проверьте, что $\langle a, b \rangle = S_3$.

12. Пусть $a = (1234)$ и $b = (12)(34)$.
12.1. Проверьте, что $a^4 = b^2 = e$.
12.2. Проверьте, что $ab = ba^{-1}$.
12.3. Вычислите перестановки a^2, a^3, ba, ba^2 и ba^3.
12.4. Проверьте, что $\langle a, b \rangle$ — группа симметрий квадрата.

13. Пусть $a = (12345)$ и $b = (25)(34)$.
13.1. Проверьте, что $a^5 = b^2 = e$.
13.2. Проверьте, что $ab = ba^{-1}$.
13.3. Вычислите перестановки a^2, a^3, a^4, ba, ba^2, ba^3, ba^4.
13.4. Проверьте, что для правильного пятиугольника с вершинами $1, 2, 3, 4$ и 5 число симметрий описывается данными перестановками.

14. Пусть a и b — элементы группы, b имеет порядок 2 и $ab = ba^{-1}$.
14.1. Рассмотрите произведение $(bab)(bab)$ с двух точек зрения: с точки зрения, что $ba^2b = a^{-2}$, и с другой точки зрения, что $a^2b = ba^{-2}$.
14.2. Расширьте этот метод для доказательства того, что $a^nb = ba^{-n}$ для всех целых n.
14.3. Заполните соответствующую таблицу умножения

	a^k	ba^l
a^m		
ba^n		

14.4. Докажите, что множество $\{a^n, ba^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ образует подгруппу $\langle a, b \rangle$.

15. Пусть группа G порождается элементом a порядка n и элементом b порядка 2, которые связаны соотношением $ab = ba^{-1}$.

15.1. Докажите, что G состоит из $2n$ элементов.

15.2. Докажите, что каждый элемент вида ba^r имеет порядок 2.

16. Представьте каждый элемент из S_3 как произведение транспозиций. Докажите, что $S_3 = \langle (12), (13), (23) \rangle$.

17. Докажите, что множество всех транспозиций из S_n порождает группу S_n.

18. Вычислите произведение $(1a)(1b)(1a)$ и установите, что множество транспозиций $\{(12), (13), \ldots, (1n)\}$ порождает группу S_n.

19. Вычислите произведения $(12)(13)$ и $(134)(132)$.

20. Докажите, что каждая чётная перестановка может быть записана в виде произведения циклов длины 3.

21. Докажите, что все циклы длины 3 порождают A_n.

Литература

1. Белоногов В.А. Задачник по теории групп. — М.: Наука, 2000. 239 с.

2. Бузланов А.В., Каморников С.Ф., Монахов В.С. Лабораторные работы по курсу "Алгебра и теория чисел"для студентов II курса математического факультета // Гомель: ГГУ им. Ф.Скорины, 1989. 66 с.

3. Каморников С.Ф., Монахов В.С., Скиба А.Н. Учебно-методические указания по специализации "Алгебра и теория чисел часть 1 - Основные понятия теории групп // Гомель: ГГУ им. Ф.Скорины, 1987. 28 с.

4. Каморников С.Ф., Селькин М.В. Подгрупповые функторы в теории классов конечных групп. — Гомель: Гомельский гос. ун–т, 2001. 238 с.

5. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. — М.: Наука, 1982. 288 с.

6. Монахов В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов // Гомель: ГГУ им. Ф.Скорины, 2003. 319 с.

7. Селькин М.В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп. — Мн.: Беларуская навука, 1997. 144 с.

8. Холл Ф. Теория групп. — М.: ИЛ, 1962. 468 с.

9. Шеметков Л.А. Формации конечных групп. — М.: Наука, 1978. 272 с.

10. Шеметков Л.А. Классические факторизации групп и колец. Учебное пособие. — Гомель: Гомельский гос. ун–т, 1979. 64 с.

Оглавление

Учебное издание

МОНАХОВ Виктор Степанович

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ по спецкурсу
"Теория конечных групп и их классов"
для студентов специализации "алгебра и теория чисел"
математического факультета

Подписано в печать 28.05.03. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. п. л. 1,5. Уч.-изд. л. 1,4. Тираж 50 экз. Заказ № 51.

Отпечатано на полиграфической технике УО “ГГУ им. Ф.Скорины”
Лицензия ЛВ № 357 от 12 февраля 1999.
246019 г.Гомель, ул.Советская 104