В.С. МОНАХОВ, А.В. БУЗЛАНОВ

АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ: ПРАКТИКУМ, 1 семестр

Бинарные отношения и перестановки
Группы, кольца, поля
Целые числа и сравнения
Комплексные числа
Матрицы и определители
Системы линейных уравнений
Многочлены
Интерполяция и рациональные дроби

Минск, 2006

УДК 512.542
ББК
М 77
Р е ц е н з е н т ы: кафедра алгебры и методики преподавания математики Витебского государственного университета им. П.М. Машерова; доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей алгебры Белорусского государственного университета *В.В. Беняш-Кривец*

Монахов В.С., Бузланов А.В.

М77 Алгебра и теория чисел: практикум, 1 семестр: учебное пособие / В.С.Монахов, А.В.Бузланов – Мн.: Выш. шк., 2006. – 301 с.
ISBN 985-06-1114-6

Для студентов, аспирантов и преподавателей физико-математических специальностей вузов.

УДК 512.542

ISBN 985-06-1114-6

Предисловие

Трудности, испытываемые вчерашними школьниками в связи с переходом на новые формы и методы обучения в ВУЗе, вполне закономерны и имеют научное объяснение, см., например, [1]. Отдельные стереотипы познавательной деятельности, сформированные в школе, затрудняют процесс обучения студентов в 1 семестре и нуждаются в некоторой корректировке. В связи с этим, одной из важнейших составляющих начального обучения в ВУЗе является индивидуальная работа студентов-первокурсников. Но для ее организации, особенно в 1 семестре, необходимы соответствующие учебные пособия.

Настоящий практикум возник из опыта работы авторов с первокурсниками в Гомельском государственном университете имени Франциска Скорины, начиная с 80-х годов прошлого столетия. В 1991-92 гг. авторами были изданы лабораторные работы и тексты лекций по курсу "Алгебра и теория чисел" [3], [9], [10], охватывающие те разделы данного курса, которые студентами математического факультета традиционно изучаются в 1 семестре. В течение нескольких лет эти пособия неоднократно перерабатывались и дополнялись, после чего они были взяты за основу при составлении настоящего практикума.

Весь изучаемый материал разбит на 10 глав. Каждая глава посвящена определенной теме курса "Алгебра и теория чисел". Излагаются и иллюстрируются на примерах соответствующие математические понятия, формулируются ключевые свойства и теоремы, приводятся образцы решения типовых задач. Все это вместе составляет ядро данного раздела курса, знание которого должно обеспечить студенту-первокурснику самостоятельное выполнение индивидуального задания.

В практикуме по каждой теме предложены 15 вариантов индивидуальных заданий, что способствует активизиции самостоятельной работы всех студентов. Приведены также некоторые дополнительные задачи, позволяющие контролировать глубину понимания изученного материала и развивать творческое мышление обучающихся.

Настоящий практикум предназначен прежде всего студентам-математикам. Поскольку изучаемый материал курса "Алгебра и теория чисел" в 1 семестре является базовым для всей математики, то данное учебное пособие может быть с успехом применено при изучении соответствующих разделов курса "Высшая математика" студентами других нематематических специальностей.

Авторы выражают искреннюю благодарность своему учителю члену–корреспонденту НАН Беларуси профессору Л.А.Шеметкову за многочисленные полезные советы, способствовавшие улучшению качества излагаемого материала. Авторы также благодарны рецензентам — коллективу кафедры алгебры и методики преподавания математики Витебского государственного университета им. П.М. Машерова, возглавляемому доктором физико-математических наук, профессором Н.Т. Воробьевым, доктору физико-математических наук, профессору Белорусского государственного университета В.В. Беняшу-Кривцу за конструктивные замечания, и Д.А. Ходановичу — за помощь в подготовке рукописи книги к изданию.

Авторы

1. БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ И ПЕРЕСТАНОВКИ

1.1. Бинарные отношения

Множество удобно задавать, используя запись $X = \{\alpha \mid \beta\}$. Эта запись означает, что множество X состоит из всех элементов α, для которых выполняется свойство β. Напомним стандартные обозначения некоторыхчисловых множеств:

$\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел;

$\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел;

$\mathbb{Q}$ — множество всех рациональных чисел;

$\mathbb{R}$ — множество всех действительных чисел.

Пусть X и Y — произвольные множества. Будем рассматривать *упорядоченные пары* (x, y) элементов $x \in X$, $y \in Y$. Две пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2), где $x_1, x_2 \in X$, $y_1, y_2 \in Y$, считаются равными, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Множество всех упорядоченных пар (x, y) называется *декартовым (прямым) произведением* множеств X и Y и обозначается через $X \times Y$. Таким образом,

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\}.$$

При $X = Y$ говорят о декартовом квадрате множества X и пишут X^2 вместо $X \times X$.

Подмножество F декартового произведения $X \times Y$ называется *бинарным отношением* между X и Y. Совокупность всех $x \in X$, для которых существует такой элемент $y \in Y$, что $(x, y) \in F$, называется *областью определения* бинарного отношения F. *Областью значений* бинарного отношения F называется множество всех $y \in Y$ таких, что $(x, y) \in F$ для некоторого $x \in X$.

Подмножество F декартового квадрата $X^2 = X \times X$ называют *бинарным отношением на множестве* X.

Пример 1.1. Выпишите все подмножества декартова произведения множеств $X = \{0,1\}$ и $Y = \{1,2\}$.

$\square$ Ясно, что $X \times Y = \{(0,1),(0,2),(1,1),(1,2)\}$ — декартово произведение множеств X и Y. Выпишем все его подмножества.

$F_1 = \emptyset,\ F_2 = \{(0,1)\},\ F_3 = \{(0,2)\},\ F_4 = \{(1,1)\},$
$F_5 = \{(1,2)\},\ F_6 = \{(0,1),(0,2)\},$
$F_7 = \{(0,1),(1,1)\},\ F_8 = \{(0,1),(1,2)\},$
$F_9 = \{(0,2),(1,1)\},\ F_{10} = \{(0,2),(1,2)\},$
$F_{11} = \{(1,1),(1,2)\},\ F_{12} = \{(0,1),(0,2),(1,1)\},$
$F_{13} = \{(0,1),(0,2),(1,2)\},$
$F_{14} = \{(0,2),(1,1),(1,2)\},$
$F_{15} = \{(0,1),(1,1),(1,2)\},$
$F_{16} = X \times Y = \{(0,1),(0,2),(1,1),(1,2)\}.$

Любое из шестнадцати подмножеств F_i, $i = 1,...,16$, определяет бинарное отношение между X и Y. Найдите область определения и область значения каждого отношения. $\boxtimes$

Пусть F — бинарное отношение на множестве X и x,y,z — произвольные элементы множества X. Отношение F называется

рефлексивным, если $(x,x) \in F$ для всех $x \in X$,

симметричным, если из условия $(x,y) \in F$ следует, что $(y,x) \in F$,

антисимметричным, если из условий $(x,y) \in F$ и $(y,x) \in F$ следует, что $x = y$,

транзитивным, если из условий $(x,y) \in F$ и $(y,z) \in F$ следует, что $(x,z) \in F$.

Пример 1.2. Какими свойствами обладают следующие бинарные отношения на $\mathbb{N}$:

$F_1 = \{(x,y)\ \mid\ x \text{ и } y \text{ взаимно просты }\},$
$F_2 = \{(x,y)\ \mid\ x \text{ делит } y\},$

$F_3 = \{(x,y)\ \mid\ x = y^2\}$?

$\square$ Подмножество F_1 декартового произведения $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ состоит из всех пар (x,y) натуральных чисел, у которых первое число взаимно просто со вторым. F_1 не будет рефлексивным, так как, например $(4,4) \notin F_1$. Если $(x,y) \in F_1$, то x и y взаимно просты. Поэтому y и x взаимно просты, значит $(y,x) \in F_1$ и F_1 симметрично. Бинарное отношение F_1 не будет транзитивным. Действительно, $(2,3) \in F_1$, $(3,4) \in F_1$, но $(2,4) \notin F_1$.

Ясно, что F_2 рефлексивно и транзитивно. Но F_2 не является симметричным, поскольку $(3,6) \in F_2$, а $(6,3) \notin F_2$.

Отношение F_3 не будет рефлексивным и симметричным. Так как $(2,4) \in F_3$ и $(4,16) \in F_3$, но $(2,16) \notin F_3$, то F_3 не будет и транзитивным. $\boxtimes$

Пусть F — бинарное отношение на множестве X. Вместо $(x,y) \in F$ условимся писать xFy.

Отношением эквивалентности называют бинарное отношение, которое рефлексивно, симметрично и транзитивно. Отношение эквивалентности удобно обозначать символом $\sim$. Таким образом, для отношения эквивалентности $\sim$ на множестве X выполняются следующие свойства:

$x \sim x$ для всех $x \in X$ (рефлексивность),
если $x \sim y$, то $y \sim x$ (симметричность),
если $x \sim y$ и $y \sim z$, то $x \sim z$ (транзитивность).

Пусть X — множество с отношением эквивалентности $\sim$. Подмножество $cl(a) = \{b \in X \mid b \sim a\}$ всех элементов, находящихся в бинарном отношении $\sim$ с элементом a, называют *классом эквивалентности*. Класс эквивалентности $cl(a)$ обозначают также через $\overline{a}$. Совокупность всех классов эквивалентности обозначают через $X/\sim$ и называют *фактормножеством* множества X по $\sim$. Напомним, что *непере-*

секающимися называют два множества, пересечение которых пусто.

Теорема 1.1. 1. *Множество с отношением эквивалентности является объединением попарно непересекающихся классов эквивалентности.*

2. *Пусть множество X является объединением попарно непересекающихся подмножеств X_α, где α пробегает некоторое множество индексов I. Тогда существует отношение эквивалентности на множестве X, для которого классы эквивалентности совпадают с X_α, $\alpha \in I$.*

3. *Задание отношения эквивалентности на множестве X равносильно представлению X в виде объединения попарно непересекающихся подмножеств.*

Зафиксируем натуральное число k. Введем бинарное отношение $\sim$ на $\mathbb{Z}$, считая $x \sim y$ тогда и только тогда, когда равны остатки при делении x и y на k. Отношение $\sim$ будет отношением эквивалентности. Класс эквивалентности $cl(x) = \overline{x}$ состоит из всех целых чисел, которые при делении на k имеют один и тот же остаток. Остатки могут принимать значения $0, 1, \ldots, k-1$. Поэтому фактормножество состоит из k элементов: $\mathbb{Z}/\sim = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{k-1}\}$.

Порядком на множестве называют бинарное отношение, которое рефлексивно, антисимметрично и транзитивно. Порядок удобно обозначать символом $\leq$. Если $x \leq y$ и $x \neq y$, то пишут $x < y$. Вместо $x \leq y$ пишут также $y \geq x$. Итак, для множества X с порядком $\leq$ выполняются следующие свойства:

$x \leq x$ для всех $x \in X$ (рефлексивность),

если $x \leq y$ и $y \leq x$, то $x = y$ (антисимметричность),

если $x \leq y$ и $y \leq z$, то $x \leq z$ (транзитивность).

Множество X с порядком $\leq$ называют *частично упорядоченным.* Элементы x и y называют *сравнимыми*, если либо $x \leq y$, либо $y \leq x$. Если для любой пары элементов x и y из X либо $x \leq y$, либо $y \leq x$, то X называют *линейно упорядоченным множеством* или *цепью.*

Наибольшим элементом частично упорядоченного множества X называется элемент $n \in X$ такой, что $x \leq n$ для всех $x \in X$, а *максимальным* — элемент $m \in X$ такой, что из условия $m \leq y$ для некоторого $y \in X$ следует, что $m = y$. Наибольший элемент всегда максимален, причем наибольший элемент сравним с каждым элементом из X. Максимальный элемент может не быть сравнимым с некоторыми элементами из X, в частности, максимальный элемент может не быть наибольшим. Максимальных элементов, если они существуют, может быть несколько. Наибольший элемент, если он существует, определен однозначно.

Подобным образом вводятся *наименьший* элемент и *минимальные* элементы.

Во множестве $\mathbb{Z}$ целых чисел с обычным отношением меньше или равно $\leq$ нет минимальных и максимальных элементов. В $\mathbb{N}$ с отношением $\leq$ есть минимальный элемент 1, но нет максимальных элементов.

Пусть X — произвольное множество и $\mathbf{S}(X)$ — совокупность всех подмножеств из X. Зададим бинарное отношение B на $\mathbf{S}(X)$, считая $X_1 B X_2$ тогда и только тогда, когда $X_1 \subseteq X_2$. Очевидно, это отношение B рефлексивно, антисимметрично и транзитивно. Значит, $\mathbf{S}(X)$ — частично упорядоченное множество. X будет наибольшим, а $\varnothing$ — наименьшим элементом в $\mathbf{S}(X)$. Если $x, y \in X, x \neq y$, то одноэлементные множества $\{x\}$ и $\{y\}$ принадлежат $\mathbf{S}(X)$. Кроме того, $\{x\}$ и $\{y\}$, а также $\{y\}$ и $\{x\}$, не сравнимы. Поэтому $\mathbf{S}(X)$ не будет линейно упорядоченным множеством.

Пусть X — частично упорядоченное множество и Y — подмножество множества X. Элемент $x \in X$ называется *верхней гранью* подмножества Y, если $y \leq x$ для всех $y \in Y$. Если элемент x является верхней гранью подмножества Y и $x \leq z$ для всех верхних граней z подмножества Y, то x называется *точной верхней гранью* подмножества Y.

Если в этих определениях поменять $\leq$ на $\geq$, то получим определение *нижней грани* и *точной нижней грани.*

Решеткой называют частично упорядоченное множество, в котором любое подмножество из двух элементов имеет точную нижнюю и точную верхнюю грани. Точная нижняя грань двухэлементного множества $\{x, y\}$ обозначается через $x \wedge y$, а точная верхняя грань — через $x \vee y$.

Решетка L называется *полной*, если любое подмножество $X \subseteq L$ имеет точные верхнюю и нижнюю грани. Очевидно, что любая полная решетка содержит наибольший и наименьший элементы.

Подмножество X решетки L называется *подрешеткой*, если $x \wedge y \in X$ и $x \vee y \in X$ для всех $x, y \in X$. Пустое подмножество и любое одноэлементное подмножество будут подрешетками.

Непосредственно из определения решетки вытекают следующие свойства, которые сформулируем в виде леммы.

Лемма 1.2. *Для любых элементов x, y, z решетки L выполняются следующие утверждения:*

1) $x \wedge x = x, \quad x \vee x = x$ *(идемпотентность),*

2) $x \wedge y = y \wedge x, \quad x \vee y = y \vee x$ *(коммутативность),*

3) $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z), \quad (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ *(ассоциативность),*

4) $x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) = x$ *(поглощение),*

5) $x \leq y$ *тогда и только тогда, когда* $x \wedge y = x$ *и* $x \vee y = y$ *(совместимость).*

На множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел введем бинарное отношение $\leq$, считая $a \leq b$ тогда и только тогда, когда a делит b. Множество $\mathbb{N}$ становится решеткой, в которой $a \wedge b =$НОД(a, b) — наибольший общий делитель чисел a и b, а $a \vee b =$НОК(a, b) — наименьшее общее кратное. В этой решетке наименьшим элементом будет число 1, а наибольшего элемента нет.

1.2. Отображения

Пусть даны два множества X и Y. *Отображением* множества X во множество Y называется бинарное отношение φ между X и Y, обладающее следующим свойством: для каждого $x \in X$ существует единственный $y \in Y$ такой, что $x\varphi y$.

Другими словами, отображение φ множества X во множество Y сопоставляет каждому элементу $x \in X$ единственный элемент $y \in Y$. Отображения записывают так:

$$\varphi: \ X \to Y \text{ или } X \ \xrightarrow{\varphi} Y.$$

Если при отображении $\varphi: \ X \to Y$ элемент $x \in X$ переходит в элемент $y \in Y$, то пишут

$$\varphi: \ x \mapsto y \text{ или } x \xmapsto{\varphi} y,$$

а элемент y обозначают через $\varphi(x)$ и называют *образом элемента* x при отображении φ.

Отображения называют также функциями.

Итак, чтобы задать отображение $\varphi: \ X \to Y$, надо задать два множества X и Y и правило φ, по которому каждому элементу множества X ставится в соответствие единственный элемент множества Y.

Два отображения $\varphi_1: \ X_1 \to Y_1$ и $\varphi_2: \ X_2 \to Y_2$ считаются *равными*, если $X_1 = X_2$, $Y_1 = Y_2$ и $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ для всех $x \in X_1$. Другими словами, два отображения равны, если они действуют на одних и тех же множествах, и их действие на элементах совпадает.

Пусть $\varphi: \ X \to Y$ — отображение множества X

во множество Y. Если $X_0 \subseteq X$, то $\operatorname{Im} X_0 = \{\varphi(x) \mid x \in X_0\}$ — *образ множества* X_0 при отображении φ, а $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Im} X$ — *образ отображения* φ.

Отображение $\varphi : X \to X$ называется: *преобразованием* множества X. *Тождественным* преобразованием множества X называется отображение $\varepsilon_X : X \to X$, переводящее каждый элемент $x \in X$ в себя, т.е. $\varepsilon_X(x) = x$ для всех $x \in X$.

Отображение $\varphi : X \to Y$ называется:

инъективным или *инъекцией*, если $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$ для любых $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$,

сюръективным или *сюръекцией*, если $\operatorname{Im}\varphi = Y$,

биективным или *биекцией*, если φ одновременно инъективно и сюръективно.

При инъективном отображении различные элементы множества X переходят в различные элементы множества Y. Равенство $\operatorname{Im}\varphi = Y$ означает, что при сюръективном отображении каждый элемент множества Y является образом некоторого элемента множества X. Поэтому сюръективное отображение называют отображением множества X на множество Y.

Биективное отображение называют также *взаимно однозначным* отображением множества X на множество Y. Поэтому, *если* $\varphi : X \to Y$ *— взаимно однозначное отображение множества* X *на множество* Y*, то:*

— различные элементы множества X *переходят в различные элементы множества* Y*,*

— каждый элемент множества Y *является образом некоторого элемента множества* X*.*

Отсюда легко получить, что *при взаимно однозначном отображении каждый элемент множества* Y *является образом единственного элемента множества* X*.*

Зафиксируем натуральное число k. Зададим отображения $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, полагая $\varphi(x) = k$ и

$$\psi(x) = \begin{cases} k - x, & \text{если } x < k, \\ k + x, & \text{если } x \geq k. \end{cases}$$

для каждого $x \in \mathbb{N}$.

Очевидно, $\mathrm{Im}\varphi = \{k\}$, причем отображение φ не является инъективным и сюръективным. Так как

$$\psi(1) = k - 1, \psi(2) = k - 2, \ldots, \psi(k-1) = 1,$$

$$\psi(k) = 2k, \psi(k+1) = 2k + 1, \ldots,$$

то

$$\mathrm{Im}\psi = \mathbb{N} \setminus \{k, k+1, \ldots, 2k-1\}$$

и ψ не сюръективно. Но ψ инъективно.

Пусть A и B — множества. Если существует биекция множества A на множество B, то A и B называют *равномощными* множествами. Множество A называют *конечным*, если оно либо пусто, либо равномощно множеству $\{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$. В этом случае n — число элементов множества A, что записывается так: $|A| = n$. Для пустого множества $\varnothing$ полагают $|\varnothing| = 0$. Запись $|A| < \infty$ означает, что A — конечное множество.

Теорема 1.3. *Пусть* A *и* B *— конечные множества и* $|A| = |B|$*. Тогда для любого отображения* $\varphi : A \to B$ *следующие утверждения эквивалентны:*

1) φ *— инъекция,*

2) φ *— сюръекция,*

3) φ *— биекция.*

Рассмотрим понятие умножения отображений. Пусть даны два отображения: $\varphi : X \to Y$ и $\psi : U \to V$. Предположим, что $Y \subseteq U$. Так как $\varphi(x) \in Y$ и $Y \subseteq U$, то существует образ $\psi(\varphi(x))$ элемента $\varphi(x)$

при отображении ψ, причем $\psi(\varphi(x)) \in V$. Таким образом, можно определить отображение

$$\psi\varphi : x \mapsto \psi(\varphi(x))$$

множества X во множество V, которое называется *произведением отображений* φ и ψ. Итак, *произведение отображений* $\varphi : X \to Y$ и $\psi : U \to V$, где $Y \subseteq U$, — это такое отображение $\psi\varphi : X \to V$, что $(\psi\varphi)(x) = \psi(\varphi(x))$ для всех $x \in X$. Обратим внимание на то, что отображения перемножаются справа налево.

Пусть $\varphi(x) = k$ и

$$\psi(x) = \begin{cases} k - x, & \text{если } x < k, \\ k + x, & \text{если } x \geq k, \end{cases}$$

для каждого $x \in \mathbb{N}$. Тогда $\psi\varphi(x) = \psi(\varphi(x)) = \psi(k) = 2k$ для всех $x \in \mathbb{N}$, т.е. $\psi\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — отображение, которое каждый элемент $x \in \mathbb{N}$ переводит в $2k$.

Рассмотрим произведение $\varphi\psi$. Так как $\varphi\psi(x) = \varphi(\psi(x)) = k = \varphi(x)$, то $\varphi\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — отображение, которое совпадает с φ, т.е. $\varphi\psi = \varphi$. В частности, $\psi\varphi \neq \varphi\psi$ и умножение отображений некоммутативно.

Теорема 1.4. *Умножение отображений подчиняется закону ассоциативности, т.е. если* $\varphi : X \to Y$, $\chi : Y \to U$ *и* $\psi : U \to V$ *— три отображения, то* $\psi(\chi\varphi) = (\psi\chi)\varphi$.

Введем теперь понятие обратного отображения. Пусть $\varphi : X \to Y$ — отображение множества X в Y, а ε_X и ε_Y — тождественные преобразования множеств X и Y. Легко проверить, что $\varphi\varepsilon_X = \varphi$ и $\varepsilon_Y\varphi = \varphi$.

Естественный интерес представляют отображения, произведение которых является тождественным преобразованием.

Лемма 1.5. *Если* $\varphi : X \to Y$ *и* $\psi : Y \to X$ *— отображения, для которых* $\psi\varphi = \varepsilon_X$, *то* φ *инъективно, а* ψ *сюръективно.*

Отображение $\varphi : X \to Y$ называется *обратимым*, если существует такое отображение $\psi : Y \to X$, что $\psi\varphi = \varepsilon_X$, а $\varphi\psi = \varepsilon_Y$. В этом случае отображение ψ называют *обратным* к отображению φ и обозначают через φ^{-1}.

Лемма 1.6. *Обратимое отображение обладает единственным обратным отображением.*

Теорема 1.7. 1. *Отображение обратимо тогда и только тогда, когда оно биективно.*

2. *Если отображение биективно, то обратное к нему отображение также биективно.*

Заметим, что если $\varphi : X \to Y$ — биективное отображение, то обратное отображение $\varphi^{-1} : Y \to X$ действует так: $\varphi^{-1} : y \mapsto x$ тогда и только тогда, когда $\varphi : x \mapsto y$.

Теорема 1.8. *Если* $\varphi : X \to Y$, $\psi : Y \to U$ *— биективные отображения, то произведение* $\psi\varphi$ *также биективно и* $(\psi\varphi)^{-1} = \varphi^{-1}\psi^{-1}$.

Каждое из отображений

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = -x, \quad f_3(x) = \frac{1}{x}, \quad f_4(x) = -\frac{1}{x}$$

является биективным преобразованием множества $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Составим таблицу умножения этих отображений.

	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1

Произведение $f_i f_j$ ставится на пересечении строки f_i и столбца f_j. Например,

$$f_2 f_3 : x \overset{f_3}{\mapsto} \frac{1}{x} \overset{f_2}{\mapsto} -\frac{1}{x},$$

поэтому $f_2 f_3 = f_4$.

Из таблицы видно, что умножение коммутативно и f_1 является тождественным преобразованием. Так как $f_i^{-1} = f_i$, то каждое преобразование совпадает со своим обратным преобразованием.

Аффинным преобразованием прямой называется отображение

$$\varphi_{a,b} : x \mapsto ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0,$$

множества $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Совокупность всех аффинных преобразований прямой обозначается через $A_1(\mathbb{R})$. В соответствии с правилом умножения отображений аффинные преобразования прямой перемножаются так:

$$\varphi_{a,b}\varphi_{c,d} : x \mapsto cx + d \mapsto a(cx + d) + b = acx + (ad + b)$$

и $\varphi_{a,b}\varphi_{c,d} = \varphi_{ac,ad+b}$. В частности, умножение аффинных преобразований некоммутативно. Тождественным будет преобразование $\varphi_{1,0}$, а обратным для $\varphi_{a,b}$ будет $\varphi_{a^{-1},-a^{-1}b}$.

Несложно проверить, что при $a < b$, $c < d$ аффинное преобразование

$$x \mapsto \frac{d - c}{b - a}(x - a) + c$$

осуществляет биективное отображение отрезка $[a, b]$ прямой на отрезок $[c, d]$.

1.3. Перестановки

Пусть $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Взаимно однозначное отображение множества X на себя называется *перестановкой степени* n. Совокупность всех перестановок степени n обозначают через S_n. Перестановку $\tau \in S_n$ удобно изображать двустрочной таблицей, полностью указывая образы всех элементов:

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \ldots & \tau(n) \end{pmatrix},$$

или

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix},$$

где $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = X$; $\tau : 1 \mapsto a_1, \ldots, n \mapsto a_n$.

Тождественное преобразование ε_X является взаимно однозначным отображением и поэтому $\varepsilon_X \in S_n$. Очевидно, что

$$\varepsilon = \varepsilon_X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}.$$

Произведение $\delta\tau$ двух перестановок τ и δ находится как произведение отображений: $\delta\tau(k) = \delta(\tau(k))$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Перестановки

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

принадлежащие S_4, перемножаются так:

$$\delta\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Вычислим $\tau\delta$.

$$\tau\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

В частности, умножение перестановок некоммутативно.

Если n — натуральной число, то через $n!$ (читается "эн факториал") обозначается произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Кроме того, полагают $0! = 1$

Теорема 1.9. 1. *Произведение двух перестановок вновь есть перестановка, т.е. $\tau\delta \in S_n$ для всех $\tau \in S_n$ и $\delta \in S_n$.*

2. *Умножение перестановок ассоциативно, т.е. $(\chi\tau)\delta = \chi(\tau\delta)$ для всех $\chi, \tau, \delta \in S_n$.*

3. *Существует тождественная перестановка, т.е. такая перестановка $\varepsilon \in S_n$, что $\tau\varepsilon = \varepsilon\tau = \tau$ для всех $\tau \in S_n$.*

4. *Каждая перестановка обладает обратной перестановкой, т.е. для любой перестановки $\tau \in S_n$ существует такая перестановка $\tau^{-1} \in S_n$, что $\tau\tau^{-1} = \tau^{-1}\tau = \varepsilon$.*

5. $|S_n| = n!$.

Заметим, что обратную перестановку τ^{-1} получим, переставив в перестановке τ строки местами.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Перестановка

$$\tau = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{k-1} & a_k & a_{k+1} & \ldots & a_n \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_k & a_1 & a_{k+1} & \ldots & a_n \end{pmatrix}$$

называется *циклом длины* k и кратко записывается так: $\tau = (a_1 a_2 \ldots a_k)$. В этом случае

$$a_1 \overset{\tau}{\mapsto} a_2 \overset{\tau}{\mapsto} a_3 \overset{\tau}{\mapsto} \ldots \overset{\tau}{\mapsto} a_k \overset{\tau}{\mapsto} a_1,$$

остальные символы перестановка τ переводит в себя.

Циклы без общих символов называются *независимыми*.

Произвольную перестановку τ можно записать в виде произведения независимых циклов. Для этого берем произвольный символ $a_1 \in X$ и находим $\tau(a_1) = a_2$. Если $a_2 = a_1$, то получаем цикл (a_1) длины 1. Если $a_2 \neq a_1$, то берем $\tau(a_2) = a_3$. Так как τ — инъекция и $\tau(a_1) = a_2$, то $a_3 = \tau(a_2) \neq a_2$. Если $a_3 = a_1$, то имеем цикл $(a_1 a_2)$. При $a_3 \neq a_1$ находим $a_4 = \tau(a_3)$. Если $a_4 \in \{a_1, a_2, a_3\}$, то инъективность τ приводит к тому, что $a_4 = a_1$ и получаем цикл $(a_1 a_2 a_3)$. И так далее. Перебирая все символы из X, получаем запись перестановки в виде произведения независимых циклов. Очевидно, такое разложение единственно.

Поскольку независимые циклы не имеют общих символов, то они являются коммутирующими перестановками. Циклы с общими символами не коммутируют. Например, $(12)(13) = (132)$, а $(13)(12) = (123)$.

Цикл длины 2 называется *транспозицией*. Транспозиция (ij) все элементы, отличные от i и j, переводит в себя, т.е. $(ij) =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots i-1 & i & i+1 \ldots j-1 & j & j+1 \ldots n \\ 1 & 2 \ldots i-1 & j & i+1 \ldots j-1 & i & j+1 \ldots n \end{pmatrix}.$$

Теорема 1.10. 1. *Каждый цикл длины k можно записать в виде произведения $k-1$ транспозиций.*

2. *Всякую перестановку $\tau \in S_n$ можно записать в виде произведения $n-c$ транспозиций, где c — число независимых циклов перестановки τ.*

Пример 1.3. Запишите в виде произведения независимых циклов перестановку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

□ Перестановка переводит $1 \mapsto 5 \mapsto 2 \mapsto 1$, $3 \mapsto 3$, $4 \mapsto 6 \mapsto 4$, поэтому

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (152)(3)(46).$$

⊠

Пример 1.4. Запишите в виде таблицы перестановку $(135)(2)(467)$.

□ Перестановка переводит $1 \mapsto 3 \mapsto 5 \mapsto 1$, $2 \mapsto 2$, $4 \mapsto 6 \mapsto 7 \mapsto 4$, поэтому

$$(135)(2)(467) = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 3 & 2 & 5 & 6 & 1 & 7 & 4\end{pmatrix}.$$

⊠

Пример 1.5. Вычислите β^{-1}, $\beta\tau$, τ^{-2} для перестановок $\beta = (132)(45)$, $\tau = (21)(354)(143)$.

□ Чтобы получить β^{-1}, в перестановке β запишем циклы в обратном порядке: $\beta^{-1} = (54)(231)$. Действительно, $\beta\beta^{-1} = (132)(45)(54)(231) =$

$$= \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{array} = (1)(2)(3)(4)(5) = \varepsilon.$$

Аналогично, $\beta^{-1}\beta = \varepsilon$. Найдем $\beta\tau =$

$$= (132)(45)(21)(354)(143) = \begin{array}{ccccc} 1 & & 3 & 4 & \\ \downarrow & 2 & \downarrow & \downarrow & 5\\ 4 & \downarrow & 1 & 3 & \downarrow\\ \downarrow & 1 & \downarrow & \downarrow & 4\\ 3 & \downarrow & 2 & 5 & \downarrow\\ \downarrow & 3 & \downarrow & \downarrow & 5\\ 2 & & 1 & 4 & \end{array} =$$

$= (123)(4)(5)$. Теперь

$$\tau^{-2} = (\tau^{-1})^2 = ((341)(453)(12))^2 =$$

$$= (341)(453)(12)(341)(453)(12) =$$

$$= \begin{array}{ccccc} & 2 & & & \\ 1 & \downarrow & 3 & 4 & 5\\ \downarrow & 1 & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ 2 & \downarrow & 4 & 5 & 3\\ \downarrow & 3 & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ 1 & \downarrow & 1 & 3 & 4\\ \downarrow & 4 & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ 3 & \downarrow & 2 & 4 & 5\\ & 1 & & & \end{array} = (132)(4)(5).$$

Ответ: $\beta^{-1} = (54)(231), \beta\tau = (123)(4)(5), \tau^{-2} = (132)(4)(5)$. ⊠

Пример 1.6. Найдите перестановку α из равенства

$$(135)(23)\alpha = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5\end{pmatrix}.$$

□ Перестановка (135)(23) является произведением зависимых циклов. Перемножим эти циклы и представим в табличной записи:

$$(135)(23) = \begin{array}{ccccc} & 2 & & & \\ 1 & \downarrow & 3 & 4 & 5\\ \downarrow & 3 & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ 3 & \downarrow & 2 & 4 & 1\\ & 5 & & & \end{array} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix}.$$

Итак, $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix}\alpha = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5\end{pmatrix}$.

Тогда

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix}\alpha =$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5\end{pmatrix},$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. ⊠

Пример 1.7. Разложите в произведение транспозиций перестановку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 1 & 4 & 8 & 5 & 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

□ Вначале запишем перестановку в виде произведения независимых циклов, а затем каждый цикл длины больше 2 разложим в произведение транспозиций по правилу

$$(a_1 a_2 ... a_{k-1} a_k) = (a_1 a_k)(a_1 a_{k-1})...(a_1 a_2).$$

В итоге получим:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 1 & 4 & 8 & 5 & 7 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1672)(348) =$$

$$= (12)(17)(16)(38)(34).$$ ⊠

Нам понадобится функция $y = \text{sign} x$ (signum — знак), которая отображает $\mathbb{R}$ на множество $\{-1, 1\}$ следующим образом

$$x \mapsto \text{sign} x = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0, \\ 1, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

Очевидно, что $\text{sign} xy = \text{sign} x \, \text{sign} y$ при $x \neq 0 \neq y$, т.е. знак произведения двух действительных чисел, отличных от нуля, равен произведению знаков этих чисел.

Введем отображение $\text{sgn} : S_n \to \{-1, 1\}$, считая

$$\text{sgn} \tau = \prod_{\substack{i \neq k \\ \{i,k\} \subseteq X}} \text{sign} \frac{i - k}{\tau(i) - \tau(k)}, \qquad (1.1)$$

где $\tau \in S_n$, $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Поскольку τ — биекция, то $\tau(i) \neq \tau(k)$ при $i \neq k$, и знаменатель каждой дроби отличен от нуля. Произведение вычисляется по всем парам $\{i, k\} = \{k, i\}$ различных натуральных чисел, значит, каждая дробь отлична от нуля и $\text{sgn} \tau \in \{-1, 1\}$. Дробь

$$\frac{i - k}{\tau(i) - \tau(k)} = \frac{k - i}{\tau(k) - \tau(i)}$$

встречается по одному разу для каждой пары $\{i, k\}$. Поэтому можно знак произведения вычислить только по парам $\{i, k\}$, у которых $i > k$. В этом случае

$$\text{sign} \frac{i - k}{\tau(i) - \tau(k)} = \text{sign}(\tau(i) - \tau(k))$$

и формула 1.1 примет вид

$$\text{sgn} \tau = \prod_{1 \leq k < i \leq n} \text{sign}(\tau(i) - \tau(k)). \qquad (1.2)$$

Перестановку τ назовем *четной*, если $\text{sgn} \tau = 1$ и *нечетной*, если $\text{sgn} \tau = -1$.

Теорема 1.11. 1. *Тождественная перестановка ε является четной.*

2. *Транспозиция* (12) *является нечетной перестановкой.*

3. *Знак произведения перестановок равен произведению знаков сомножителей.*

Следствие. 1. *Произведение двух четных или двух нечетных перестановок есть четная перестановка.*

2. *Произведение четной и нечетной перестановок есть нечетная перестановка.*

3. *Любая перестановка имеет ту же четность, что и ей обратная.*

4. *Любая транспозиция является нечетной перестановкой.*

Теорема 1.12. *Если $\tau \in S_n$ и c — число независимых циклов, в произведение которых разлагается τ, то $sgn\tau = (-1)^{n-c}$.*

Пример 1.8. Даны перестановки

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \ \beta = (1254) \in S_6.$$

1. Вычислите $\alpha^{-1}, \beta^{-2}, \alpha\beta$.

2. Разложите $\alpha\beta$ в произведение независимых циклов.

3. Разложите α в произведение транспозиций.

4. Вычислите знак перестановки $(\alpha\beta)^2\alpha\beta^{-1}$.

□ 1. Для нахождения обратной перестановки α^{-1} надо в перестановке α строки поменять местами:

$$\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

В перестановке β перейдем к табличной записи. Так как $\beta \in S_6$, то

$$\beta = (1254) = (1254)(3)(6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\beta^{-2} = \beta^{-1}\beta^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Подробно правило умножения перестановок проиллюстрируем на примере произведения $\alpha\beta$:

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 3 & 6 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. Перестановка $\alpha\beta$ переводит $1 \to 1, 2 \to 4 \to 2, 3 \to 5 \to 3, 6 \to 6$, поэтому

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} = (1)(24)(35)(6)$$

есть разложение перестановки $\alpha\beta$ в произведение независимых циклов.

3. Чтобы записать разложение перестановки α в произведение транспозиций, запишем ее сначала в виде произведения независимых циклов, а затем каждый цикл представим как произведение транспозиций:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} = (12)(354)(6) = (12)(34)(35).$$

4. Знак перестановки τ вычисляется по формуле

$$\text{sgn}\tau = (-1)^{n-c},$$

где n — степень перестановки, c — число независимых циклов. Так как $\alpha = (12)(354)(6)$, то $\text{sgn}\alpha = (-1)^{6-3} = -1$, т.е. перестановка α нечетная. Аналогично, поскольку $\beta = (1254)(3)(6)$, то $\text{sgn}\beta = (-1)^{6-3} = -1$. Тогда

$$\text{sgn}((\alpha\beta)^2\alpha\beta^{-1}) = \text{sgn}(\alpha\beta\alpha\beta\alpha\beta^{-1}) =$$

$$= \mathrm{sgn}\alpha \cdot \mathrm{sgn}\beta \cdot \mathrm{sgn}\alpha \cdot \mathrm{sgn}\beta \cdot \mathrm{sgn}\alpha \cdot \mathrm{sgn}\beta^{-1} =$$
$$= (-1)(-1)(-1)(-1)(-1)(-1) = 1.$$

Ответ: 1. $\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$,

$$\beta^{-2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. $\alpha\beta = (1)(24)(35)(6)$.
3. $\alpha = (12)(34)(35)$.
4. $\mathrm{sgn}((\alpha\beta)^2\alpha\beta^{-1}) = 1$. ⊠

Пример 1.9. При каких i, j, k перестановка $\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 5 & k & 3 & 6 & 1 \\ i & j & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ нечетная?

□ Заметим, что в каждой строке перестановки α все цифры должны быть различными. Поэтому $k = 4$, а для i и j возможны два случая.

1. $i = 2, j = 6$. Тогда $\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 3 & 6 & 1 \\ 2 & 6 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} =$
$= (2)(56143)$ и $\mathrm{sgn}\alpha = (-1)^{6-2} = 1$.

2. $i = 6, \quad j = 2$. Тогда $\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 3 & 6 & 1 \\ 6 & 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} =$
$= (261435)$ и $\mathrm{sgn}\alpha = (-1)^{6-1} = -1$.

Ответ: $i = 6, j = 2, k = 4$. ⊠

Лемма 1.13. *Зафиксируем перестановку $\pi \in S_n$. Каждое из отображений:*

$$f : \tau \mapsto \tau^{-1};\ g : \tau \mapsto \tau\pi;\ h : \tau \mapsto \pi\tau,$$

является биекцией множества S_n. Поэтому

$$S_n = \{\tau^{-1} \mid \tau \in S_n\} = \{\tau\pi \mid \tau \in S_n\} = \{\pi\tau \mid \tau \in S_n\}.$$

Совокупность всех четных перестановок степени n обозначим через A_n.

Теорема 1.14. *Совокупность A_n всех четных перестановок степени $n \geq 2$ обладает следующими свойствами:*

1) *если τ и $\delta \in A_n$, то $\tau\delta \in A_n$,*
2) *тождественная перестановка ε четная, т.е. $\varepsilon \in A_n$,*
3) *если $\tau \in A_n$, то $\tau^{-1} \in A_n$,*
4) $|A_n| = n!/2$.

Пример 1.10. Перечислите все элементы из S_n и A_n при $n \leq 3$.

□ Очевидно, $S_1 = \{\varepsilon\}$, $A_1 = \{\varepsilon\}$, где $\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ясно также, что

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\} = \{(12), \varepsilon\},$$

а $A_2 = \{\varepsilon\}$.

Пусть $n = 3$ и $X = \{1, 2, 3\}$. Выпишем все перестановки множества X и разложим их в произведение независимых циклов

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1)(2)(3),\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1)(23),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (13)(2),\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (12)(3),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (123),\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (132).$$

Итак, $S_3 = \{\varepsilon, (12), (13), (23), (123), (132), \}$, а $A_3 = \{\varepsilon, (123), (132)\}$.

Составим таблицы умножения для S_3 и A_3. На пересечении "строки" δ и "столбца" τ ставим произведение $\delta\tau$.

S_3	ε	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
ε	ε	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
(12)	(12)	ε	(132)	(123)	(23)	(13)
(13)	(13)	(123)	ε	(132)	(12)	(23)
(23)	(23)	(132)	(123)	ε	(13)	(12)
(123)	(123)	(13)	(23)	(12)	(132)	ε
(132)	(132)	(23)	(12)	(13)	ε	(123)

A_3	ε	(123)	(132)
ε	ε	(123)	(132)
(123)	(123)	(132)	ε
(132)	(132)	ε	(123)

Аналогично можно было бы поступить и с S_4. Но $|S_4| = 24$ и при составлении таблицы умножения для S_4 пришлось бы заполнить $24 \cdot 24 = 576$ клеток. $\boxtimes$

1.4. Индивидуальные задания

1. Даны перестановки α и β, принадлежащие S_9. Вычислите $\alpha^{-1}, \alpha\beta, \beta\alpha$, $(\alpha\beta)^2$, $(\beta\alpha)^{-1}, \beta^{-2}$.

1.1. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 8 & 1 & 3 & 5 & 7 & 6 & 4 & 9 \end{pmatrix}$,

$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 4 & 2 & 1 & 8 & 5 & 3 & 9 & 6 \end{pmatrix}$.

1.2. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 2 & 9 & 1 \end{pmatrix}$,

$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 1 & 7 & 3 & 5 & 8 & 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$.

1.3. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 3 & 2 & 7 & 1 & 6 & 5 & 9 & 8 \end{pmatrix}$,

$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 4 & 2 & 3 & 7 & 1 & 6 & 5 & 8 \end{pmatrix}$.

1.4. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 1 & 4 & 6 & 8 & 2 & 9 & 3 \end{pmatrix}$,

$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 9 & 2 & 1 & 6 & 8 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

1.5. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 8 & 1 & 6 & 3 & 7 & 4 & 9 & 5 \end{pmatrix}$,

$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 & 8 & 9 & 7 & 6 \end{pmatrix}$.

1.6. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 9 & 3 & 2 & 7 & 5 & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$,

$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 6 & 1 & 8 & 4 & 2 & 9 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

1.7. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 1 & 5 & 2 & 3 & 6 & 8 & 4 & 9 \end{pmatrix}$,

$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 7 & 1 & 2 & 3 & 5 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$.

1.8. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 5 & 7 & 3 & 6 & 1 & 9 & 2 & 4 \end{pmatrix}$,

$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 8 & 2 & 5 & 1 & 7 & 6 & 9 & 3 \end{pmatrix}$.

1.9. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 2 & 8 & 1 & 3 & 7 & 4 & 9 & 5 \end{pmatrix}$,

$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 5 & 1 & 2 & 4 & 8 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

1.10. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 4 & 1 & 5 & 7 & 8 & 9 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 9 & 1 & 6 & 3 & 5 & 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

1.11. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 2 & 9 & 6 & 7 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$,

$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 3 & 6 & 5 & 4 & 1 & 2 & 9 & 8 \end{pmatrix}$.

1.12. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 7 & 5 & 8 & 3 & 2 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$,

$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 4 & 7 & 6 & 1 & 5 & 9 & 8 \end{pmatrix}$.

1.13. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 1 & 3 & 7 & 6 & 5 & 2 & 9 & 8 \end{pmatrix}$,

$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 4 & 9 & 1 & 3 & 7 & 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

1.14. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 3 & 8 & 2 & 9 & 5 & 7 & 1 & 6 \end{pmatrix}$,

$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 1 & 9 & 5 & 4 & 2 & 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$.

1.15. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 4 & 2 & 1 & 6 & 3 & 9 & 8 \end{pmatrix}$,

$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 1 & 6 & 3 & 7 & 4 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.

2. Запишите перестановки α и β из задания 1 в виде произведения независимых циклов и в виде произведения транспозиций. Найдите четность этих перестановок.

3. Даны перестановки σ и τ, принадлежащие S_8. Вычислите σ^{-1}, τ^{-1}, $\sigma\tau$, $\tau\sigma$. Определите четность перестановок $\sigma^2\tau$, $(\tau\sigma)^2\tau(\tau\sigma)^{-1}$. Запишите перестановки σ и τ в виде таблицы.

3.1. $\sigma = (143)(25)(678)$, $\tau = (214)(345)(56)(13)$.

3.2. $\sigma = (13245)(15)(2468)$, $\tau = (137)(65)(84)$.

3.3. $\sigma = (235)(147)(68)$, $\tau = (3567)(15)(364)$.

3.4. $\sigma = (31)(14)(25681)$, $\tau = (357)(68)(18)$.

3.5. $\sigma = (12356)(478)$, $\tau = (1356)(627)(145)$.

3.6. $\sigma = (32)(257)(4316)$, $\tau = (431)(2687)$.

3.7. $\sigma = (146)(245)(36)$, $\tau = (3564)(127)$.

3.8. $\sigma = (125)(438)(67)$, $\tau = (143)(3526)(125)$.

3.9. $\sigma = (26)(6371)(145)$, $\tau = (25)(437)(68)$.

3.10. $\sigma = (138)(27)(64)$, $\tau = (2584)(142)(658)$.

3.11. $\sigma = (12)(25)(5437)(13)$, $\tau = (14)(357)(62)$.

3.12. $\sigma = (156)(4382)$, $\tau = (172)(28)(7814)$.

3.13. $\sigma = (4513)(278)$, $\tau = (1354)(324)(672)$.

3.14. $\sigma = (157)(645)(213)$, $\tau = (124)(387)(65)$.

3.15. $\sigma = (263)(17)(85)$, $\tau = (145)(3467)(562)$.

4. При каких значениях i, j, k перестановка γ четная? При каких значениях i, j, k перестановка χ нечетная?

4.1. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ i & 3 & j & 1 & 6 & k \end{pmatrix}$,

$\chi = \begin{pmatrix} 2 & i & 4 & 3 & k & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 3 & j & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

4.2. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & i & 1 & j & k & 4 & 2 \end{pmatrix}$,

$\chi = \begin{pmatrix} i & 3 & 4 & 5 & j & 6 & 1 \\ 7 & 1 & k & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

4.3. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ j & k & 1 & 3 & i & 7 & 5 \end{pmatrix}$,

$\chi = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & i & k & 2 & 4 \\ j & 2 & 7 & 6 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

4.4. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ i & 7 & 5 & 3 & j & k & 4 \end{pmatrix}$,

$\chi = \begin{pmatrix} 2 & i & j & 6 & 4 & 1 \\ k & 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

4.5. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ k & i & 1 & 7 & j & 5 & 4 \end{pmatrix}$,

$\chi = \begin{pmatrix} 3 & k & 4 & i & 1 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 6 & 7 & j \end{pmatrix}$.

4.6. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & i & 4 & 3 & j & k & 1 \end{pmatrix}$,

$\chi = \begin{pmatrix} 1 & k & j & 2 & 4 & 7 & 5 \\ i & 1 & 7 & 6 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

4.7. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & i & 2 & j & 1 & 4 & k \end{pmatrix}$,

$\chi = \begin{pmatrix} 5 & i & 2 & k & 3 & 1 \\ 1 & j & 4 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

4.8. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ i & 3 & j & k & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$,

$\chi = \begin{pmatrix} 6 & 2 & k & 1 & i & 3 \\ j & 1 & 4 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

4.9. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ j & 3 & 1 & i & k & 2 & 4 \end{pmatrix}$,

$\chi = \begin{pmatrix} 5 & k & j & 1 & 4 & 3 \\ i & 1 & 5 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

4.10. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & i & j & 2 & k & 1 & 6 \end{pmatrix}$,

$\chi = \begin{pmatrix} 5 & k & 4 & i & 1 & 2 \\ 1 & j & 3 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

4.11. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ i & 2 & 1 & j & 4 & 5 & k \end{pmatrix}$,

$\chi = \begin{pmatrix} 6 & 2 & j & k & 1 & 3 & 7 \\ i & 5 & 4 & 3 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4.12. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ i & 3 & j & k & 4 & 1 \end{pmatrix}$,

$\chi = \begin{pmatrix} 4 & 2 & i & k & 1 & 7 & 6 \\ j & 1 & 4 & 5 & 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

4.13. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ i & 1 & k & 7 & 6 & j & 4 \end{pmatrix}$,

$\chi = \begin{pmatrix} 5 & i & j & 1 & 3 & 2 \\ k & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

4.14. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & i & 1 & 3 & k & j & 6 \end{pmatrix}$,

$\chi = \begin{pmatrix} 6 & i & k & 1 & 2 & 7 & 4 \\ 1 & j & 3 & 5 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

4.15. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & j & i & 1 & k & 4 & 3 \end{pmatrix}$,

$\chi = \begin{pmatrix} 4 & 3 & i & k & 1 & 5 \\ j & 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Найдите перестановку τ из равенства $\alpha\tau\beta = \alpha^{-1}$, где α, β — перестановки из задания 1.

6. Найдите перестановку γ из равенства $\sigma\tau^{-1}\gamma = \sigma^{-1}\tau$, где τ, σ — перестановки из задания 3.

1.5. Дополнительные задачи

1. Сколько существует отображений множества $A = \{a, b, c, d\}$ в себя, имеющих неподвижные точки?

2. Сколько существует частично упорядоченных множеств из $n \leq 4$ элементов?

3. Сколько существует линейно упорядоченных множеств из $n \leq 4$ элементов?

4. Какими свойствами обладает бинарное отношение $F \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, определенное следующим образом: $(a, b) \in F$ тогда и только тогда, когда $\frac{a}{a^2+1} \leq \frac{b}{b^2+1}$?

5. Приведите примеры бинарных отношений, которые из трех свойств (рефлексивность, симметричность, транзитивность) обладали бы только двумя.

6. Найдите все отношения эквивалентности на трехэлементном множестве и на четырехэлементном множестве.

7. Сколько можно составить разных шестизначных чисел из цифр 0,1,2,3,4,7,9?

8. Пусть T — множество всех простых трехзначных чисел, а S — множество всех цифр. Отображение γ_i, $i = 1, 2, 3$, каждому трехзначному числу ставит в соответствие его i-ю цифру. Будет ли γ_i инъекцией, сюръекцией и биекцией?

9. Пусть T_1 — множество всех прямоугольных треугольников, T_2 — равносторонних треугольников, а $\mathbb{R}^+$ — множество всех положительных чисел. Несовпадающие равные треугольники считаются одним и тем же элементом во множествах T_1 и T_2. Отображение $\sigma_i : T_i \to \mathbb{R}^+$, $i = 1, 2$, каждому треугольнику ставит в соответствие его площадь. Является ли отображение σ_i, $i = 1, 2$, инъекцией, сюръекцией, биекцией?

10. Пусть K_i, $i = 1, 2$, — множество всех параллелепипедов и кубов соответственно, а $\mathbb{R}^+$ — множество всех положительных чисел. Несовпадающие равные параллелепипеды и кубы считаются одними и теми же элементами во множествах K_1 и K_2. Отображение $\sigma_i : K_i \to \mathbb{R}^+$, $i = 1, 2$, каждому параллелепипеду или кубу ставит в соответствие его объем. Является ли отображение σ_i инъекцией, сюръекцией, биекцией?

11. Найдите произведения $f\varphi$, φf, f^2, φ^2 преобразований множества $\mathbb{R}$. Какие из этих преобразований обратимы? Для обратимых преобразований укажите обратные.

11.1 $f(x) = 4x$, $\varphi(x) = 5x$.

11.2. $f(x) = 3x + 1$, $\varphi(x) = 2x + 3$,

11.3. $f(x) = \frac{3x+1}{x^2+1}$, $\varphi(x) = \frac{2x+3}{x^2+2}$,

11.4 $f(x) = x^3$, $\varphi(x) = \cos x$,

11.5. $f(x) = \ln(|x| + 1)$, $\varphi(x) = x^2 + 1$.

12. Докажите, что каждую четную перестановку степени $n > 2$ можно представить в виде произведения циклов длины 3.

13. Докажите, что каждую перестановку из S_n можно представить в виде произведения транспозиций вида (12), (13), …, $(1n)$.

14. Пусть ε — тождественная перестановка, $\tau \in S_n$, $\varepsilon \in S_n$. Докажите, что $\tau^m = \varepsilon$, $m \in \mathbb{N}$, тогда и только тогда, когда m делится на длину каждого независимого цикла из разложения перестановки τ.

15. Вычислите τ^n для всех $\tau \in S_3$ и всех натуральных n.

16. Вычислите τ^n для всех $\tau \in S_4$ и всех натуральных n.

17. Вычислите τ^n для всех $\tau \in S_5$ и всех натуральных n.

18. Вычислите

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 7 & 10 & 2 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}^{100},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 9 & 7 & 1 & 10 & 8 & 2 \end{pmatrix}^{150}.$$

20. Найдите все перестановки $\tau \in S_4$, для которых $\tau\varphi = \varphi\tau$, где

20.1. $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$,

20.2. $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$,

20.3. $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

20.4. $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

20.5. $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

2. ГРУППЫ, КОЛЬЦА, ПОЛЯ

2.1. Группа

Бинарной алгебраической операцией на множестве X называют отображение декартова квадрата $X \times X$ в X. Если $\varphi: X \times X \to X$ — бинарная операция на X, то каждой упорядоченной паре (a, b) элементов из X соответствует однозначно определенный элемент $c = \varphi(a, b)$. Бинарную операцию на X обозначают одним из следующих символов: $+, \cdot, \oplus, \circ, \otimes, *$ и т.д. Если вместо φ условимся писать $\circ$, то вместо $c = \varphi(a, b)$ следует писать $c = a \circ b$.

Наиболее часто используются две формы записи операции: аддитивная и мультипликативная. При *аддитивной форме записи* операцию называют *сложением* и вместо $c = a \circ b$ пишут $c = a + b$. При *мультипликативной форме записи* операцию называют *умножением* и вместо $c = a \circ b$ пишут $c = a \cdot b$ или $c = ab$. В дальнейшем, при изложении теории, будем использовать мультипликативную форму записи.

Пусть *на множестве X определена бинарная операция* (умножение), т.е. $ab \in X$ для всех $a, b \in X$. Если $a(bc) = (ab)c$ для всех $a, b, c \in X$, то операция называется *ассоциативной*. Если $ab = ba$ для всех $a, b \in X$, то операция называется *коммутативной*. Элемент $e \in X$ называется *единичным*, если $ae = ea = a$ для всех $a \in X$. *Обратным к элементу* a называется такой элемент a^{-1}, что $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

Полугруппой называется непустое множество P с бинарной алгебраической операцией (умножением), которая удовлетворяет следующим двум требованиям: операция определена на P, т.е. $ab \in P$ для всех $a, b \in P$; операция ассоциативна, т.е. $a(bc) = (ab)c$

для любых $a, b, c \in P$.

Теорема 2.1. *В полугруппе может быть не более одного единичного элемента. Если в полугруппе имеется единичный элемент, то каждый элемент обладает не более, чем одним обратным.*

Теорема 2.2. *В полугруппе результат применения операции к нескольким элементам не зависит от способа распределения скобок.*

Теорема 2.2 позволяет использовать в полугруппах знак кратного умножения:

$$a_1a_2 = \prod_{i=1}^{2} a_i, \quad a_1a_2a_3 = \prod_{i=1}^{3} a_i, \quad \ldots, \quad a_1a_2...a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i.$$

В частности, при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$ произведение $aa\ldots a$ обозначают через a^n и называют *n-й степенью элемента a*. Следствием теоремы 2.2 являются равенства:

$$a^n a^m = a^{n+m}, \quad (a^n)^m = a^{nm}, \tag{2.1}$$

справедливые для всех натуральных n и m. В полугруппе P с единицей e для любого $a \in P$ полагают $a^0 = e$. Заметим еще, что если $ab = ba$, то $(ab)^n = a^n b^n$ для всех натуральных n, что легко проверяется индукцией по n.

Две полугруппы P_1 и P_2 называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение f полугруппы P_1 на полугруппу P_2 при котором $f(ab) = f(a)f(b)$ для любых $a, b \in P_1$.

Группой называется непустое множество G с бинарной алгебраической операцией (умножением), которая удовлетворяет следующим требованиям:

1) операция определена на G, т.е. $ab \in G$ для всех $a, b \in G$;

2) операция ассоциативна, т.е. $a(bc) = (ab)c$ для любых $a, b, c \in G$;

3) в G существует единичный элемент, т.е. такой

элемент $e \in G$, что $ae = ea = a$ для всех $a \in G$;

4) каждый элемент обладает обратным, т.е. для любого $a \in G$ существует такой элемент $a^{-1} \in G$, что $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

Более кратко, полугруппа с единицей, в которой каждый элемент обладает обратным, называется *группой*.

Группу с коммутативной операцией называют *коммутативной* или *абелевой*. Если G — конечное множество, являющееся группой, то G называют *конечной группой*, а число $|G|$ элементов в G — *порядком группы* G.

Отметим некоторые начальные свойства групп, которые сформулируем в виде лемм.

Лемма 2.3. 1. *В группе имеется единственный единичный элемент и для каждого элемента существует единственный обратный.*

2. *Если a, b — элементы группы G, то $(a^{-1})^{-1} = a$ и $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.*

Определим отрицательные целые степени элемента группы как обратные положительным степеням, т.е. положим

$$a^{-n} = (a^n)^{-1} \tag{2.2}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$.

Лемма 2.4. 1. *Если a — элемент группы G и $s \in \mathbb{Z}$, то $(a^s)^{-1} = (a^{-1})^s = a^{-s}$.*

2. *Для любых целых s, t и любого $a \in G$ справедливы равенства: $a^s a^t = a^{s+t}$, $(a^s)^t = a^{st}$.*

3. *В группе G уравнения $ax = b$ и $yc = d$ имеют единственные решения $x = a^{-1}b$ и $y = dc^{-1}$.*

Теорема 2.5. *Полугруппа P является группой тогда и только тогда, когда уравнения $ax = b$, $ya = b$ имеют решения для любых элементов $a, b \in P$.*

Теорема 2.5 позволяет ввести определение группы, эквивалентное исходному.

Группой называется непустое множество G с бинарной алгебраической операцией (умножением), удовлетворяющей следующим требованиям:

1) операция определена на G;

2) операция ассоциативна;

3) уравнения $ax = b, ya = b$ имеют решения для любых элементов $a, b \in G$.

Две группы G_1 и G_2 называются *изоморфными*, если они изоморфны как полугруппы, т.е. если существует взаимно однозначное отображение f группы G_1 на группу G_2 при котором $f(ab) = f(a)f(b)$ для любых $a, b \in G_1$.

Все приведенные определения и полученные результаты легко переносятся (с соответствующим изменением терминологии как указано далее в таблице 2.1) на множества с аддитивной формой записи операции.

Приведем примеры числовых групп. 1. Множества $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ с операцией сложения — абелевы группы. Все требования определения группы проверяются без труда.

2. Множество $\mathbb{N}$ со сложением не является группой, так как в $\mathbb{N}$ нет нулевого и противоположных элементов. Однако, $\mathbb{N}$ со сложением — коммутативная полугруппа.

3. Множество $\{-1, 1\}$ с умножением — конечная абелева группа порядка 2.

4. Ни одно из множеств $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ с умножением группу не образует. Если положим $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, то $\mathbb{R}^*$ и $\mathbb{Q}^*$ с умножением являются абелевыми группами. Множества $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и $\mathbb{N}$ с умножением — коммутативные полугруппы с единицей, но не группы.

Приведем примеры групп перестановок. 1. Пусть $X = \{1, 2, \dots, n\}$ и S_n — совокупность всех перестановок степени n, см. главу 1. Из теоремы 1.9, с. 18, следует, что множество S_n с операцией умножения образует конечную группу порядка $n!$ с единичным элементом

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Группу S_n называют *симметрической группой степени* n. При $n \geq 3$ эта группа неабелева.

2. Согласно теореме 1.14, с. 27, четные перестановки образуют конечную группу A_n порядка $n!/2$, которую называют *знакопеременной группой степени* n. При $n \geq 4$ эта группа неабелева.

Таблица 2.1.

Мультипликативная запись операции	*Аддитивная запись операции*
умножение	сложение
произведение ab, $\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 a_2 \dots a_n$	сумма $a+b$, $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$
единичный элемент e, $ae = ea = a$	нулевой элемент 0, $a + 0 = 0 + a = a$
обратный элемент a^{-1}, $aa^{-1} = a^{-1}a = e$	противоположный элемент $-a$, $a + (-a) = -a + a = 0$
ассоциативность, $(ab)c = a(bc)$	ассоциативность, $(a+b)+c = a+(b+c)$
коммутативность, $ab = ba$	коммутативность, $a+b = b+a$
степень a^n при $n > 0$, $a^n = \underbrace{a \dots a}_{n \text{ раз}}$	кратное na при $n > 0$, $na = \underbrace{a + \dots + a}_{n \text{ раз}}$
степень a^n при $n < 0$, $a^n = \underbrace{a^{-1} \dots a^{-1}}_{-n \text{ раз}}$	кратное na при $n < 0$, $na = \underbrace{(-a) + \dots + (-a)}_{-n \text{ раз}}$
$a^n = e$ при $n = 0$	$na = 0$ при $n = 0$
$a^n a^m = a^{n+m}$, $n, m \in \mathbb{Z}$	$na + ma = (n+m)a$, $n, m \in \mathbb{Z}$
$(a^n)^m = a^{nm}$, $n, m \in \mathbb{Z}$	$m(na) = (mn)a$, $n, m \in \mathbb{Z}$
$(ab)^n = a^n b^n$, $n \in \mathbb{Z}$, если $ab = ba$	$n(a+b) = na + nb$, $n \in \mathbb{Z}$, если $a + b = b + a$

Приведем примеры групп функций. 1. Четыре функции, определенные на множестве $\mathbb{R}^*$,

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = -x, \quad f_3(x) = \frac{1}{x}, \quad f_4(x) = -\frac{1}{x}$$

с операцией умножения образуют группу. Составим таблицу умножения этих функций.

Таблица 2.2.

	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1

Произведение $f_i f_j$ указывается на пересечении строки f_i и столбца f_j. Например,

$$f_2 f_3 : x \overset{f_3}{\mapsto} \frac{1}{x} \overset{f_2}{\mapsto} -\frac{1}{x},$$

поэтому $f_2 f_3 = f_4$.

Из табл. 2.2 видно, что умножение определено на множестве $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ и коммутативно. Поскольку умножение отображений ассоциативно, то выполняется второе требование определения группы. Функция f_1 является единичным элементом, а $f_i^{-1} = f_i$, т.е. каждый элемент является обратным для себя. Таким образом, множество $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ с умножением является конечной абелевой группой порядка 4.

2. Совокупность $A_1(\mathbb{R})$ всех аффинных преобразований прямой, рассмотренная в гл. 1.2, является неабелевой группой с единичным элементом $\varphi_{1,0}$ и обратным элементом $\varphi_{a^{-1},-a^{-1}b}$ для элемента $\varphi_{a,b}$.

Пример 2.1. Является ли группой множество $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ненулевых действительных чисел с операцией $a \circ b = 2ab$?

$\square$ Для любых чисел $a, b \in \mathbb{R}^*$ элемент $a \circ b = 2ab$ также принадлежит $\mathbb{R}^*$, поэтому операция $\circ$ на множестве $\mathbb{R}^*$ определена. Проверим выполнение других условий в определении группы.

Ассоциативность операции:

$$(a \circ b) \circ c = (2ab) \circ c = 2(2ab)c = 4abc,$$

$$a \circ (b \circ c) = a \circ (2bc) = 2a(2bc) = 4abc,$$

т.е. $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ и операция ассоциативна.

Ясно, что

$$a \circ b = (2ab) = 2ba = b \circ a$$

и операция коммутативна. Поэтому множество $\mathbb{R}^*$ с операцией $\circ$ является коммутативной полугруппой.

Единичный элемент n должен удовлетворять равенствам:

$$a = a \circ n = 2an, \ a = n \circ a = 2na.$$

Очевидно, этим равенствам удовлетворяет число $\frac{1}{2}$, поэтому $\frac{1}{2}$ — единичный элемент.

Обратный элемент b к элементу a должен удовлетворять равенствам:

$$\frac{1}{2} = a \circ b = 2ab, \ \frac{1}{2} = b \circ a = 2ba.$$

Очевидно этим равенствам удовлетворяет элемент $\frac{1}{4a}$, поэтому $\frac{1}{4a}$ — обратный элемент к элементу a.

Таким образом, множество $\mathbb{R}^*$ с операцией $\circ$ является абелевой группой с единичным элементом $\frac{1}{2}$ и обратным к a элементом $\frac{1}{4a}$.

Ответ: Множество $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \backslash \{0\}$ с операцией $a \circ b = 2ab$ является абелевой группой. $\boxtimes$

Непустое подмножество H группы G называется *подгруппой*, если H — группа относительно той же операции, которая определена на G. Запись $H \leq G$ означает, что H — подгруппа группы G, а $H < G$, что H — *собственная подгруппа группы* G, т.е. $H \leq G$ и $H \neq G$.

Теорема 2.6. *Непустое подмножество H группы G будет подгруппой тогда и только тогда, когда $h_1 h_2 \in H$ и $h_1^{-1} \in H$ для всех $h_1, h_2 \in H$.*

Отметим, что каждая группа G обладает *единичной подгруппой* $E = \{e\}$. Сама группа G также считается подгруппой в G. Эти подгруппы называют *тривиальными подгруппами. Нетривиальная подгруппа* группы G — это такая подгруппа H из G, которая отлична от G и E. *Собственной* называется подгруппа, отличная от группы.

Приведем примеры подгрупп. 1. Так как $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ — аддитивные группы, то $\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q} \leq \mathbb{R}$.

2. Поскольку $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$, $\{-1, 1\}$ — мультипликативные группы, то $\{-1, 1\} \leq \mathbb{Q}^* \leq \mathbb{R}^*$.

3. Так как S_n и A_n — группы с одной и той же операцией и $A_n \subseteq S_n$, то знакопеременная группа A_n является подгруппой симметрической группы S_n.

2.2. Кольцо

Непустое множество K с двумя бинарными алгебраическими операциями (сложением и умножением) называется *кольцом*, если выполняются следующие условия:

1) множество K с операцией сложения является абелевой группой;

2) умножение определено на K и ассоциативно;

3) операция сложения связана с операцией умножения законами дистрибутивности

$$(a + b)c = ac + bc, \ a(b + c) = ab + ac$$

для любых $a, b, c \in K$.

Если в кольце K умножение коммутативно, т.е. $ab = ba$ для любых $a, b \in K$, то K называется *коммутативным кольцом.* Если в K существует элемент e такой, что $xe = ex = x$ для всех $x \in K$, то e называют *единицей кольца* K, а само кольцо K — *кольцом с единицей.*

Очевидно, что относительно операций сложения и умножения чисел множества $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ являются кольцами.

Делителями нуля кольца K называются такие ненулевые элементы $a, b \in K$, что $ab = 0$. Коммутативное кольцо с единицей, не содержащее делителей нуля называется *целостным кольцом* или *областью целостности.* Кольцо $\mathbb{Z}$ целых чисел является целостным кольцом.

Элемент a кольца K с единицей e называется *обратимым*, или *делителем единицы*, если существует элемент $b \in K$, для которого $ab = e$.

Непустое подмножество L кольца K называется *подкольцом*, если L само является кольцом относительно операций сложения и умножения, определенных в K.

Теорема 2.7. *Непустое подмножество L кольца K является его подкольцом тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) $a + b \in L$ *для любых* $a, b \in L$*;*

2) $-a \in L$ *для любого* $a \in L$*;*

3) $ab \in L$ *для любых* $a, b \in L$*.*

Отметим, что условия 1) и 2) могут быть заменены одним условием: $a - b \in L$ для всех $a, b \in L$.

Всякое кольцо содержит нулевое подкольцо, т.е. подкольцо, состоящее из одного нулевого элемента 0. Само кольцо является своим подкольцом.

Два кольца K_1 и K_2 называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение f кольца K_1 на кольцо K_2, при котором для любых $a, b \in K_1$ выполняются равенства:

1) $f(a + b) = f(a) + f(b)$,

2) $f(ab) = f(a)f(b)$.

2.3. Поле

Непустое множество P с двумя бинарными алгебраическими операциями (сложением и умножением) называется *полем*, если выполняются следующие условия:

1) множество P с операцией сложения является абелевой группой,

2) множество всех ненулевых элементов $P^* = P \setminus \{0\}$ с операцией умножения также является абелевой группой,

3) операция сложения связана с операцией умножения законом дистрибутивности: $a(b + c) = ab + ac$ для любых $a, b, c \in P$.

Другими словами, *полем* называется коммутативное кольцо с единицей, в котором каждый ненулевой элемент обратим. Нулевой и единичный элементы поля принято обозначать через 0 и 1 соответственно.

Поскольку множество $P^* = P \setminus \{0\}$ всех ненулевых элементов поля с операцией умножения является абелевой группой, то любое поле P содержит не менее двух элементов, оно всегда содержит элементы 0 и 1, причем в любом поле $0 \neq 1$. Поле не может содержать делителей нуля, поэтому каждое поле является областью целостности.

Пусть P — некоторое поле, 0, 1 — нулевой и единичный элементы поля P. При натуральном n запись $n1$ означает сумму

$$\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n \text{ раз}}.$$

Возможны две ситуации.

Для любого натурального n всегда $n1 \neq 0$. В этом случае говорят, что поле P имеет *характеристику нуль.*

Для некоторого натурального n выполняется равенство $n1 = 0$. Наименьшее n с этим свойством называют *характеристикой поля P.*

Через $char P$ обозначают характеристику поля P.

Лемма 2.8. 1. *Если $char P = 0$, то $na \neq 0$ для любых $a \in P^*$, $n \in N$.*

2. *Если $char P = p \neq 0$, то p — простое число, и*

$pa = 0$ *для всех* $a \in P$.

Непустое подмножество A поля P называется *подполем*, если A само является полем относительно операций сложения и умножения, определенных в P.

Очевидно, что $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ — бесконечные поля характеристики нуль, причем $\mathbb{Q}$ — подполе поля $\mathbb{R}$.

Два поля P_1 и P_2 называются *изоморфными*, если существует такое взаимно однозначное отображение f поля P_1 на поле P_2 при котором для любых $a, b \in P_1$ выполняются равенства:

$$f(a+b) = f(a) + f(b), \;\; f(ab) = f(a)f(b).$$

Изоморфизм поля P на поле P называется *автоморфизмом*.

Пример 2.2. Будет ли множество

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

с обычными операциями сложения и умножения действительных чисел кольцом, полем?

□ Покажем прежде всего, что на множестве $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ сложение и умножение определено.

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}),$$

$$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2}) = (ac+2bd) + (ad+bc)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

для любых чисел $(a + b\sqrt{2}), (c + d\sqrt{2}) \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Проверим выполнение условий определения кольца и поля. Ассоциативность сложения во множестве $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ следует из ассоциативности сложения во множестве $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.

Нулевым элементом во множестве $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ будет число $0 + 0\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Элементом, противоположным элементу $a + b\sqrt{2}$, во множестве $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ будет элемент $-a - b\sqrt{2}$.

Коммутативность сложения во множестве $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ следует из коммутативности сложения во множестве $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.

Ассоциативность умножения во множестве $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ следует из ассоциативности умножения во множестве $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.

Коммутативность умножения и выполнение законов дистрибутивности также следуют из выполнения соответствующих свойств во множестве $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.

Тем самым доказано, что множество $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ является кольцом.

Единичным элементом во множестве $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ является число $1 + 0\sqrt{2}$ поскольку

$$(a + b\sqrt{2})(1 + 0\sqrt{2}) = a + b\sqrt{2}$$

для любого элемента $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Пусть $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})^*$. Это означает, что $a^2 + b^2 \neq 0$, т.е. a и b одновременно не равны нулю. Пусть $x + y\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ и является элементом, обратным для элемента $a + b\sqrt{2}$. Тогда

$$(a + b\sqrt{2})(x + y\sqrt{2}) = 1 + 0\sqrt{2},$$

$$(a + b\sqrt{2})(x + y\sqrt{2}) = 1,$$

откуда

$$x+y\sqrt{2} = \frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2})} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} =$$

$$= \frac{a}{a^2 - 2b^2} + \frac{b}{2b^2 - a^2}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}),$$

так как

$$\frac{a}{a^2 - 2b^2}, \;\; \frac{b}{2b^2 - a^2} \in \mathbb{Q}, \;\; a^2 - 2b^2 \neq 0.$$

Таким образом, каждый ненулевой элемент $a + b\sqrt{2}$ имеет в $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ обратный элемент $\frac{a}{a^2-2b^2} + \frac{b}{2b^2-a^2}\sqrt{2}$.

Ответ: Множество $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ является полем. ⊠

2.4. Индивидуальные задания

1. Будет ли множество A с операцией $*$ полугруппой? Существует ли здесь единичный элемент?

1.1. $A=\mathbb{N}$, $a*b=2(a+b)$, $\forall a,b\in\mathbb{N}$.
1.2. $A=\mathbb{Z}$, $a*b=a-b+1$, $\forall a,b\in\mathbb{Z}$.
1.3. $A=\mathbb{Q}$, $a*b=2a+b$, $\forall a,b\in\mathbb{Q}$.
1.4. $A=\mathbb{R}$, $a*b=4ab$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$.
1.5. $A=\mathbb{N}$, $a*b=a^b$, $\forall a,b\in\mathbb{N}$.
1.6. $A=\mathbb{Z}$, $a*b=a+b-2$, $\forall a,b\in\mathbb{Z}$.
1.7. $A=\mathbb{Q}$, $a*b=3(a+b)$, $\forall a,b\in\mathbb{Q}$.
1.8. $A=\mathbb{R}$, $a*b=\frac{a+b}{3}$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$.
1.9. $A=\mathbb{N}$, $a*b=\sqrt{ab}$, $\forall a,b\in\mathbb{N}$.
1.10. $A=\mathbb{Z}$, $a*b=-(a+b)$, $\forall a,b\in\mathbb{Z}$.
1.11. $A=\mathbb{Q}$, $a*b=(a+b)^2$, $\forall a,b\in\mathbb{Q}$.
1.12. $A=\mathbb{R}$, $a*b=-2ab$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$.
1.13. $A=\mathbb{N}$, $a*b=a^2+b^2$, $\forall a,b\in\mathbb{N}$.
1.14. $A=\mathbb{Z}$, $a*b=a+b^2$, $\forall a,b\in\mathbb{Z}$.
1.15. $A=\mathbb{Q}$, $a*b=\frac{ab}{2}$, $\forall a,b\in\mathbb{Q}$.

2. Будет ли множество M с указанной операцией $*$ группой? Операция $*$ коммутативна или нет?

2.1. $M=\mathbb{Q}^*$, $a*b=5ab$, $\forall a,b\in M$.
2.2. $M=\{-1;1\}$, $a*b=ab$, $\forall a,b\in M$.
2.3. $M=\{2k\mid k\in\mathbb{Z}\}$, $a*b=a+b$, $\forall a,b\in M$.
2.4. $M=\{2k+1\mid k\in\mathbb{Z}\}$, $a*b=ab$, $\forall a,b\in M$.
2.5. $M=\{\frac{m}{2^{k-1}}\mid m\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{N}\}$,
$a*b=a+b$, $\forall a,b\in M$.
2.6. $M=\{\frac{m}{2^{k-1}}\mid m\in\mathbb{Z}^*,k\in\mathbb{N}\}$,
$a*b=ab$, $\forall a,b\in M$.
2.7. $M=\{c+d\sqrt{3}\mid c,d\in\mathbb{Z}\}$,
$a*b=a+b$, $\forall a,b\in M$.
2.8. $M=\mathbb{Q}^*$, $a*b=3ab$, $\forall a,b\in M$.
2.9. $M=\{c+d\sqrt{3}\mid c\in\mathbb{Q}^*,d\in\mathbb{Q}\}$,
$a*b=ab$, $\forall a,b\in M$.
2.10. $M=\mathbb{Z}^2=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$,
$(a,b)*(c,d)=(a+c,b+d)$, $\forall (a,b),(c,d)\in M$.
2.11. $M=\{(a,b)\mid a\in\mathbb{R}^*,b\in\mathbb{R}\}$,
$(a,b)*(c,d)=(ac,bd)$, $\forall (a,b),(c,d)\in M$.
2.12. $M=\mathbb{Q}^*$, $a*b=-2ab$, $\forall a,b\in M$.
2.13. $M=\{3k\mid k\in\mathbb{Z}\}$, $a*b=a+b$, $\forall a,b\in M$.
2.14. $M=\{c-d\sqrt{2}\mid c,d\in\mathbb{Z}\}$,
$a*b=a+b$, $\forall a,b\in M$.
2.15. $M=\{c-d\sqrt{2}\mid c\in\mathbb{Q}^*,d\in\mathbb{Q}\}$,
$a*b=ab$, $\forall a,b\in M$.

3. Является ли следующее множество аддитивной или мультипликативной группой?

3.1. $M=\{\frac{a}{2^{k-1}}\mid a\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{N}\}$.
3.2. $M=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$.
3.3. $M=\{a+b\sqrt{3}\mid a\in\mathbb{Q}^*,b\in\mathbb{Q}\}$.
3.4. $M=\{\frac{a}{3^{k-1}}\mid a\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{N}\}$.
3.5. $M=\{2k-1\mid k\in\mathbb{Z}\}$.
3.6. $M=\{2k\mid k\in\mathbb{Z}\}$.
3.7. $M=\{\frac{a}{2^{k-1}}\mid a\in\mathbb{Z}^*,k\in\mathbb{N}\}$.
3.8. $M=\{a-b\sqrt{3}\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$.
3.9. $M=\{-\frac{a}{3^{k-1}}\mid a\in\mathbb{Z}^*,k\in\mathbb{N}\}$.
3.10. $M=\{-a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$.
3.11. $M=\{2k+1\mid k\in\mathbb{Z}\}$.
3.12. $M=\{3k\mid k\in\mathbb{Z}\}$.
3.13. $M=\{-a+b\sqrt{3}\mid a\in\mathbb{Q}^*,b\in\mathbb{Q}\}$.
3.14. $M=\{2k+1\mid k\in\mathbb{R}\backslash\{-\frac{1}{2}\}\}$.
3.15. $M=\{2k-1\mid k\in\mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\}\}$.

4. Будет ли множество K с указанными операциями сложения и умножения кольцом?

4.1. $K=\{a+b\sqrt{5}\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$, сложение и умножение действительных чисел.

4.2. $K=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbb{R}\}$, $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$, $(a,b)(c,d)=(ac,bd)$.

4.3. $K=\{\frac{a}{2^{k-1}}\mid a\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{N}\}$, сложение и умножение действительных чисел.

4.4. $K = \mathbb{R}$, сложение действительных чисел, умножение: $a * b = 2ab$.

4.5. $K = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, сложение и умножение действительных чисел.

4.6. $K = \{a - b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, сложение и умножение действительных чисел.

4.7. $K = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}\}, (a, b) + (c, d) = (a, d), (a, b)(c, d) = (ac, bd)$.

4.8. $K = \{\frac{a}{3^{k-1}} \mid a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$, сложение и умножение действительных чисел.

4.9. $K = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}, (a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0), (a, 0)(b, 0) = (ab, 0)$.

4.10. $K = \{-\frac{a}{4^{k-1}} \mid a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$, сложение и умножение действительных чисел.

4.11. $K = \{a - b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, сложение и умножение действительных чисел.

4.12. $K = \{a - b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, сложение и умножение действительных чисел.

4.13. $K = \{(0, b) \mid b \in \mathbb{R}\}, (0, a) + (0, b) = (0, a + b), (0, a)(0, b) = (0, ab)$.

4.14. $K = \{\frac{a}{5^{k-1}} \mid a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$, сложение и умножение действительных чисел.

4.15. $K = \{-\frac{a}{2^{k-1}} \mid a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$, сложение и умножение действительных чисел.

5. Является ли множество P с указанными операциями полем?

5.1. $P = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}, (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), (a, b)(c, d) = (ac, bd)$.

5.2. $P = \{\frac{a}{2^{k-1}} \mid a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$, сложение и умножение действительных чисел.

5.3. $P = \mathbb{R}$, сложение действительных чисел, умножение: $a * b = 2ab$.

5.4. $P = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, сложение и умножение действительных чисел.

5.5. $P = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}, (a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0), (a, 0)(b, 0) = (ab, 0)$.

5.6. $P = \{(0, b) \mid b \in \mathbb{R}\}, (0, a) + (0, b) = (0, a + b), (0, a)(0, b) = (0, ab)$.

5.7. $P = \mathbb{Q}$, сложение рациональных чисел, умножение: $a * b = -3ab$.

5.8. $P = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, сложение и умножение действительных чисел.

5.9. $P = \{\frac{a}{4^{k-1}} \mid a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$, сложение и умножение действительных чисел.

5.10. $P = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, сложение и умножение действительных чисел.

5.11. $P = \{\frac{a}{3^{k-1}} \mid a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$, сложение и умножение действительных чисел.

5.12. $P = \{\frac{a}{5^{k-1}} \mid a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$, сложение и умножение действительных чисел.

5.13. $P = \{-\frac{a}{2^{k-1}} \mid a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$, сложение и умножение действительных чисел.

5.14. $P = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}, (a, b) + (c, d) = (a, d), (a, b)(c, d) = (ac, bd)$.

5.15. $P = \{a - b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, сложение и умножение действительных чисел.

2.5. Дополнительные задачи

1. Приведите пример мультипликативной полугруппы без единичного элемента.

2. На множестве $\mathbb{N}$ введем операции $\circ$, $\diamond$, следующими равенствами:

$$x \circ y = HOD(x, y), \quad x \diamond y = HOK(x, y).$$

Здесь НОД и НОК — наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Какими свойствами обладают операции $\circ$ и $\diamond$? Являются ли $(\mathbb{N}, \circ)$, $(\mathbb{N}, \diamond)$ (изоморфными) полугруппами?

3. Пусть R — непустое множество действительных чисел. Введем на R операции, полагая

$$x \wedge y = \min\{x, y\}, \quad x \vee y = \max\{x, y\}.$$

Какими свойствами обладают операции $\wedge$ и $\vee$? Являются ли $(\mathbb{N}, \wedge)$, $(\mathbb{N}, \vee)$ (изоморфными) полугруппами? Рассмотреть отдельно каждую ситуацию, когда $R \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$.

4. Докажите, что с операцией умножения отображений группами являются следующие множества функций:

$$4.1. \quad A = \Big\{f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \frac{1}{1-x},$$

$$f_3(x) = \frac{x-1}{x}\Big\}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.$$

$$4.2 \quad B = \Big\{f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \frac{x-1}{x+1},$$

$$f_3(x) = -\frac{1}{x}, \quad f_4(x) = -\frac{x+1}{x-1}\Big\}, \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 0, 1\}.$$

$$4.3. \quad C = \Big\{x, \quad 1-x, \quad \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{1-x},$$

$$-\frac{x}{1-x}, -\frac{1-x}{x}\Big\}, \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}.$$

5. Будет ли подгруппой в группе аффинных преобразований прямой множество функций вида $f(x) = x + a$?

6. Множество A состоит из четырех команд: смирно, налево, направо, кругом. Операция умножения этих команд — их последовательное выполнение. Например, результат выполнения команд "смирно" и "налево" совпадает с командой "налево". Будет ли

множество A с этой операцией (абелевой) группой? Что будет единичным элементом и обратными?

7. Пусть $g^2 = e$ для всех элементов g группы G. Здесь e — единичный элемент. Докажите, что группа G абелева.

8. Докажите, что четыре перестановки ε, (12)(34), (13)(24), (14)(23) образуют абелеву подгруппу в группе S_4. Будет ли эта подгруппа изоморфна группе из примера 6?

9. Докажите, что четыре перестановки ε, (1234), (13)(24), (1432) образуют абелеву подгруппу в группе S_4. Будет ли эта подгруппа изоморфна группе из примера 6?

10. Будет ли подгруппой в группе S_4 множество $\{\varepsilon, (13), (24), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1234), (1432)\}$?

11. Приведите пример кольца, которое не является полем.

12. Постройте поле из n элементов, $n \leq 5$. Каковы характеристики этих полей?

13. Пусть $P(X)$ — множество всех подмножеств заданного множества X. Определим операции следующим образом:

$$A + B = (A \cup B) \backslash (A \cap B), \; AB = A \cap B, \; \forall A, B \in P(X).$$

Будет ли множество $P(X)$ кольцом, полем?

14. Зафиксируем два действительных числа u и v. На множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ зададим сложение и умножение равенствами

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2),$$

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2 + u b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1 + v b_1 b_2).$$

Будет ли множество $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ с этими операциями кольцом, полем?

15. Будет ли кольцом, полем множество тех рациональных чисел, знаменатель которых — нечетное число?

16. Может ли в кольце некоторое подкольцо быть полем?

17. Может ли в поле некоторое подмножество быть кольцом, но не полем?

18. Изоморфны ли поля $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$?

19. Проверьте, что

$$\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

с операциями сложения и умножения действительных чисел является полем. Докажите, что поле $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ и поле $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, рассмотренное в примере 2.2, неизоморфны.

20. Докажите, что аддитивные группы полей $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ и $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ изоморфны.

3. ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

3.1. Делимость целых чисел

Говорят, что целое число b *делит* целое число a, если существует целое число q такое, что $a = bq$. В этом случае говорят также, что *a делится на b*. Число b называют *делителем* числа a, число a — *кратным* числу b, число q — *частным*. Запись $b|a$ означает, что b делит a, а запись $a \vdots b$ — число a делится на b.

Пусть $b = 0$. Если $a \neq 0$, то не существует такого целого числа q, что $a = bq$, поэтому ни одно целое число $a \neq 0$ не делится на нуль. С другой стороны, при $a = 0$ для любого $q \in \mathbb{Z}$ имеем $0q = 0$, т.е. частное в этом случае не определено однозначно.

Лемма 3.1. *Для любых целых чисел a, b и c справедливы следующие утверждения:*

1) $a|a$,

2) *если* $a|b$, $b|c$, *то* $a|c$,

3) *если* $a|b$, *то* $\pm a| \pm b$,

4) *если* $a|b$ *и* $a|c$, *то* $a|(bu + cv)$, *для любых целых чисел* u *и* v,

5) *если* $a|b$, *то* $a|bc$,

6) *любое целое число делит нуль,*

7) *единица* 1 *делит любое целое число,*

8) *если* $a|b$ *и* $b \neq 0$, *то* $|a| \leq |b|$,

9) *если* $ab = 1$, *то либо* $a = b = 1$, *либо* $a = b = -1$.

Разделить целое число a на целое число $b \neq 0$ с остатком это значит найти два таких целых числа q и r, чтобы выполнялись следующие условия:

$$a = bq + r, \; 0 \leq r < |b|.$$

Число q называется *неполным частным*, а r — *остатком* от деления a на b. Очевидно, $r = 0$ тогда и только тогда, когда $b|a$.

Теорема 3.2 (о делении с остатком). *Для любого целого числа a и любого целого числа $b \neq 0$ существуют и единственны такие числа q и r, что $a = bq + r$, где $0 \leq r < |b|$.*

Пример 3.1. Разделить ± 257 на ± 23.

☐ Так как $253 = 23 \cdot 11 < 257 < 23 \cdot 12 = 276$, то $257 = 23 \cdot 11 + 4$. Здесь 11 — неполное частное, 4 — остаток.

Разделим -257 на 23. Для этого найдем целое q такое, что $23q \leq -257 < 23(q+1)$. Так как $23 \cdot (-12) = -276 \leq -257 < 23(-11)$, то $-257 = 23(-12) + 19$.

Делим на -23. Берем $257 = 23 \cdot 11 + 4$ и записываем в виде $257 = (-23) \cdot (-11) + 4$. Для деления -257 на -23 берем $-257 = 23 \cdot (-12) + 19$ и записываем в виде $-257 = (-23) \cdot 12 + 19$.

Ответ: $257 = 23 \cdot 11 + 4$, $257 = (-23) \cdot (-11) + 4$, $-257 = 23 \cdot (-12) + 19$, $-257 = (-23) \cdot 12 + 19$. ⊠

Пример 3.2. Докажите, что для любого натурального числа n целое число $a = -n^3 - 17n + 12$ делится на 6.

☐ Воспользуемся методом математической индукции. При $n = 1$ число $a = -6$ делится на 6 и утверждение верно. Предположим, что утверждение верно для любого натурального числа $n \leq k$. Докажем справедливость утверждения при $n = k+1$. Число $a = -(k+1)^3 - 17(k+1) + 12 = -(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - 17k - 17 + 12 = (-k^3 - 17k + 12) - 3k^2 - 3k - 1 - 17 = (-k^3 - 17k + 12) - 3k(k+1) - 18$. По предположению индукции $(-k^3 - 17k + 12)$ делится на 6. Одно из двух последовательных натуральных чисел $k, k+1$ четно, и поэтому слагаемое $3k(k+1)$ делится на 6. Так как каждое слагаемое в выражении $(-k^3 - 17k + 12) - 3k(k+1) - 18$ делится на 6, то и вся сумма, которая является числом a, делится

на 6. Согласно принципу математической индукции число $a = -n^3 - 17n + 12$ делится на 6 для любого натурального числа n. ⊠

3.2. Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида

Всякое целое число, которое делит целые числа a и b, называется их *общим делителем*. Наибольшее число среди всех общих делителей чисел a и b называется *наибольшим общим делителем* целых чисел a и b и обозначается через НОД(a, b) или (a, b).

Любое целое число, отличное от нуля, является делителем 0. Поэтому общие делители для пары $0, 0$ исчерпывают все множество $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ целых чисел без нуля. Наибольшего числа во множестве $\mathbb{Z}^*$ нет.

Если $a \neq 0$, то для любого целого числа b совокупность общих делителей чисел a и b будет подмножеством множества всех делителей числа a. По п. 8 леммы 3.1 множество всех делителей числа a конечно, в нем можно выбрать наибольшее число и это число единственно. Поэтому, наибольший общий делитель любых двух целых чисел a и b, одно из которых отлично от нуля, существует и единственен. Ясно, что НОД является натуральным числом.

Лемма 3.3. *Пусть a и b — целые числа, одно из которых отлично от нуля. Тогда:*

1) *НОД$(a, b) =$ НОД$(\pm a, \pm b) =$ НОД$(|a|, |b|)$,*

2) *если $a|b$, то НОД$(a, b) = |a|$,*

3) *если d — натуральное число, являющееся общим делителем a и b, и каждый общий делитель a и b делит d, то $d =$ НОД(a, b).*

Теорема 3.4. *Пусть a и b — целые числа, одно из которых отлично от нуля. Тогда:*

1) *существуют целые числа* u *и* v *такие, что* НОД$(a,b) = au + bv$,

2) *если* $d =$ НОД(a,b) *и* c *— общий делитель чисел* a *и* b, *то* $c|d$.

Теорема 3.4 позволяют дать следующее определение НОД, эквивалентное начальному. *Наибольшим общим делителем* целых чисел a и b, одно из которых отлично от нуля, называется натуральное число d, обладающее двумя свойствами: d делит a и d делит b, если целое число c делит a и делит b, то c делит d.

Лемма 3.5. *Если* $a = bq + r$, *где* a, b *и* r *отличны от нуля, то* НОД$(a,b) =$ НОД(b,r).

Для нахождения НОД(a,b) используется алгоритм Евклида, который основан на многократном применении теоремы о делении с остатком. Пусть $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0 \neq b$. Если $b|a$, то НОД$(a,b) = |b|$. Пусть b не делит a. Тогда можно написать цепочку равенств

$$\begin{cases} a = bq_1 + r_1, \quad 0 \le r_1 < |b|, \\ b = r_1 q_2 + r_2, \quad 0 \le r_2 < r_1, \\ r_1 = r_2 q_3 + r_3, \quad 0 \le r_3 < r_2, \\ \ldots \qquad\qquad \ldots \\ r_{n-3} = r_{n-2} q_{n-1} + r_{n-1}, \ 0 \le r_{n-1} < r_{n-2}, \\ r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n, \quad 0 \le r_n < r_{n-1}, \\ r_{n-1} = r_n q_{n+1}. \end{cases} \tag{3.1}$$

Каждое из равенств (3.1) основано на теореме о делении с остатком. Поскольку остатки

$$|b| > r_1 > r_2 > \ldots > r_{n-1} > r_n \ge 0$$

строго убывают и неотрицательны, то через конечное число шагов должен появится остаток, равный нулю, т.е. на каком-то этапе деление произойдет без остатка. В равенствах (3.1) деление без остатка записано

в последней строке.

Алгоритм Евклида для ненулевых чисел a и b состоит в нахождении равенств (3.1) для этих чисел.

Теорема 3.6. *Пусть* a *и* b *— целые числа, отличные от нуля, и* b *не делит* a. *Тогда* НОД(a,b) *равен последнему отличному от нуля остатку в алгоритме Евклида для чисел* a *и* b.

Пример 3.3. Вычислите НОД$(96, 165)$ и НОД$(2585, 7975)$. Выразите НОД через исходные числа.

☐ Составим алгоритм Евклида для чисел 165 и 96, последовательно выполняя деление с остатком:

$$165 = 96 \cdot 1 + 69,$$
$$96 = 69 \cdot 1 + 27,$$
$$69 = 27 \cdot 2 + 15,$$
$$27 = 15 \cdot 1 + 12,$$
$$15 = 12 \cdot 1 + 3,$$
$$12 = 3 \cdot 4.$$

Последний, отличный от нуля остаток в алгоритме Евклида, является наибольшим общим делителем чисел 165 и 96, т.е. НОД$(96, 165) = 3$.

Чтобы выразить НОД$(96, 165)$ через исходные числа 96 и 165, будем двигаться в алгоритме Евклида снизу вверх, последовательно выражая остатки: НОД$(96, 165) = 3 = 15 - 12 = 15 - (27 - 15) = 2 \cdot 15 - 27 = 2(69 - 27 \cdot 2) - 27 = 2 \cdot 69 - 5 \cdot 27 = 2 \cdot 69 - 5(96 - 69) = 7 \cdot 69 - 5 \cdot 96 = 7(165 - 96) - 5 \cdot 96 = 7 \cdot 165 - 12 \cdot 96$. Поэтому $3 = 96 \cdot (-12) + 7 \cdot 165$.

Производя деление для чисел 2585 и 7975 получаем равенства:

$7975 = 2585 \cdot 3 + 220,$
$2585 = 220 \cdot 11 + 165,$
$220 = 165 \cdot 1 + 55,$

$156 = \quad 55 \cdot 3.$

Последний отличный от нуля остаток равен 55, это и есть наибольший общий делитель чисел 2585 и 7975. Так как $55 = 220 - 165 = 220 - (2585 - 220 \cdot 11) = 220 \cdot 12 - 2585 = (7975 - 2585 \cdot 3)12 - 2585 = 2585 \cdot (-37) + 7975 \cdot 12$, то $55 = 2585 \cdot (-37) + 7975 \cdot 12$.

Ответ: НОД$(96, 165) = 3 = 96 \cdot (-12) + 7 \cdot 165$.

НОД$(2585, 7975) = 55 = 2585 \cdot (-37) + 7975 \cdot 12$. ⊠

Два ненулевых целых числа называются *взаимно простыми*, если их наибольший общий делитель равен 1.

Теорема 3.7. *Целые числа a и b, отличные от нуля, взаимно просты тогда и только тогда, когда существуют такие целые числа u и v, что $1 = au + bv$.*

Лемма 3.8. *Пусть a, b и c – целые числа. Тогда:*

1) *если НОД$(a, b) = 1$ и НОД$(a, c) = 1$, то НОД$(a, bc) = 1$,*

2) *если $a|bc$, причем НОД$(a, b) = 1$, то $a|c$,*

3) *если $a|c$, $b|c$ и НОД$(a, b) = 1$, то $ab|c$,*

4) *если НОД$(a, b) = c$, то НОД$(a/c, b/c) = 1$.*

Если число c делится на числа a и b, то c называют *общим кратным* a, b. Наименьшее среди натуральных общих кратных a, b называют *наименьшим общим кратным* чисел a и b и обозначают через НОК(a, b) или через $[a, b]$.

Теорема 3.9. *Пусть a и b — целые числа, отличные от нуля. Тогда:*

1) *НОК(a, b) существует и единственно,*

2) *НОК(a, b) делит любое общее кратное a и b,*

3) *$|ab| =$ НОК$(a, b) \cdot$ НОД(a, b).*

Лемма 3.10. *Если h — натуральное число, являющееся общим кратным чисел a и b, и каждое общее кратное a и b делится на h, то $h =$ НОК(a, b).*

Теорема 3.9 и лемма 3.10 позволяют дать следующее определение НОК, эквивалентное исходному. *Наименьшим общим кратным* целых чисел a и b называется натуральное число h, обладающее двумя свойствами: a и b делят h, если a и b делят целое число c, то h делит c.

Пример 3.4. Найдите НОК$(2585, 7975)$.

□ По теореме 3.9 имеем

$$\text{НОК}(2585, 7975) = \frac{2585 \cdot 7975}{\text{НОД}(2585, 7975)} = $$
$$= \frac{2585 \cdot 7975}{55} = 374825.$$

Ответ: НОК$(2585, 7975) = 374825$. ⊠

Пример 3.5. Найдите натуральные числа a и b, если НОД$(a, b) = 24$, а НОК$(a, b) = 2496$.

□ Пусть $a = 24m, \quad b = 24n$. Так как НОД$(a, b) = 24$, то m и n — взаимно простые натуральные числа. Пусть для определенности $m < n$. Используя связь НОК и НОД натуральных чисел, имеем $24 \cdot 2496 = 24m \cdot 24n$, откуда $m \cdot n = 104 = 2^3 \cdot 13$. Поскольку m и n взаимно просты, то возможны два случая:

1) $m = 1, n = 104$. Тогда $a = 24, b = 2496$,

2) $m = 2^3, n = 13$. Тогда $a = 192, b = 312$.

Ответ: $a = 24$, $b = 2496$ или $a = 192$, $b = 312$. ⊠

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — целые числа, не все равные нулю. Всякое целое число d, которое делит каждое из чисел a_i, называется их *общим делителем*. Так как не все числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ равны нулю, то они имеют лишь конечное число общих делителей. Наибольшее среди этих общих делителей называют *наибольшим общим делителем чисел* $a_1, a_2, \ldots, a_k$ и обозначают через НОД$(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

Легко проверить, что если $d_2 =$ НОД(a_1, a_2), $d_3 =$ НОД(d_2, a_3), $\ldots$, $d_k =$ НОД(d_{k-1}, a_k), то

$НОД(a_1, a_2, \ldots, a_k) = d_k$. Таким образом, задача нахождения НОД нескольких чисел сводится к задаче нахождения НОД двух чисел.

Пусть теперь $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — целые числа, каждое из которых отлично от нуля. Если число c делится на числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$, то c называют *общим кратным* чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Наименьшее среди натуральных общих кратных называют *наименьшим общим кратным* чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ и обозначают через $НОК(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

Легко проверить, что если $c_2 = НОК(a_1, a_2)$, $c_3 = НОК(c_2, a_3)$, ..., $c_k = НОК(c_{k-1}, a_k)$, то $НОК(a_1, a_2, \ldots, a_k) = c_k$. Таким образом, задача нахождения НОК нескольких чисел сводится к задаче нахождения НОК двух чисел.

3.3. Бинарный алгоритм

Кроме алгоритма Евклида для нахождения НОД используется также бинарный алгоритм. Он основан на следующих трех очевидных свойствах НОД.

Лемма 3.11. *Для любых целых чисел a и b, отличных от нуля, справедливы следующие утверждения:*

1) $НОД(2a, 2b) = 2НОД(a, b)$,
2) $НОД(2a, 2b+1) = НОД(a, 2b+1)$,
3) $НОД(a, b) = НОД(a-b, b)$.

В соответствии с этими свойствами для нахождения $d = НОД(a, b)$ осуществляются следующие действия.

Шаг 1. Выделяют наибольшую степень 2^k двойки, на которую делятся числа a и b. Уменьшают числа a и b в 2^k раз: $a = 2^k a_1$, $b = 2^k b_1$. Одно из чисел a_1 или b_1 нечетно, пусть нечетно b_1. Теперь $d = 2^k d_1$, где $d_1 = НОД(a_1, b_1)$.

Шаг 2. Если a_1 четно, то делят его на максимально возможную степень 2, оставив b_1 без изменения. Получают $a_1 = 2^t a_2$, a_2 и b_1 нечетны и $d_1 = НОД(a_1, b_1) = НОД(a_2, b_1)$. Теперь надо найти НОД двух нечетных чисел a_2, b_1.

Шаг 3. Вычитают из большего числа меньшее. Если $a_2 > b_1$, то $НОД(a_2, b_1) = НОД(a_2 - b_1, b_1)$. Число $a_2 - b_1$ четное как разность двух нечетных чисел.

Шаг 4. Применяют к $a_2 - b_1$ действие шага 2, затем действие шага 3 и т.д..

После выполнения действий шага 2 и шага 3 НОД не меняется, а хотя бы одно из чисел пары уменьшается. Поэтому в некоторый момент оба числа станут равными друг другу и равными d_1. Искомый $НОД(a, b)$ вычисляется после этого как произведение чисел 2^k и d_1.

В приведенном бинарном алгоритме используются лишь две операции: вычитание и деление на 2. Это позволяет при "ручном" нахождении НОД избежать вычислительных ошибок, ведь необходимо только правильно вычитать и делить на 2.

Пример 3.6. Найдите $НОД(29568, 8580)$.

□ Шаг 1. Выделяем наибольшую степень двойки, на которую делятся эти числа $29568 = 2^2 \cdot 7392$, $8580 = 2^2 \cdot 2145$. Запоминаем 2^2.

Шаг 2. Число 7392 четное. Делим его на максимально возможную степень 2, оставляя второе число 2145 без изменения. $7392 = 2^5 \cdot 231$. Теперь надо искать $d = НОД(231, 2145)$.

Шаг 3. Вычитаем из большего числа 2145 меньшее 231. Имеем $2145 - 231 = 1914$, $d = НОД(231, 1914)$.

Шаг 4. Применяем к 1914 действие шага 2. Получаем $1914 = 2 \cdot 957$. Теперь $d = НОД(231, 957)$ и надо возвращаться к действиям шага 2 и шага 3, и т.д.

Все эти вычисления записываются в таблицу.

шаг 1	$29568 = 2^2 \cdot 7392$	$8580 = 2^2 \cdot 2145$
шаг 2	$7392 = 2^5 \cdot 231$	
шаг 3		$2145 - 231 = 1914$
шаг 2		$1914 = 2 \cdot 957$
шаг3		$957 - 231 = 726$
шаг 2		$726 = 2 \cdot 363$
шаг 3		$363 - 231 = 132$
шаг 2		$132 = 2^2 \cdot 33$
шаг 3	$231 - 33 = 198$	
шаг 2	$198 = 2 \cdot 99$	
шаг 3	$99 - 33 = 66$	
шаг 2	$66 = 2 \cdot 33$	
шаг 3	$33 - 33 = 0$	

Итак, НОД$(29568, 8580) = 2^2 \cdot 33 = 132$.

Вычислим НОД$(29568, 8580)$ с помощью алгоритма Евклида.

$29568 = 8580 \cdot 2 + 3828$
$8580 = 3828 \cdot 2 + 924$
$3828 = 924 \cdot 4 + 132$
$924 = 132 \cdot 7$

Ответ: НОД$(29568, 8580) = 132$. ⊠

Можно соединить алгоритм Евклида с бинарным алгоритмом следующим образом. Если $a \geq b > 0$ нечетны, то $a = bq + r$, где $0 < |r| < b$ и r четно. Поэтому, если $r \neq 0$, то r делим на максимальную степень 2, пока r не станет нечетным. Затем пару a, b заменяем парой $b, |r|$ и повторяем этот процесс.

Пример 3.7. Найдите НОД$(29568, 8580)$.

□ НОД$(29568, 8580) = 2^2 \cdot$ НОД$(7392, 2145)$.

$7392 = 2145 \cdot 4 - 1188$
$1188 = 4 \cdot 297$
$2145 = 297 \cdot 7 + 66$

$66 = 2 \cdot 33$
$297 = 33 \cdot 9$

Итак, НОД$(7392, 2145) = 33$.

Ответ: НОД$(29568, 8580) = 4 \cdot 33 = 132$. ⊠

3.4. Простые числа

Натуральное число p называется *простым числом*, если оно больше 1 и не имеет положительных делителей, отличных от p и 1. Все натуральные числа, отличные от 1 и простых чисел, называются *составными числами*. Итак, множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел разбивается на три подмножества: простые числа, составные числа, число 1. Первыми простыми числами будут числа $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots$.

Лемма 3.12. *Всякое натуральное число $n > 1$ делится хотя бы на одно простое число.*

Теорема 3.13 (Евклида). *Множество всех простых чисел бесконечно.*

Лемма 3.14. *Если n — натуральное число, а p — простое, то либо p делит n, либо p и n взаимно просты.*

Лемма 3.15. *Если произведение нескольких натуральных чисел делится на простое число p, то хотя бы один из сомножителей делится на p.*

Теорема 3.16 (основная арифметики). *Всякое целое число $a > 1$ либо простое, либо может быть представлено, и притом единственным образом с точностью до перестановки сомножителей, в виде произведения простых чисел.*

Следствие. *Всякое целое число $a \notin \{-1, 0, 1\}$ однозначно представляется в виде $a = \varepsilon p_1 \cdots p_s$, где $\varepsilon = \pm 1$ и $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_s$ — простые числа.* ⊠

В разложении целого числа a на простые сомножители некоторые из них могут повторяться. Пусть простое число p_1 встречается α_1 раз, p_2 встречается α_2 раз, $\ldots$, p_k встречается α_k раз. Все $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — различные простые числа. Тогда разложение числа a на простые множители можно записать следующим образом:

$$a = \varepsilon p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}.$$

Каноническим разложением целого числа a называется представление a в виде:

$$a = \varepsilon p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k},$$

где $\varepsilon = \pm 1$, $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ — простые числа, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — натуральные числа.

Следствие. *Для любого целого числа $a \notin \{-1, 0, 1\}$ существует каноническое разложение и оно единственно.* ⊠

Например: $7000 = 7 \cdot 1000 = 7 \cdot 2 \cdot 500 = 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 250 = 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 125 = 7 \cdot 2^3 \cdot 5 \cdot 25 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 7$.

При рассмотрении пар a и b целых чисел, отличных от нуля, удобно добавлять к их каноническим разложениям нулевые степени простых чисел с той целью, чтобы числа a и b были записаны в виде произведения одних и тех же простых чисел:

$$a = \varepsilon p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}, \quad b = \varepsilon p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_n^{\beta_n},$$

где $\varepsilon = \pm 1$, $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$ — простые числа, α_i и $\beta_i \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема 3.17. *Пусть целые числа a и b, отличные от нуля, записаны в виде:*

$$a = \varepsilon p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}, \quad b = \varepsilon p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_n^{\beta_n},$$

где $\varepsilon = \pm 1$, $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$ — простые числа, α_i и $\beta_i \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда:

$$\text{НОД}(a, b) = p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \cdots p_k^{\lambda_k}, \text{ где } \lambda_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\},$$
$$\text{НОК}(a, b) = p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2} \cdots p_k^{\mu_k}, \text{ где } \mu_i = \max\{\alpha_i, \beta_i\}.$$

Так как $3900 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 13$, $7000 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 7$, то $\text{НОД}(39000, 7000) = 2^3 \cdot 5^3$, а $\text{НОК}(39000, 7000) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13$.

Лемма 3.18. *Если натуральное число a не делится ни на одно простое число $\leq \sqrt{a}$, то число a простое.*

Эта лемма уменьшает количество проверок, которое нужно провести, чтобы убедиться, является ли число простым или составным.

Пример 3.8. Являются ли числа 181 и 197 простыми?

□ 181 и 197 не делятся на простые числа $2, 5, 7, 11, 13$. Так как других простых чисел не более 15 нет и $\sqrt{181} < \sqrt{197} < 15$, то числа 181 и 197 простые.

Ответ: являются. ⊠

Пример 3.9. Разложите 2353 на простые множители.

□ Так как $\sqrt{2353} < 50$, то надо испытать все простые числа не более 47. Числа 2, 3, 5, 7, 11 не делят 2353, а 13 делит $2353 = 13 \cdot 181$. В предыдущем примере установлено, что 181 — простое число.

Ответ: $2353 = 13 \cdot 181$. ⊠

3.5. Индивидуальные задания

1. Методом математической индукции докажите, что для любого натурального числа n целое число a делится на целое число b.

1.1. $a = n(n+1)(2n+1)$, $b = 6$.
1.2. $a = 6^{2n} - 1$, $b = 35$.
1.3. $a = n(n^2 + 5)$, $b = 6$.
1.4. $a = 4^n + 15^n - 1$, $b = 9$.
1.5. $a = n(n^3 + 2n^2 - n + 22)$, $b = 24$.
1.6. $a = 2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2}$, $b = 17$.
1.7. $a = (n+2)(n^2 + 4n + 9)$, $b = 6$.
1.8. $a = 3^{2n+1} + 40n - 67$, $b = 64$.
1.9. $a = (n-1)(n^2 + n + 12)$, $b = 6$.

1.10. $a = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$, $b = 24$.
1.11. $a = n^3 + 5n + 12$, $b = 6$.
1.12. $a = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$, $b = 9$.
1.13. $a = 6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$, $b = 11$.
1.14. $a = 3^{3n+2} + 5 \cdot 2^{3n+1}$, $b = 19$.
1.15. $a = 2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4$, $b = 25$.

2. Найдите неполное частное и остаток от деления числа a на число b.

2.1. $a = \pm 761$, $b = \pm 13$.
2.2. $a = \pm 652$, $b = \pm 21$.
2.3. $a = \pm 529$, $b = \pm 15$.
2.4. $a = \pm 632$, $b = \pm 18$.
2.5. $a = \pm 437$, $b = \pm 24$.
2.6. $a = \pm 356$, $b = \pm 17$.
2.7. $a = \pm 543$, $b = \pm 19$.
2.8. $a = \pm 458$, $b = \pm 27$.
2.9. $a = \pm 591$, $b = \pm 12$.
2.10. $a = \pm 653$, $b = \pm 14$.
2.11. $a = \pm 729$, $b = \pm 11$.
2.12. $a = \pm 478$, $b = \pm 26$.
2.13. $a = \pm 825$, $b = \pm 13$.
2.14. $a = \pm 751$, $b = \pm 22$.
2.15. $a = \pm 562$, $b = \pm 16$.

3. Известно делимое a и неполное частное b. Найдите делитель и остаток.

3.1. $a = -43251$, $b = 243$.
3.2. $a = 31564$, $b = -263$.
3.3. $a = -40201$, $b = -194$.
3.4. $a = 53262$, $b = -280$.
3.5. $a = -46707$, $b = 525$.
3.6. $a = 61796$, $b = -325$.
3.7. $a = 27829$, $b = -567$.
3.8. $a = -37654$, $b = 236$.
3.9. $a = -46524$, $b = -512$.
3.10. $a = 43264$, $b = -363$.

3.11. $a = -51067$, $b = 198$.
3.12. $a = -35266$, $b = -203$.
3.13. $a = 40053$, $b = -426$.
3.14. $a = -36248$, $b = -159$.
3.15. $a = -56728$, $b = 163$.

4. С помощью алгоритма Евклида найдите НОД(a, b) и выразите его через исходные числа. Используя связь НОД и НОК двух натуральных чисел, вычислите НОК(a, b).

4.1. $a = 5544$, $b = 7644$.
4.2. $a = 2585$, $b = 7975$.
4.3. $a = 1188$, $b = 3080$.
4.4. $a = 4704$, $b = 9100$.
4.5. $a = 1296$, $b = 6600$.
4.6. $a = 6188$, $b = 4709$.
4.7. $a = 6125$, $b = 1190$.
4.8. $a = 3069$, $b = 1881$.
4.9. $a = 4968$, $b = 6678$.
4.10. $a = 3120$, $b = 2325$.
4.11. $a = 6252$, $b = 777$.
4.12. $a = 2975$, $b = 9996$.
4.13. $a = 1368$, $b = 7056$.
4.14. $a = 1716$, $b = 1540$.
4.15. $a = 5796$, $b = 5187$.

5. Вычислите НОД(a, b) с помощью бинарного алгоритма.

5.1. $a = 46368$, $b = 41496$.
5.2. $a = 27456$, $b = 24640$.
5.3. $a = 43776$, $b = 56448$.
5.4. $a = 47600$, $b = 39984$.
5.5. $a = 50016$, $b = 49728$.
5.6. $a = 49920$, $b = 74400$.
5.7. $a = 39744$, $b = 26712$.
5.8. $a = 49000$, $b = 38080$.
5.9. $a = 49104$, $b = 60192$.

5.10. $a = 49504$, $b = 75344$.
5.11. $a = 82944$, $b = 52800$.
5.12. $a = 75264$, $b = 36400$.
5.13. $a = 76032$, $b = 49280$.
5.14. $a = 82720$, $b = 63800$.
5.15. $a = 44352$, $b = 30576$.

6. Известны НОД(a, b) и НОК(a, b). Найдите натуральные числа a и b.

6.1. НОД$(a, b) = 16$, НОК$(a, b) = 1584$.
6.2. НОД$(a, b) = 15$, НОК$(a, b) = 630$.
6.3. НОД$(a, b) = 22$, НОК$(a, b) = 3630$.
6.4. НОД$(a, b) = 19$, НОК$(a, b) = 5187$.
6.5. НОД$(a, b) = 14$, НОК$(a, b) = 2856$.
6.6. НОД$(a, b) = 15$, НОК$(a, b) = 6900$.
6.7. НОД$(a, b) = 30$, НОК$(a, b) = 15660$.
6.8. НОД$(a, b) = 27$, НОК$(a, b) = 5589$.
6.9. НОД$(a, b) = 36$, НОК$(a, b) = 6480$.
6.10. НОД$(a, b) = 12$, НОК$(a, b) = 1872$.
6.11. НОД$(a, b) = 21$, НОК$(a, b) = 756$.
6.12. НОД$(a, b) = 26$, НОК$(a, b) = 4914$.
6.13. НОД$(a, b) = 35$, НОК$(a, b) = 8925$.
6.14. НОД$(a, b) = 18$, НОК$(a, b) = 4896$.
6.15. НОД$(a, b) = 14$, НОК$(a, b) = 4410$.

7. С помощью канонических разложений найдите НОД(a, b, c) и НОК(b, c).

7.1. $a = 6188$, $b = 88$, $c = -320$.
7.2. $a = 4704$, $b = 96$, $c = -154$.
7.3. $a = 1716$, $b = -204$, $c = 56$.
7.4. $a = -3069$, $b = 112$, $c = 84$.
7.5. $a = 9100$, $b = 92$, $c = -114$.
7.6. $a = 7056$, $b = 190$, $c = -68$.
7.7. $a = -1368$, $b = 99$, $c = 150$.
7.8. $a = -1540$, $b = 105$, $c = 215$.
7.9. $a = 1296$, $b = 230$, $c = -78$.
7.10. $a = 1188$, $b = -132$, $c = -64$.

7.11. $a = -3120$, $b = 85$, $c = 100$.
7.12. $a = 4968$, $b = 104$, $c = -56$.
7.13. $a = -7644$, $b = 196$, $c = -76$.
7.14. $a = 1716$, $b = -72$, $c = 124$.
7.15. $a = 1288$, $b = -144$, $c = -66$.

3.6. Дополнительные задачи

1. Докажите, что $n^5 - n$ делится на 5 для любого целого числа n.

2. Докажите, что $(n^3 - 1)(n^3 + 1)$ делится на 7, если целое число n не делится на 7.

3. Докажите, что произведение четырех последовательных натуральных чисел в сумме с единицей является квадратом некоторого натурального числа.

4. Натуральные числа m и n таковы, что $m \geq n$, m не делится на n и имеет от деления на n тот же остаток, что и $m + n$ от деления на $m - n$. Найдите отношение $\frac{m}{n}$.

5. Найдите все значения целого числа n, при которых целым будет число $\frac{n^5+3}{n^2+1}$.

6. Пусть a и n — натуральные числа. Докажите, что натуральным будет число
$$\frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{n!}.$$

7. Вычислите НОД$(123456789, 987654321)$.

8. Какие значения может принимать НОД$(7n + 1, 8n+3)$, если $n \in \mathbb{Z}$? При каких n справедливо неравенство НОД$(7n + 1, 8n + 3) \neq 1$?

9. Пусть a, b, c — целые числа, отличные от нуля. Докажите, что:

9.1. НОД$(ac, bc) = |c|$НОД(a, b).
9.2. НОК$(ac, bc) = |c|$НОК(a, b).

10. Решите систему уравнений, в которой $x, y \in \mathbb{N}$.

$$\begin{cases} x + y = 667 \\ \text{НОК}(x, y) = 120 \cdot \text{НОД}(x, y) \end{cases}.$$

11. Разложите на простые множители число $2^{18} + 3^{18}$.

12. Докажите, что всякое простое число, большее 3, представимо в виде $6k \pm 1$.

13. Пусть n — целое число, большее 2. Докажите, что на интервале $(n, n!)$ содержится хотя бы одно простое число. Установите, что отсюда следует бесконечность множества простых чисел.

14. Докажите, что простых чисел вида $4m-1$, где m — натуральные числа, бесконечно много.

15. Докажите, что простых чисел вида $6m-1$, где m — натуральные числа, бесконечно много.

16. Докажите, что $\text{НОД}(a + b, a - b)$ равен 1 или 2, если числа a и b взаимно просты.

17. Докажите, что числа $2^{2^n} + 1$ и $2^{2^m} + 1$ взаимно простые при натуральных $n \neq m$.

18. Докажите, что $2^m - 1$ и $2^n - 1$ взаимно просты, если m и n — взаимно простые натуральные числа.

19. Докажите, что если произведение двух натуральных взаимно простых чисел a и b является квадратом некоторого натурального числа, то $a = m^2$ и $b = k^2$ для некоторых натуральных чисел m и k. Будет ли утверждение верным, если a и b не взаимно простые числа?

20. Пусть n — простое число или $n = 4$. Докажите, что $(n - 1)!$ не делится на n. Верно ли обратное утверждение: если $(n-1)!$ не делится на натуральное число n, то либо n — простое число, либо $n = 4$?

21. Докажите, что если a^2+ab+b^2 делится на $a+b$, то $a^4 + b^4$ делится на $(a + b)^2$.

22. Найдите наименьшее шестизначное число, которое делится на 3, на 7 и на 13.

23. Произведение двух целых чисел равно 600. Какое наибольшее значение может иметь НОД этих чисел.

24. Пусть a и b — взаимно простые целые числа и $ac = bd$, $c, d \in \mathbb{Z}$. Докажите, что существует целое число f такое, что $c = fb$, $d = fa$.

25. Пусть a и b — взаимно простые целые числа и $x^a = y^b$, $x, y \in \mathbb{Z}$. Докажите, что существует целое число z такое, что $x = z^b$, $y = z^a$.

26. Найдите $\text{НОД}(204, 256, 160, 58)$.

27. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — целые числа, не все равные нулю, и d — их общий натуральный делитель. Докажите, что $d = \text{НОД}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ тогда и только тогда, когда $\text{НОД}(\frac{a_1}{d}, \frac{a_2}{d}, \ldots, \frac{a_k}{d}) = 1$.

4. СРАВНЕНИЯ

4.1. Сравнения в кольце целых чисел

Пусть $a, b \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$. Если m делит $a - b$, то пишут $a \equiv b(\text{mod } m)$ и говорят: *a сравнимо* с b по модулю m. Если m не делит $a - b$, то пишут $a \not\equiv b(\text{mod } m)$.

Например, $12 \equiv 3(\text{mod } 3)$, $5 \equiv 11(\text{mod } 6)$,
$11 \equiv -4(\text{mod } 5)$, $11 \not\equiv 3(\text{mod } 7)$.

Теорема 4.1. *Пусть $a, b \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда и только тогда a и b сравнимы по модулю m, когда a и b имеют одинаковые остатки при делении на m.*

В следующей лемме приведены самые простые свойства сравнений, аналогичные свойствам равенств.

Лемма 4.2. *Пусть $a, b \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда:*

1) *$a \equiv a(mod\ m)$,*

2) *если $a \equiv b(mod\ m)$, то $b \equiv a(mod\ m)$,*

3) *если $a \equiv b(mod\ m)$, $b \equiv c(mod\ m)$, то $a \equiv c(mod\ m)$.*

Лемма 4.3. *Сравнения по одному и тому же модулю можно почленно складывать, вычитать и перемножать.*

Следствие. *Если $a \equiv b(mod\ m)$ и $n \in \mathbb{N}$, то $a^n \equiv b^n(mod\ m)$.*

Лемма 4.4. 1. *К обеим частям сравнения можно прибавлять одно и то же целое число.*

2. *Обе части сравнения можно умножать на одно и то же целое число.*

3. *Члены сравнения можно переносить из одной части сравнения в другую с противоположным знаком.*

Пример 4.1. Докажите, что $6^{1001} + 1$ и $6^{1000} - 1$ делятся на 7.

☐ Так как $6 \equiv -1(\text{mod } 7)$, то $6^{1000} \equiv 1(\text{mod } 7)$ и $6^{1001} \equiv -1(\text{mod } 7)$, т.е. 7 делит $6^{1000} - 1$ и $6^{1001} + 1$. ☒

Пример 4.2. Покажем, что число n и сумма его цифр имеют одинаковые остатки от деления на 9 и 3.

☐ Пусть число n записано цифрами $a_r, a_{r-1}, \ldots, a_1, a_0$, т.е.

$$n = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \ldots + a_{r-1} 10^{r-1} + a_r 10^r.$$

Так как $10 \equiv 1(\text{mod } t)$, где $t \in \{3, 9\}$, то $10^k \equiv 1(\text{mod } t)$ для любого целого числа $k \geq 0$. По лемме 4.2 $a_k \equiv a_k(\text{mod } t)$, а по лемме 4.4 $a_k 10^k \equiv a_k(\text{mod } t)$ для любого $k \geq 0$. Складывая сравнения $a_k 10^k \equiv a_k(\text{mod } t)$ для $k = 0, 1, \ldots, r$, получим $n \equiv a_0 + a_1 + \ldots + a_r(\text{mod } t)$. ☒

Из этого примера вытекает следующий признак делимости:

если сумма цифр числа n делится на 3 или 9, то и само число n делится на 3 или 9 соответственно.

Заметим, что делить почленно сравнения в общем случае нельзя. Например, $2 \equiv 12(\text{mod } 10)$, $2 \equiv 2(\text{mod } 10)$, но $1 \not\equiv 6(\text{mod } 10)$. Далее, может быть так, что $a \not\equiv 0(\text{mod } m)$, $b \not\equiv 0(\text{mod } m)$, но $ab \equiv 0(\text{mod } m)$. Например, $2 \not\equiv 0(\text{mod } 10)$, $5 \not\equiv 0(\text{mod } 10)$, но $2 \cdot 5 \equiv 0(\text{mod } 10)$.

Перечисленные свойства сравнений не зависели от модуля. Следующие свойства сравнения связаны с модулем.

Лемма 4.5. *Обе части сравнения и модуль можно умножать на одно и тоже натуральное число.*

Лемма 4.6. *Если $ak \equiv bk(mod\ m)$, $d =$ НОД(k, m), то $a \equiv b(mod\ m/d)$.*

При $k = d$ и $d = 1$ получаем

Следствие. 1. *Обе части сравнения и модуль можно разделить на любой их общий натуральный делитель.*

2. *Обе части сравнения можно разделить на их общий натуральный делитель, если он взаимно прост с модулем.*

Пример 4.3. Найдите остаток от деления числа $a = 29^{2929} + 6^{231}$ на 31.

$\square$ Необходимо найти число r, удовлетворяющее условиям

$$29^{2929} + 6^{231} \equiv r (\mathrm{mod}\ 31),\ 0 \le r < 31.$$

Воспользуемся свойствами сравнений. Так как $29 \equiv -2 (\mathrm{mod}\ 31)$, то $29^{2929} \equiv (-2)^{2929} (\mathrm{mod}\ 31)$. Поскольку $(-2)^5 = -32 \equiv -1 (\mathrm{mod}\ 31)$, то

$$(-2)^{2929} = ((-2)^5)^{585} \cdot (-2)^4 \equiv (-1)^{585} \cdot (-2)^4 (\mathrm{mod}\ 31).$$

Поэтому $(-2)^{2929} \equiv -16 (\mathrm{mod}\ 31)$ и $29^{2929} \equiv -16 (\mathrm{mod}\ 31)$.

Так как $6^2 = 36 \equiv 5 (\mathrm{mod}\ 31)$, то

$$6^{231} = (6^2)^{115} \cdot 6 \equiv 5^{115} \cdot 6 (\mathrm{mod}\ 31).$$

Поскольку $5^3 = 125 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 31)$, то

$$5^{115} \cdot 6 = (5^3)^{38} \cdot 5 \cdot 6 \equiv 1^{38} \cdot 30 (\mathrm{mod}\ 31).$$

Таким образом, $6^{231} \equiv 30 (\mathrm{mod}\ 31)$.

Теперь, складывая сравнения $29^{2929} \equiv -16 (\mathrm{mod}\ 31)$ и $6^{231} \equiv 30 (\mathrm{mod}\ 31)$, получим $29^{2929} + 6^{231} \equiv -16 + 30 (\mathrm{mod}\ 31)$, откуда $29^{2929} + 6^{231} \equiv 14 (\mathrm{mod}\ 31)$. Следовательно, остаток при делении числа a на 31 равен 14.

Ответ: 14. $\boxtimes$

Замечание. Последняя цифра числа a равна остатку при делении числа $|a|$ на 10. Две последние цифры числа a — это цифры остатка при делении $|a|$ на число 100.

4.2. Функция Эйлера

Функция Эйлера $\varphi(n)$ определена на множестве

$\mathbb{N}$ и представляет собой число натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n. Например, $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = 2$, $\varphi(4) = 2$, $\varphi(5) = 4$, $\varphi(6) = 2$.

Лемма 4.7. 1. *Если $n \in \mathbb{N}$ и p — простое число, то $\varphi(p^n) = p^n - p^{n-1}$. В частности, $\varphi(p) = p - 1$.*

2. *Функция Эйлера мультипликативна, т.е. если натуральные числа a и b взаимно просты, то $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.*

Теорема 4.8. *Если $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение натурального числа a, то*

$$\varphi(a) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1})(p_2^{\alpha_2} - p_2^{\alpha_2 - 1}) \dots (p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k - 1}) =$$

$$= \varphi(a) = a(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2}) \dots (1 - \frac{1}{p_k}).$$

Пример 4.4. Вычислите значение функции Эйлера для числа 113400.

$\square$ Воспользуемся утверждением о том, что если $a = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$ — каноническое разложение натурального числа a, то значение функции Эйлера

$$\varphi(a) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}) \dots (p_n^{\alpha_n} - p_n^{\alpha_n - 1}).$$

Находим каноническое разложение числа 113400: $113400 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$. Тогда $\varphi(113400) = (2^3 - 2^2)(3^4 - 3^3)(5^2 - 5)(7 - 7^0) = 4 \cdot 54 \cdot 20 \cdot 6 = 25920$.

Ответ: 25920. $\boxtimes$

Одно из приложений функции Эйлера, важное для теории сравнений, дает

Теорема 4.9 (Эйлера). *Если a и m — взаимно простые натуральные числа, то $a^{\varphi(m)} \equiv 1 (mod\ m)$.*

Теорема 4.10 (Ферма). *Если a — натуральное число, p — простое число, то $a^p \equiv a (mod\ p)$.*

4.3. Кольцо классов вычетов

Лемма 4.11. *Пусть m — натуральное число. Каждое целое число сравнимо по модулю m точно с одним из чисел множества $\{0, 1, \dots, m-1\}$, а именно с остатком от деления этого числа на m.*

Пусть m — натуральное число. Все целые числа по отношению к числу m можно разбить на m классов, если отнести к одному классу числа, дающие один и тот же остаток при делении на m. По лемме 4.11 каждое целое число попадает точно в один такой класс. Эти классы называются *классами вычетов по модулю m*. Класс вычетов по модулю m, содержащий число a, обозначим $\overline{a}$.

По теореме 4.1 класс вычетов состоит из целых чисел, сравнимых между собой по модулю m. Поэтому равенство классов $\overline{a} = \overline{b}$ равносильно сравнению $a \equiv b (\mathrm{mod}\ m)$. Так как остатки при делении целых чисел на m есть числа множества $\{0, 1, \dots, m-1\}$, то классы вычетов по модулю m удобнее записывать следующим образом: $\overline{0}$, $\overline{1}$, …, $\overline{m-1}$. Множество всех классов вычетов по модулю m принято обозначать символом $\mathbb{Z}_m$, т.е.

$$\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{m-1}\}.$$

Определим на множестве $\mathbb{Z}_m$ сложение и умножение классов вычетов следующим образом:

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b},\ \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b}. \qquad (4.1)$$

Теорема 4.12. *Множество $\mathbb{Z}_m$ классов вычетов по модулю m с операциями сложения и умножения, определяемыми равенствами 4.1 является коммутативным кольцом с нулевым элементом $\overline{0}$, единичным элементом $\overline{1}$ и противоположным элементом $-(\overline{a}) = \overline{m-a}$.*

Кольцо $\mathbb{Z}_m$ называют *кольцом классов вычетов по модулю m.*

Пример 4.5. Составьте таблицы сложения и умножения для кольца $\mathbb{Z}_4$.

□ Так как $\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$, то

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

На пересечении строки $\overline{a}$ и столбца $\overline{b}$ в таблицах стоят сумма $\overline{a} + \overline{b}$ и произведение $\overline{a}\overline{b}$ классов вычетов. ⊠

Обратим внимание на то, что $\overline{2} \cdot \overline{2} = \overline{0}$, т.е. в кольце $\mathbb{Z}_4$ имеются делители нуля, а значит, $\mathbb{Z}_4$ не является полем. Возникает естественный вопрос: когда кольцо $\mathbb{Z}_m$ является полем?

Теорема 4.13. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{m-1}\}$.*

1. *Элемент $\overline{a} \in \mathbb{Z}_m$ обратим тогда и только тогда, когда НОД$(a, m) = 1$.*
2. *Элемент $\overline{a} \in \mathbb{Z}_m$ является делителем нуля тогда и только тогда, когда НОД$(a, m) \neq 1$.*
3. *Кольцо классов вычетов $\mathbb{Z}_m$ является полем тогда и только тогда, когда m — простое число.*

Теорема 4.14. *Множество всех обратимых элементов кольца $\mathbb{Z}_m$ с операцией умножения образует группу порядка $\varphi(m)$.*

Пример 4.6. В кольца $\mathbb{Z}_{24}$ перечислите обратимые элементы и делители нуля. Составьте таблицу умножения обратимых элементов кольца $\mathbb{Z}_{24}$ и для каждого обратимого элемента укажите обратный.

□ Поскольку НОД$(24, x) \neq 1$ для каждого $x \in \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22\}$, то согласно теореме 4.13 соответствующие классы вычетов $\overline{x}$ будут делителями нуля.

Обратимыми элементами в кольце $\mathbb{Z}_{24}$ будут элементы $\overline{1}$, $\overline{5}$, $\overline{7}$, $\overline{11}$, $\overline{13}$, $\overline{17}$, $\overline{19}$, $\overline{23}$. Число обратимых элементов равно 8 и совпадает со значением функции Эйлера $\varphi(24) = \varphi(2^3 \cdot 3) = \varphi(2^3)\varphi(3) = (2^3 - 2^2)(3-1) = 8$.

Составим таблицу умножения обратимых элементов кольца $\mathbb{Z}_{24}$.

	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{7}$	$\overline{11}$	$\overline{13}$	$\overline{17}$	$\overline{19}$	$\overline{23}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{7}$	$\overline{11}$	$\overline{13}$	$\overline{17}$	$\overline{19}$	$\overline{23}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{1}$	$\overline{11}$	$\overline{7}$	$\overline{17}$	$\overline{13}$	$\overline{23}$	$\overline{19}$
$\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{11}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{19}$	$\overline{23}$	$\overline{13}$	$\overline{17}$
$\overline{11}$	$\overline{11}$	$\overline{7}$	$\overline{5}$	$\overline{1}$	$\overline{23}$	$\overline{19}$	$\overline{17}$	$\overline{13}$
$\overline{13}$	$\overline{13}$	$\overline{17}$	$\overline{19}$	$\overline{23}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{7}$	$\overline{11}$
$\overline{17}$	$\overline{17}$	$\overline{13}$	$\overline{23}$	$\overline{19}$	$\overline{5}$	$\overline{1}$	$\overline{11}$	$\overline{7}$
$\overline{19}$	$\overline{19}$	$\overline{23}$	$\overline{13}$	$\overline{17}$	$\overline{7}$	$\overline{11}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$
$\overline{23}$	$\overline{23}$	$\overline{19}$	$\overline{17}$	$\overline{13}$	$\overline{11}$	$\overline{7}$	$\overline{5}$	$\overline{1}$

Из таблицы получаем, что каждый элемент совпадает со своим обратным элементом. ⊠

4.4. Сравнения первой степени

Сравнением первой степени с одной неизвестной x называется сравнение вида $ax \equiv b(\text{mod } m)$, где $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \not\equiv 0(\text{mod } m)$.

Если при подстановке в сравнение вместо неизвестной целого числа x_0 получается верное числовое сравнение, то число x_0 называется *решением данного сравнения*. Нетрудно показать, что если x_0 — решение сравнения $ax \equiv b(\text{mod } m)$, то любое число вида $x_0 + mt, \quad t \in \mathbb{Z}$, также является решением этого сравнения, т.е. решением сравнения будут все числа из класса вычетов $\overline{x_0}$ по модулю m.

При решении сравнения $ax \equiv b(\text{mod } m)$ возможен

один из трех случаев:

1) НОД$(a, m) = d$ не делит число b. Сравнение в этом случае решений не имеет.

2) НОД$(a, m) = 1$. Сравнение имеет решением только один класс вычетов по модулю m.

3) НОД$(a, m) = d|b$. В этом случае делим обе части сравнения и модуль на d. Получим сравнение $a_1x \equiv b_1(\text{mod } m_1)$, где НОД$(a_1, m_1) = 1$. Если класс $\overline{x_0}$ — решение последнего сравнения, то классы вычетов $\overline{x_0}, \overline{x_0 + m_1}, \ldots, \overline{x_0 + (d-1)m_1}$ по модулю m будут решениями исходного сравнения. В этом случае сравнение $ax \equiv b(\text{mod } m)$ имеет решениями числа из d классов вычетов по модулю m. Все числа из этих классов можно записать в виде $x_0 + m_1 t$, где $\quad t \in \mathbb{Z}$.

Пример 4.7. Решите сравнение $7x \equiv 16(\text{mod } 23)$.

□ Первый способ. Вычтем из данного сравнения другое сравнение $0 \equiv 23(\text{mod } 23)$. Получим $7x \equiv -7(\text{mod } 23)$. Так как 7 и 23 взаимно просты, то можно обе части сравнения поделить на 7. Тогда $x \equiv -1(\text{mod } 23)$. Прибавим сравнение $0 \equiv 23(\text{mod } 23)$. Получим $x \equiv 22(\text{mod } 23)$. Таким образом, решениями данного сравнения будут все числа класса $\overline{22}$.

Второй способ. Так как 7 и 23 взаимно просты, то по теореме Эйлера $7^{\varphi(23)} \equiv 1(\text{mod } 23)$. Число 23 —простое, поэтому $\varphi(23) = 22$. Следовательно, $7^{22} \equiv 1(\text{mod } 23)$. Умножим это сравнение на $x \equiv x(\text{mod } 23)$. Получим $7^{22}x \equiv x(\text{mod } 23)$. Но $7^{22}x = 7^{21}7x \equiv 7^{21} \cdot 16(\text{mod } 23)$. Следовательно, $x \equiv 7^{21} \cdot 16(\text{mod } 23)$. Найдем остаток при делении $7^{21} \cdot 16$ на 23. Так как $7^2 = 49 \equiv 3(\text{mod } 23)$, то $7^{21} = (7^2)^{10} \cdot 7 \equiv 3^{10} \cdot 7(\text{mod } 23)$. Поскольку $3^3 = 27 \equiv 4(\text{mod } 23)$, то $3^{10} \cdot 7 = (3^3)^3 \cdot 3 \cdot 7 \equiv 4^3 \cdot 21(\text{mod } 23)$. Так как $4^3 = 64 \equiv -5(\text{mod } 23)$ и $21 \equiv -2(\text{mod } 23)$, то $4^3 \cdot 21 \equiv (-5) \cdot (-2)(\text{mod } 23)$. Итак, $7^{21} \equiv 10(\text{mod } 23)$. Тогда $7^{21} \cdot 16 \equiv 10 \cdot 16(\text{mod } 23)$. Поскольку, $160 \equiv$

$22 \pmod{23}$ то $7^{21} \cdot 16 \equiv 22 \pmod{23}$. Таким образом, $x \equiv 22 \pmod{23}$.

Ответ: $x = 22 + 23t, \quad t \in \mathbb{Z}$. ⊠

Пример 4.8. Решите сравнение $6x \equiv 10 \pmod{14}$.

☐ Так как $2 = \text{НОД}(6, 14)$ делит 10, то сравнение имеет 2 решения. Разделим сравнение на 2. Получим $3x \equiv 5 \pmod 7$. Так как 3 и 7 взаимно просты, то это сравнение имеет решениями один класс вычетов по модулю 7. Решим это сравнение. Прибавим к данному сравнению другое сравнение $0 \equiv 7 \pmod 7$. Получим $3x \equiv 12 \pmod 7$. Так как 3 и 7 взаимно просты, то можно обе части сравнения поделить на 3. Тогда $x \equiv 4 \pmod 7$. Итак, решениями будут классы $\overline{4}$ и $\overline{4+7} = \overline{11}$.

Ответ: $x = 4 + 14t$, $x = 11 + 14t$, $t \in \mathbb{Z}$, или $x = 4 + 7t$, $t \in \mathbb{Z}$. ⊠

Пример 4.9. Найдите все целочисленные решения уравнения $54x - 42y = -18$.

☐ Выразим одну из неизвестных через другую
$$y = \frac{54x + 18}{42}.$$
Чтобы число y было целым,число x должно удовлетворять сравнению $54x + 18 \equiv 0 \pmod{42}$, т.е. $54x \equiv -18 \pmod{42}$. $\text{НОД}(54, 42) = 6$ делит (-18), поэтому сравнение имеет 6 решений. Разделим сравнение на 6. Получим $9x \equiv -3 \bmod (7)$. Прибавим сравнение $0 \equiv 21 \pmod 7$. Получим $9x \equiv 18 \pmod 7$. Разделим обе части на 9. Тогда $x \equiv 2 \pmod 7$. Решениями будут классы $\overline{2}$, $\overline{9}$, $\overline{16}$, $\overline{23}$, $\overline{30}$, $\overline{37}$. Все числа этих классов можно записать $x = 2 + 7t$, где $t \in \mathbb{Z}$. Найдем вторую неизвестную
$$y = \frac{54(2 + 7t) + 18}{42} = \frac{126 + 378t}{42} = 3 + 9t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$
Ответ: $x = 2 + 7t$, $y = 3 + 9t$, $t \in \mathbb{Z}$. ⊠

Пример 4.10. В кольце $\mathbb{Z}_{12}$ укажите обратимые элементы и найдите им обратные элементы.

☐ Элемент $\overline{a} \in \mathbb{Z}_m$ имеет в $\mathbb{Z}_m$ обратный элемент тогда и только тогда, когда a и m взаимно просты. По модулю 12 имеется $\varphi(12) = \varphi(2^2 \cdot 3) = (2^2 - 2)(3 - 3^0) = 4$ класса вычетов, элементы которых взаимно просты с модулем: $\overline{1}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{11}$.

Найдем обратные элементы в кольце $\mathbb{Z}_{12}$ для каждого из указанных классов.

$\overline{1} \cdot \overline{x} = \overline{1}$. Очевидно, что $\overline{x} = \overline{1}$, т.е. $(\overline{1})^{-1} = \overline{1}$.

$\overline{5} \cdot \overline{x} = \overline{1}$. По теореме Эйлера $5^{\varphi(12)} \equiv 1 \pmod{12}$. Тогда $5^4 \equiv 1 \pmod{12}$. Это означает, что $\overline{5^4} = \overline{1}$. По определению умножения классов вычетов $\overline{5} \cdot \overline{5^3} = \overline{1}$. Но $\overline{5^3} = \overline{5}$, так как $5^3 = 125 \equiv 5 \pmod{12}$. Следовательно $\overline{x} = \overline{5}$, т.е. $(\overline{5})^{-1} = \overline{5}$.

$\overline{7} \cdot \overline{x} = \overline{1}$. Аналогично предыдущему $7^{\varphi(12)} \equiv 1 \pmod{12}$, откуда $\overline{7^4} = \overline{1}, \overline{7} \cdot \overline{7^3} = \overline{1}$. Так как $\overline{7^3} = \overline{7}$, то $\overline{x} = \overline{7}$.

$\overline{11} \cdot \overline{x} = \overline{1}$. По теореме Эйлера $11^4 \equiv 1 \pmod{12}$, т.е. $\overline{11^4} = \overline{1}$, откуда $\overline{11} \cdot \overline{11^3} = \overline{1}$. Поскольку $\overline{11^3} = \overline{11}$, то $\overline{x} = \overline{11}$.

Ответ: обратимые элементы: $\overline{1}$, $\overline{5}$, $\overline{7}$, $\overline{11}$. Каждый из этих элементов совпадает со своим обратным. ⊠

4.5. Индивидуальные задания

1. Используя свойства сравнений, найдите остаток от деления a на b.

1.1. $a = 178^{274}, \quad b = 22.$
1.2. $a = 5^{50} + 13^{100}, \quad b = 18.$
1.3. $a = 5^{70} + 27^{50}, \quad b = 12.$
1.4. $a = 139^{291}, \quad b = 13.$
1.5. $a = 383^{175}, \quad b = 11.$
1.6. $a = 178^{152}, \quad b = 11.$

1.7. $a = 34^{374}$, $b = 15$.
1.8. $a = 22^{234}$, $b = 14$.
1.9. $a = 15^{80} + 7^{100}$, $b = 13$.
1.10. $a = 293^{75}$, $b = 13$.
1.11. $a = 194^{198}$, $b = 11$.
1.12. $a = 233^{93}$, $b = 16$.
1.13. $a = 127^{153}$, $b = 15$.
1.14. $a = 274^{100}$, $b = 12$.
1.15. $a = 264^{90}$, $b = 17$.

2. Используя свойства сравнений, найдите последнюю цифру числа a из задания 1.

3. Используя свойства сравнений, докажите, что число c делится на число d.

3.1. $c = 27^{30} + 7$, $d = 16$.
3.2. $c = 26^{15} + 1$, $d = 21$.
3.3. $c = 60^{45} + 72^{45}$, $d = 11$.
3.4. $c = 16^{302} + 9^{302} + 1$, $d = 13$.
3.5. $c = 14^{100} + 5$, $d = 9$.
3.6. $c = 3^{803} - 16$, $d = 11$.
3.7. $c = 24^{21} \cdot 21^{12} - 3^{12} \cdot 17^{21}$, $d = 19$.
3.8. $c = 30^{14} + 10$, $d = 13$.
3.9. $c = 10^{51} + 162$, $d = 14$.
3.10. $c = 29^{47} + (-17)^{47} + 1$, $d = 13$.
3.11. $c = 28^{91} + 5$, $d = 11$.
3.12. $c = 3^{126} - 15$, $d = 14$.
3.13. $c = 48^{153} + 24$, $d = 22$.
3.14. $c = 4^{323} + 26$, $d = 15$.
3.15. $c = 518^{20} + 4$, $d = 13$.

4 Вычислите значение функции Эйлера для числа a.

4.1. $a = 142560$.
4.2. $a = 421200$.
4.3. $a = 539000$.
4.4. $a = 476000$.
4.5. $a = 105840$.

4.6. $a = 273000$.
4.7. $a = 853776$.
4.8. $a = 794976$.
4.9. $a = 702702$.
4.10. $a = 343035$.
4.11. $a = 798525$.
4.12. $a = 606375$.
4.13. $a = 268125$.
4.14. $a = 523908$.
4.15. $a = 548856$.

5. В кольце $\mathbb{Z}_m$ укажите обратимые элементы и делители нуля. Для каждого из обратимых элементов найдите обратный элемент.

5.1. $m = 8$.
5.2. $m = 9$.
5.3. $m = 10$.
5.4. $m = 14$.
5.5. $m = 6$.
5.6. $m = 18$.
5.7. $m = 16$.
5.8. $m = 20$.
5.9. $m = 24$.
5.10. $m = 30$.
5.11. $m = 15$.
5.12. $m = 5$.
5.13. $m = 4$.
5.14. $m = 7$.
5.15. $m = 11$.

6. Составьте таблицу умножения обратимых элементов кольца $\mathbb{Z}_m$.

6.1 $m = 16$.
6.2. $m = 20$.
6.3. $m = 24$.
6.4. $m = 30$.
6.5. $m = 15$.

6.6. $m = 5$.
6.7. $m = 4$.
6.8. $m = 7$.
6.9. $m = 11$.
6.10. $m = 8$.
6.11. $m = 9$.
6.12. $m = 10$.
6.13. $m = 14$.
6.14. $m = 6$.
6.15. $m = 18$.

7. Решите сравнение первой степени.

7.1. $-3x \equiv 13 \pmod 4$.
7.2. $2x \equiv 9 \pmod 7$.
7.3. $5x \equiv 9 \pmod 6$.
7.4. $-6x \equiv 5 \pmod 7$.
7.5. $13x \equiv 20 \pmod 4$.
7.6. $14x \equiv -10 \pmod 3$.
7.7. $15x \equiv 9 \pmod{11}$.
7.8. $-10x \equiv 8 \pmod 3$.
7.9. $16x \equiv -6 \pmod 9$.
7.10. $29x \equiv 3 \pmod{19}$.
7.11. $17x \equiv -20 \pmod 3$.
7.12. $13x \equiv 4 \pmod 8$.
7.13. $14x \equiv 30 \pmod 9$.
7.14. $6x \equiv 22 \pmod{13}$.
7.15. $7x \equiv -12 \pmod{16}$.

8. Найдите все целочисленные решения уравнения.

8.1. $10x - 15y = 25$.
8.2. $14x + 21y = -49$.
8.3. $12x - 8y = -24$.
8.4. $15x - 18y = 21$.
8.5. $22x + 4y = -16$.
8.6. $12x - 20y = -24$.
8.7. $6x + 42y = -12$.

8.8. $26x + 28y = -4$.
8.9. $27x - 12y = -15$.
8.10. $30x + 55y = -10$.
8.11. $8x - 20y = -16$.
8.12. $21x - 36y = 9$.
8.13. $24x + 14y = -18$.
8.14 $15x - 21y = 42$.
8.15 $32x + 44y = -16$.

4.6. Дополнительные задачи

1. Докажите, что $x^7 \equiv x \pmod{42}$ при любом целом x.

2. Пусть p и q — различные простые числа. Докажите, что $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}$.

3. Найдите последнюю цифру числа $22^{11} + 33^{22}$.

4. Докажите, что не существует натуральных чисел a, b и c, удовлетворяющих уравнению $2^a + 7^b = 19^c$.

5. Докажите, что сравнение

$$a^{6m} + a^{6n} \equiv 0 \pmod 7, \quad m, n \in \mathbb{N},$$

истинно только при a, кратном 7.

6. Найдите остаток от деления на 3 числа $n = (1^2 + 1)(2^2 + 1)(3^2 + 1)\ldots(1000^2 + 1)$.

7. Докажите, что дискриминант квадратного уравнения с целыми коэффициентами при делении на 4 дает остаток 0 или 1.

8. Пусть все коэффициенты уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ — целые нечетные числа. Докажите, что ни один из корней этого уравнения не может быть рациональным числом.

9. Прямоугольный треугольник называется пифагоровым, если длины его сторон — натуральные числа.

9.1. Могут ли длины обоих катетов пифагорова треугольника быть нечетными числами?

9.2. Докажите, что длина одного из катетов пифагорова треугольника делится на 3.

9.3. Докажите, что длина одной из сторон пифагорова треугольника делится на 5.

9.4. Докажите, что произведение длин сторон пифагорова треугольника делится на 60.

9.5. Существует ли пифагоров треугольник с площадью 360?

9.6. Предположим, что длины сторон пифагорова треугольника взаимно простые числа. Докажите, что длина гипотенузы — нечетное число, а длины катетов имеют разную четность.

9.7. Сколько существует различных пифагоровых треугольников, длина одного из катетов у которых равна 15.

10. Докажите, что не существует прямоугольного параллелепипеда с целочисленными ребрами и диагональю $\sqrt{807}$.

11. Докажите, что
$$(x+y)^p \equiv x^p + y^p (\mathrm{mod}\ p)$$
для любого простого p и любых целых чисел x и y.

12. Пусть a и b — простые числа. Докажите, что

12.1. $a+b$ делит a^5+b^5,

12.2. $a^2+2ab+b^2$ делит a^4+4b^4.

13. Докажите, что из 8 целых чисел всегда можно выбрать два таких, разность которых делится на 7.

14. Докажите, что 57 делит $7^{n+2}+8^{2n+1}$ при любом $n \in \mathbb{N}$.

15. Пусть $a, b \in \mathbb{Z}$ и 7 делит a^2+b^2. Докажите, что 7 делит a и делит b.

16. Существует ли точка с целыми координатами, принадлежащая параболе $y = \frac{1}{5}x^2 - \frac{3}{5}$?

17. Докажите, что каждое число вида $7n+3$, $n \in \mathbb{Z}$, не может быть квадратом целого числа.

18. Существует ли момент времени, когда на циферблате правильно идущих часов часовая, минутная и секундная стрелки образуют попарно углы в $120°$?

19. Найдите признаки делимости целых чисел на 7, на 13.

20. Докажите, что для числа 341 справедливо сравнение $2^{341} \equiv 2(\mathrm{mod}\ 341)$.

21. Составное число n называется абсолютно псевдопростым, если для каждого целого числа a выполняется сравнение $a^n \equiv a(\mathrm{mod}\ n)$. Докажите, что число 561 является абсолютно псевдопростым.

22. В кольце $\mathbb{Z}_m$ решите уравнение:

22.1. $\overline{16}\overline{x} = \overline{21}$, $m = 30$.

22.2. $\overline{12}\overline{x} = \overline{15}$, $m = 35$.

22.3. $\overline{19}\overline{x} = \overline{29}$, $m = 36$.

22.4. $\overline{21}\overline{x} = \overline{54}$, $m = 75$.

22.5. $\overline{27}\overline{x} = \overline{11}$, $m = 106$.

23. Пусть даны m последовательных целых чисел $a, a+1, a+2, \ldots, a+m-1$. Докажите, что каждое число $x \in \mathbb{Z}$ сравнимо по модулю m только с одним из них.

24. Пусть p — простое число, a и b целые. Докажите, что $a^p b - ab^p$ делится на p.

25. Имеют ли уравнения целочисленные решения?

25.1. $x^2+y^2+z^2 = 1983$,

25.2. $x^4+y^4+z^4 = 1980$.

5. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

5.1. Поле комплексных чисел

Нам известны следующие множества чисел:

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Это множество с операцией умножения является абелевой полугруппой с единицей, а с операцией сложения — абелевой полугруппой без нуля;

$\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел;

$\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел;

$\mathbb{R}$ — поле действительных чисел.

Кольцо целых чисел является расширением множества натуральных чисел, но целых чисел недостаточно даже для решения уравнения $2x + 1 = 0$. Поле рациональных чисел

$$\mathbb{Q} = \{\frac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z}, \quad m \in \mathbb{N}\}$$

является расширением кольца целых чисел, но в поле рациональных чисел не всегда возможно извлекать квадратные корни. Нетрудно доказать, что $\sqrt{p}$ не является рациональным числом для любого простого числа p.

Поле $\mathbb{R}$ действительных чисел является расширением поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, но в $\mathbb{R}$ простейшее квадратное уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет решения.

Поставим следующую задачу: *расширить поле действительных чисел так, чтобы в новом поле имело решение уравнение*

$$x^2 + 1 = 0. \tag{5.1}$$

Рассмотрим множество упорядоченных пар (a, b) действительных чисел

$$\mathbb{C} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Две пары (a_1, b_1), (a_2, b_2) считаются равными, если $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$. Введем операции сложения и умножения:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \tag{5.2}$$

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc). \tag{5.3}$$

Теорема 5.1. *Множество* $\mathbb{C}$ *с операциями сложения* (5.2) *и умножения* (5.3) *является полем с нулевым элементом* $(0, 0)$ *и единичным элементом* $(1, 0)$.

Построенное поле $\mathbb{C}$ называют *полем комплексных чисел*, а элементы поля $\mathbb{C}$ — *комплексными числами.*

Пары $(a, 0)$, $a \in \mathbb{R}$ складываются и умножаются как действительные числа:

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0);$$

$$(a, 0)(b, 0) = (ab - 00, a0 + 0b) = (ab, 0).$$

Поэтому отображение $\varphi : a \mapsto (a, 0)$, $a \in \mathbb{R}$ является изоморфизмом поля $\mathbb{R}$ и поля

$$\varphi(\mathbb{R}) = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}.$$

Это позволяет отождествлять пару $(a, 0)$ с действительным числом a, т.е. положить $(a, 0) = a$. Поле $\mathbb{R}$ действительных чисел становится частью поля $\mathbb{C}$ комплексных чисел.

Пару $(0, 1)$ обозначим через i и назовем мнимой единицей. Так как

$$bi = (b, 0)(0, 1) = (b \cdot 0 - 0 \cdot 1, b \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (0, b),$$

то

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + bi.$$

Кроме того,

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = (-1, 0) = -1,$$

т.е. i является решением уравнения (5.1).

Запись $a+bi$ называется *алгебраической формой* комплексного числа (a,b), число a — его *действительной частью*, а bi — *мнимой частью*. Сложение (5.2) и умножение (5.3) в алгебраической форме записывают так:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i, \tag{5.4}$$

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i. \tag{5.5}$$

В частности, при умножении комплексных чисел раскрываются скобки и i^2 заменяется на -1.

Итак, с операциями сложения (5.4) и умножения (5.5) множество

$$\mathbb{C}=\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{R},\ i^2=-1\}$$

является полем, $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$ и в $\mathbb{C}$ уравнение (5.1) имеет решение $x=i$. Поставленная задача решена.

Для комплексного числа $z=a+bi$ комплексное число $a-bi$ называется *сопряженным* и обозначается через $\bar{z}$. Итак, у сопряженных чисел действительные части совпадают, а мнимые — взаимно противоположны. Очевидно, что $\bar{z}=z$ тогда и только тогда, когда z — действительное число. Легко проверяются следующие свойства сопряженных чисел.

1) Сумма $z+\overline{z}$ и произведение $z\overline{z}$ являются действительными числами;

2) $\overline{z\pm w}=\bar{z}\pm\bar{w}$;

3) $\overline{zw}=\bar{z}\bar{w}$; $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{w}}$;

4) $\bar{z}^k=\overline{z^k}$, $\quad k\in\mathbb{N}$;

5) $\bar{\bar{z}}=z$.

При делении комплексных чисел делимое и делитель умножаются на число, сопряженное делителю:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di}=$$

$$=\frac{ac+bd-(ad-bc)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}-\frac{ad-bc}{c^2+d^2}i.$$

Естественно здесь надо считать, что $c+di\neq 0$, т.е. $c\neq 0\neq d$.

Пример 5.1. Даны комплексные числа $z_1=2-3i$ и $z_2=-1-i$. Вычислите z_1+z_2, z_1-z_2, $z_1\cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$.

□ При сложении комплексных чисел в алгебраической форме складываются их действительные части и коэффициенты при i:

$$z_1+z_2=(2-3i)+(-1-i)=(2-1)+(-3-1)i=1-4i.$$

При вычитании комплексных чисел в алгебраической форме вычитаются их действительные части и коэффициенты при i:

$$z_1-z_2=(2-3i)-(-1-i)=(2+1)+(-3+1)i=3-2i.$$

Для того, чтобы перемножить два комплексных числа, надо перемножить их как двучлены, а затем заменить i^2 на -1:

$$z_1\cdot z_2=(2-3i)(-1-i)=-2+3i-2i+3i^2=$$
$$=(-2-3)+(3-2)i=-5+i.$$

Для вычисления частного умножим делимое и делитель на число, сопряженное делителю:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2-3i}{-1-i}=\frac{(2-3i)(-1+i)}{(-1-i)(-1+i)}=$$
$$=\frac{-2+3i+2i-3i^2}{(-1)^2-i^2}=\frac{1+5i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i.$$

Ответ: $z_1+z_2=1-4i$, $z_1-z_2=3-2i$, $z_1\cdot z_2=-5+i$, $\frac{z_1}{z_2}=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i$. ⊠

Пример 5.2. Вычислите $\frac{3+2i}{7-2i}$, $\left(\frac{1-2i}{1+2i}\right)^3$.

□ Для вычисления $\frac{3+2i}{7-2i}$ умножим числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю:

$$\frac{3+2i}{7-2i}\cdot\frac{7+2i}{7+2i}=\frac{(21-4)+(6+14)i}{7^2-(2i)^2}=\frac{17}{53}+\frac{20}{53}i.$$

Для возведения в куб числа $\frac{1-2i}{1+2i}$ вначале вычислим

$$\frac{1-2i}{1+2i}\cdot\frac{1-2i}{1-2i}=\frac{(1-2i)^2}{1^2-(2i)^2}=\frac{1-4i-4}{1+4}=\frac{-3}{5}-\frac{4}{5}i.$$

Теперь имеем

$$\left(\frac{1+2i}{1-2i}\right)^3=\left(\frac{-3}{5}-\frac{4}{5}i\right)^3=\frac{-1}{5^3}(3+4i)^3=$$
$$=\tfrac{-1}{125}(27+108i-144-64i)=\tfrac{-1}{125}(-117+44i).\quad\boxtimes$$

5.2. Извлечение квадратного корня из комплексного числа

В поле комплексных чисел разрешимо уравнение $x^2+1=0$. Его решениями являются числа i и $-i$. Поэтому в поле $\mathbb{C}$ существует квадратный корень из -1, а именно $\sqrt{-1}=\pm i$. Отсюда следует, что в поле $\mathbb{C}$ существуют квадратные корни из отрицательных действительных чисел:

$$\sqrt{-a}=\sqrt{(-1)a}=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{a}=\pm i\sqrt{a}.$$

Пусть теперь требуется извлечь квадратный корень из комплексного числа $z=a+bi$. Положим $x+yi=\sqrt{a+bi}$. Возведем обе части этого равенства в квадрат

$$x^2-y^2+2xyi=a+bi.$$

Приравнивая действительные и мнимые части, получаем систему

$$\begin{cases}x^2-y^2=a,\\ 2xy=b.\end{cases}\tag{5.6}$$

Возведем оба уравнения в квадрат.

$$\begin{cases}(x^2-y^2)^2=a^2,\\ 4x^2y^2=b^2.\end{cases}$$

Складывая оба уравнения последней системы, получим уравнение $(x^2+y^2)^2=a^2+b^2$. Теперь имеем систему:

$$\begin{cases}x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2},\\ x^2-y^2=a.\end{cases}$$

Складывая оба уравнения, а затем вычитая из первого уравнения второе, получаем

$$2x^2=\sqrt{a^2+b^2}+a,\quad 2y^2=\sqrt{a^2+b^2}-a.$$

Извлекая корни из каждого уравнения, получаем

$$x=\delta_1\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}},\quad y=\delta_2\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}},$$

где $\delta_1=\pm1=\delta_2$. Но из второго уравнения системы (5.6) следует, что $xy=b/2$. Поэтому при $b\geq 0$ произведение $\delta_1\delta_2=1$, т.е. x и y имеют одинаковые знаки, а при $b<0$ произведение $\delta_1\delta_2=-1$, т.е. x и y имеют разные знаки. В общем случае эту зависимость можно записать используя функцию "знак"следующим образом: $\delta_2=\delta_1\mathrm{sign}b$:

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+(\mathrm{sign}b)i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right).\tag{5.7}$$

Итак, доказана

Теорема 5.2. *В поле комплексных чисел существует квадратный корень из комплексного числа, значения которого определяются формулой* (5.7).

При вычислении корня из комплексного числа можно использовать формулу (5.7) или схему доказательства теоремы 5.2.

Пример 5.3. Вычислите $\sqrt{6+8i}$.

$\square$ По формуле (5.7) имеем

$$\sqrt{6+8i}=\pm(\sqrt{8}+i\sqrt{2}).$$

Проверка: $\left(\pm(\sqrt{8}+i\sqrt{2})\right)^2 = 8-2+2\sqrt{8}\sqrt{2}i = 6+8i$.

Ответ: $\pm(\sqrt{8}+i\sqrt{2})$. ⊠

Пример 5.4. Вычислите $\sqrt{1-i}$.

□ Воспользуемся схемой доказательства теоремы 5.2. Пусть $\sqrt{1-i} = x+yi$, где $x,y \in \mathbb{R}$. Возводя обе части равенства в квадрат, получим $1-i = (x^2-y^2)+2xyi$. Из условия равенства комплексных чисел имеем

$$\begin{cases} x^2-y^2 &= 1, \\ 2xy &= -1. \end{cases}$$

Возводя оба уравнения в квадрат и складывая их, получим

$$x^4+2x^2y^2+y^4 = 2,$$

откуда $(x^2+y^2)^2 = 2$ или $x^2+y^2 = \sqrt{2}$.

Рассматривая систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2 &= \sqrt{2}, \\ x^2-y^2 &= 1, \end{cases}$$

находим $x^2 = \frac{\sqrt{2}+1}{2}, y^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

Второе уравнение $2xy = -1$ первоначальной системы указывает, что числа x и y имеют разные знаки. Поэтому исходная система имеет два решения:

$$x_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}},\ y_1 = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}};$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}},\ y_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$

Таким образом, $\sqrt{1-i} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}i\right)$.

Ответ: $z_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}i$,

$z_2 = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}i$. ⊠

Пример 5.5. Найдите действительные решения уравнения

$$(5-8i)x+(7+3i)y = 2-i.$$

□ Преобразуем левую часть уравнения и используем условие равенства комплексных чисел

$$(5x+7y)+(-8x+3y)i = 2-i.$$

Получим систему

$$\begin{cases} 5x+7y &= 2, \\ -8x+3y &= -1, \end{cases}$$

откуда находим $x = \frac{13}{71}$, $y = \frac{11}{71}$.

Ответ: $x = \frac{13}{71}$, $y = \frac{11}{71}$. ⊠

5.3. Решение квадратных уравнений в поле $\mathbb{C}$

Пусть $uz^2+vz+w = 0$ — квадратное уравнение над полем комплексных чисел, т.е. $u,v,w \in \mathbb{C}$. Повторяя вывод формулы корней квадратного уравнения с действительными коэффициентами, который известен из школьного курса математики, для квадратного уравнения с комплексными коэффициентами, получаем следующую формулу

$$z_{1,2} = \frac{-v \pm \sqrt{v^2-4uw}}{2u}. \tag{5.8}$$

Пример 5.6. В поле $\mathbb{C}$ решите уравнение x^2+x+1.

□ Уравнение x^2+x+1 не имеет действительных корней поскольку дискриминант $D = 1^2-4\cdot1\cdot1 = -3 < 0$. Но оно имеет комплексные корни:

$x_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$; $x_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$. ⊠

Пример 5.7. В поле $\mathbb{C}$ решите квадратное уравнение
$$z^2 - (2+4i)z + (-9/2+2i) = 0.$$

□ Находим дискриминант $D = v^2 - 4uw = 6 + 8i$. По формуле (5.8) получаем
$$z_1 = \frac{2+4i+\sqrt{8}+i\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{2}+(2+\sqrt{2}/2)i;$$
$$z_2 = \frac{2+4i-(\sqrt{8}+i\sqrt{2})}{2} = 1-\sqrt{2}+(2-\sqrt{2}/2)i.$$

Ответ: $\{1+\sqrt{2}+(2+\sqrt{2}/2)i, 1-\sqrt{2}+(2-\sqrt{2}/2)i\}$. ⊠

Пример 5.8. Решите уравнение
$$(2+i)x^2 - (5-i)x + (2-2i) = 0.$$

□ По формуле корней квадратного уравнения находим
$$x_{1,2} = \frac{(5-i) \pm \sqrt{(5-i)^2 - 4(2+i)(2-2i)}}{2(2+i)} = \frac{(5-i) \pm \sqrt{-2i}}{4+2i}.$$

Так как $\sqrt{-2i} = \pm(1-i)$, то
$$x_1 = \frac{(5-i)+(1-i)}{4+2i} = \frac{6-2i}{4+2i} = 1-i,$$
$$x_2 = \frac{(5-i)-(1-i)}{4+2i} = \frac{4}{4+2i} = \frac{2}{2+i} = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i.$$

Ответ: $\{1-i; \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i\}$. ⊠

Действительные числа можно изображать точками на числовой оси. Комплексное число $z = a+bi$ задается двумя действительными числами a и b, поэтому естественно изображать комплексные числа точками на плоскости.

Введем на плоскости прямоугольную систему координат и будем изображать комплексное число $z = a + bi$ точкой на плоскости с координатами $(a; b)$. В частности, числу i ставится в соответствие точка $(0; 1)$. Действительным числам соответствуют точки оси абсцисс, а чисто мнимым числам — точки оси ординат.

5.4. Тригонометрическая форма комплексного числа

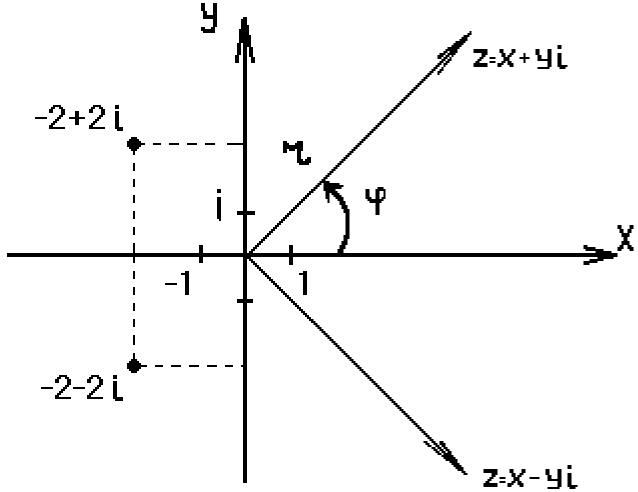


Рис. 1.

Положение точки $z = x + yi$ на плоскости вполне определяется ее полярными координатами r и φ, где r — расстояние от начала координат до z, а φ — угол между положительным направлением оси абцисс и направлением из начала координат на точку z. Полярные координаты точки $z = x + yi$ определяют x и y по известным формулам: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, поэтому

$$z = x + yi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Запись $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называют *тригонометрической формой комплексного числа* z.

Неотрицательное число r называют *модулем комплексного числа* z и обозначают через $|z|$. Ясно, что $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Угол φ называют *аргументом числа* z и обозначают через $\arg z$.

Пример 5.9. Представьте в тригонометрической форме числа

$$z_1 = \sqrt{3} - i, \; z_2 = -5, z_3 = -3(\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}).$$

☐ Изобразим числа z_1, z_2 на плоскости, см. рис. 2.

Для числа $z_1 = \sqrt{3} - i$ имеем:

$$|z_1| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2,$$

$$\sin\varphi = -\frac{1}{2}, \quad \cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \varphi = -\frac{\pi}{6}.$$

Значит $z_1 = \sqrt{3} - i = 2(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6}))$.

Для $z_2 = -5$ имеем $|z_2| = 5$, $\varphi = \pi$ и $z_2 = -5 = 5(\cos\pi + i\sin\pi)$.

Комплексное число $z_3 = -3(\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5})$ записано не в тригонометрической форме, так как отрицательное число -3 нельзя считать модулем z_3. Кроме того, коэффициент при i равен $-\sin\frac{\pi}{5}$, а в тригонометрической форме мнимая часть должна быть записана так: $i\sin\varphi$. Представим число z_3 в виде $z_3 = 3(-\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5})$. Отсюда заключаем, что аргументом комплексного числа z_3 является такой угол φ,

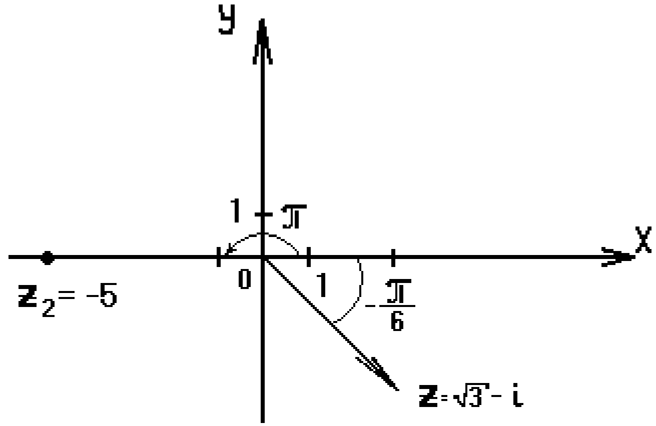


Рис. 2.

для которого $\cos\varphi = -\cos\frac{\pi}{5}$, а $\sin\varphi = \sin\frac{\pi}{5}$. Этот угол легко найти: $\varphi = \pi - \frac{\pi}{5} = \frac{4}{5}\pi$. Итак, искомое представление в тригонометрической форме есть $z_3 = 3(\cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5})$.

Ответ: $z_1 = 2(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6}))$;

$z_2 = 5(\cos\pi + i\sin\pi)$; $z_3 = 3(\cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5})$. ⊠

Пример 5.10. Изобразите на плоскости и запишите в тригонометрической форме числа

$$z_1 = -2i, \; z_2 = -1 + i\sqrt{3}, \; z_3 = 1 - i.$$

☐ Откладывая действительную часть комплексного числа на оси $0x$, а коэффициент при i — на оси $0y$, получим точки на координатной плоскости, соответствующие числам z_1, z_2, z_3.

Так как точка, соответствующая z_1, лежит на координатной оси Oy, то модуль и аргумент числа z_1

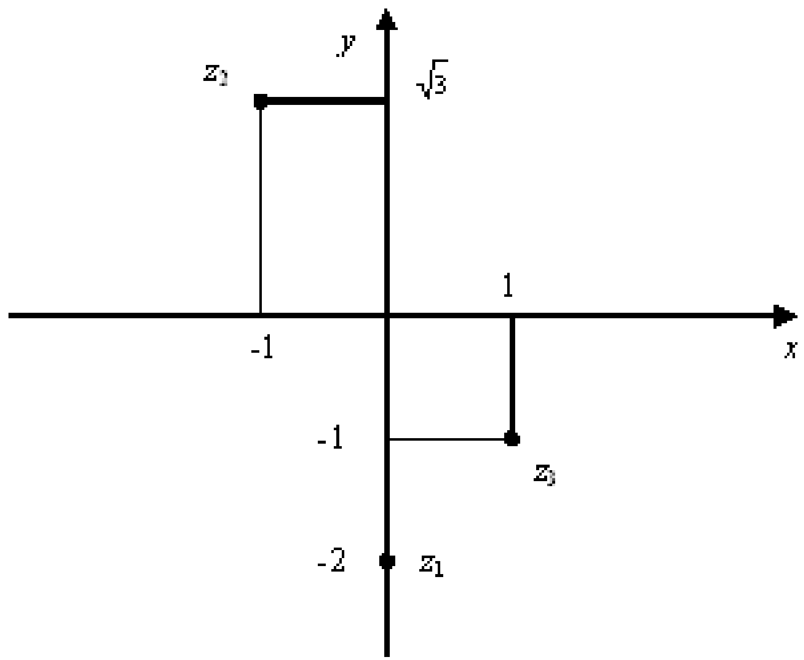


Рис. 3.

легко определить по рисунку:

$$|z_1| = 2, \arg z_1 = \frac{3\pi}{2}.$$

Следовательно, тригонометрическая форма числа z_1 имеет вид:

$$z_1 = 2(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}).$$

Для нахождения тригонометрической формы комплексного числа $z = a + bi$, где a и b не равны нулю, воспользуемся формулами

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{b}{a}, & \text{если } z \in I, IV \text{ четвертям}, \\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{b}{a}, & \text{если } z \in II, III \text{ четвертям}. \end{cases}$$

Определяем $|z_2| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$. Так как точка, соответствующая z_2, лежит во II четверти, то

$$\arg z_2 = \pi + \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Получаем следующую тригонометрическую форму

$$z_2 = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}).$$

Определяем $|z_3| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Так как точка, соответствующая z_3, лежит в IV четверти, то

$$\arg z_3 = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Тригонометрическая форма принимает вид

$$z_3 = \sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})).$$

Ответ: $z_1 = 2(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}), z_2 = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}), z_3 = \sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))$. ⊠

Пример 5.11. Изобразите на плоскости множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} 1 \le |z| \le 3, \\ -\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

□ Точки, изображающие решения первого неравенства, лежат между окружностями радиусов 1 и 3 с центром в начале координат, включая сами окружности. Точки, изображающие решения второго неравенства, лежат между лучами OA и OB, не включая эти лучи. Искомая область является пересечением этих двух фигур и выделена на рисунке штриховкой, см. рис. 4. ⊠

5.5. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме

Справедлива

Теорема 5.3. 1. *При умножении комплексных чисел в тригонометрической форме их модули перемножаются, а аргументы складываются:*

$$|z_1|(cos\varphi_1 + isin\varphi_1)|z_2|(cos\varphi_2 + isin\varphi_2) =$$
$$= |z_1||z_2|(cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

2. *При делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются:*

$$\frac{|z_1|(cos\varphi_1 + isin\varphi_1)}{|z_2|(cos\varphi_2 + isin\varphi_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(cos(\varphi_1 - \varphi_2) + isin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

3. $z^{-1} = \frac{1}{|z|}(cos(-argz) + isin(-argz))$.

Теорема 5.4. *Пусть n — целое число. Тогда*

$$(|z|(cos\varphi + isin\varphi))^n = |z|^n(cos(n\varphi) + isin(n\varphi)). \quad (5.9)$$

Формула (5.9) называется *формулой Муавра*. При

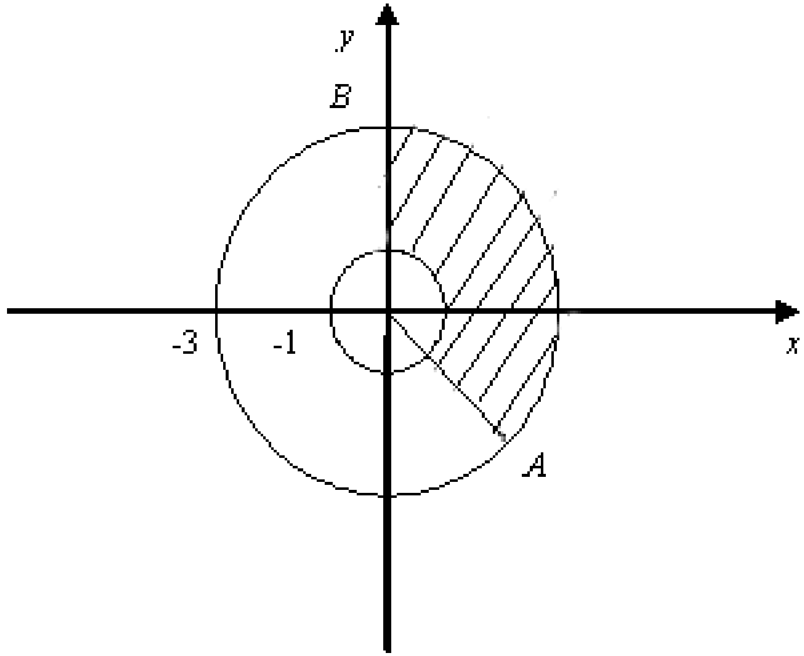


Рис. 4.

$|z| = 1$ получаем

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi).$$

Последнее равенство можно использовать для выражения синусов и косинусов кратных углов через синусы и косинусы угла φ. Например, при $n = 3$ имеем

$$\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 =$$
$$= \cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi\sin\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi - i\sin^3\varphi.$$

Приравнивая действительные и мнимые части, получаем

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi;$$

$$\sin 3\varphi = -\sin^3\varphi + 3\cos^2\varphi\sin\varphi.$$

Пример 5.12. Вычислите $z_1z_2z_3$, $\frac{z_1z_2}{z_3}$ и z_1^{-1}, где z_1, z_2 и z_3 — комплексные числа из примера 5.9.

□

$$z_1z_2z_3 = 2\cdot5\cdot3(\cos(-\frac{\pi}{6}+\pi+\frac{4}{5}\pi)+i\sin(-\frac{\pi}{6}+\pi+\frac{4}{5}\pi)) =$$

$$= 30(\cos\frac{49}{30}\pi + i\sin\frac{49}{30}\pi);$$

$$\frac{z_1z_2}{z_3} = \frac{2\cdot5}{3}(\cos(-\frac{\pi}{6}+\pi-\frac{4}{5}\pi) + i\sin(-\frac{\pi}{6}+\pi-\frac{4}{5}\pi)) =$$

$$= \frac{10}{3}(\cos\frac{\pi}{30} + i\sin\frac{\pi}{30});$$

$z_1^{-1} = \frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$. ⊠

Пример 5.13. Вычислите

$$A = \frac{3(\cos 20^0 - i\sin 20^0)\cdot 2(\cos 230^0 - i\sin 130^0)}{-\sin 210^0 - i\cos 210^0}.$$

□ Используя формулы приведения и свойства тригонометрических функций, преобразуем комплексные числа к тригонометрической форме

$$A = \frac{3(\cos(-20^0) + i\sin(-20^0))\cdot 2(\cos 230^0 + i\sin(360^0 - 130^0))}{-\sin(270^0 - 60^0) - i\cos(270^0 - 60^0)} =$$

$$= \frac{3(\cos(-20^0) + i\sin(-20^0))\cdot 2(\cos 230^0 + i\sin 230^0)}{\cos 60^0 + i\sin 60^0}.$$

Теперь, применяя правила умножения и деления комплексных чисел в тригонометрической форме, вычислим

$$A = \frac{3\cdot 2(\cos(-20^0 + 230^0) + i\sin(-20^0 + 230^0))}{\cos 60^0 + i\sin 60^0} =$$

$$= 6(\cos(210^0 - 60^0)+i\sin(210^0 - 60^0)) = 6(\cos 150^0+i\sin 150^0) =$$

$$= 6(\cos(180^0 - 30^0)+i\sin(180^0 - 30^0)) = 6(-\cos 30^0+i\sin 30^0) =$$

$$= 6(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = -3\sqrt{3} + 3i.$$

Ответ: $A = -3\sqrt{3} + 3i$ ⊠

Пример 5.14. Вычислите $(z_1z_3)^{30}$, где z_1 и z_3 — комплексные числа из примера 5.9.

□

$$(z_1z_3)^{30} = (2\cdot3)^{30}(\cos 30(-\frac{\pi}{6}+\frac{4}{5}\pi)+i\sin 30(-\frac{\pi}{6}+\frac{4}{5}\pi)) =$$

$$= 6^{30}(\cos 19\pi + i\sin 19\pi) = 6^{30}(\cos\pi + i\sin\pi) = -6^{30}.$$ ⊠

5.6. Извлечение корня из комплексного числа

Пусть $n \in \mathbb{N}$. *Корнем n-й степени* из комплексного числа z называется такое комплексное число c, что $c^n = z$. Корень n-й степени обозначается через $\sqrt[n]{z}$. Таким образом, если $c = \sqrt[n]{z}$, то $c^n = z$.

Теорема 5.5. *Пусть z — комплексное и n — натуральное числа, $n > 1$. В поле комплексных чисел корень $\sqrt[n]{z}$ при z=0 имеет единственное значение $z = 0$, а при $z \neq 0$ — n различных значений. Если*

$$z = |z|(cos\varphi + isin\varphi) \neq 0,$$

то эти значения находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}(cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + isin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}), \qquad (5.10)$$

$$k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Пример 5.15. Вычислите $\sqrt[3]{-5}$.

□ Число (-5) в тригонометрической форме записывается так

$$-5 = 5(\cos\pi + i\sin\pi).$$

По формуле (5.10) имеем

$$c_k = \sqrt[3]{-5} = \sqrt[3]{5}(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{3}), \ \ k = 0, 1, 2.$$

Отсюда

$$c_0 = \sqrt[3]{5}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt[3]{5}}{2}(1 + i\sqrt{3});$$

$$c_1 = \sqrt[3]{5}(\cos\pi + i\sin\pi) = -\sqrt[3]{5};$$

$$c_2 = \sqrt{5}(\cos\tfrac{5}{3}\pi + i\sin\tfrac{5}{3}) = \tfrac{\sqrt[3]{5}}{2}(1 - i\sqrt{3}).$$ ⊠

Пример 5.16. Вычислите $(-1 + i\sqrt{3})^6$, $\sqrt[4]{-1 + i\sqrt{3}}$.

□ В примере 5.10 найдена тригонометрическая форма комплексного числа $-1 + i\sqrt{3}$, а именно $-1 + i\sqrt{3} = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$. Из формулы Муавра

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

при $n = 6$ имеем

$$(-1 + i\sqrt{3})^6 = (2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}))^6 =$$

$$= 2^6(\cos\frac{6 \cdot 2\pi}{3} + i\sin\frac{6 \cdot 2\pi}{3}) = 64(\cos 4\pi + i\sin 4\pi) =$$

$$= 64(\cos 0 + i\sin 0) = 64.$$

Для извлечения корня из комплексного числа используем формулу

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

где $k = \overline{0, n-1}$. Поскольку $n = 4$, то

$$z_k = \sqrt[4]{-1 + i\sqrt{3}} = \sqrt[4]{2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})} =$$

$$= \sqrt[4]{2}(\cos\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi k}{4}).$$

Полагая $k = 0, 1, 2, 3$, получим

$$z_0 = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt[4]{2}}{2};$$

$$z_1 = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) = -\frac{\sqrt[4]{2}}{2} + i\frac{\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{3}}{2};$$

$$z_2 = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}) = -\frac{\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{3}}{2} - i\frac{\sqrt[4]{2}}{2};$$

$$z_3 = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}) = \frac{\sqrt[4]{2}}{2} - i\frac{\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{3}}{2}.$$

⊠

5.7. Корни из единицы

Мультипликативная группа G называется *циклической*, если в ней имеется такой элемент a, что каждый элемент $b \in G$ является степенью элемента a, т.е. существует целое число k такое, что $b = a^k$. Этот элемент a называется *порождающим элементом* группы G. Для циклической группы G применяют обозначение $G = \langle a \rangle$. Заметим, что циклическая группа может иметь несколько порождающих. Например, аддитивная группа $\mathbb{Z}$ целых чисел порождается как числом 1, так и числом -1, т.е. $\mathbb{Z} = \langle 1\rangle = \langle -1\rangle$.

Так как $1 = \cos 0 + i \sin 0$, то из теоремы 5.5 следует

Теорема 5.6. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, тогда:*

1) *в поле комплексных чисел имеется точно n различных корней n-й степени из единицы, которые находятся по формуле*

$$\varepsilon_k = \sqrt[n]{1} = cos\frac{2k\pi}{n} + isin\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1;$$

2) *для любого целого числа m выполняется равенство $\varepsilon_1^m = \varepsilon_r$, где r — остаток от деления m на n;*

3) *комплексные корни n–й степени из единицы образуют мультипликативную циклическую группу $\langle \varepsilon_1 \rangle$ порядка n с порождающим элементом ε_1.*

Пример 5.17. Вычислите $\sqrt[n]{1}$ при $n \le 4$.

□ При $n = 2$ имеем два корня $\varepsilon_0 = 1$; $\varepsilon_1 = -1$. Множество $\{-1, 1\}$ с умножением является циклической группой $\langle -1\rangle$ порядка 2.

При $n = 3$ имеем три корня:

$$\varepsilon_0 = 1;\ \varepsilon_1 = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\varepsilon_2 = \cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Множество

$$\{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\}$$

с умножением является циклической группой $\langle -1/2 + \sqrt{3}i/2\rangle$ порядка 3. Составим таблицу умножения для этих корней.

	1	$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
1	1	$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

В частности,

$$\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-1} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-1} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

При $n = 4$ имеем четыре корня:

$$\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_1 = \cos\frac{2}{4}\pi + i\sin\frac{2}{4}\pi = i,$$

$$\varepsilon_2 = \cos\pi + i\sin\pi = -1; \quad \varepsilon_3 = \cos\frac{6}{4}\pi + i\sin\frac{6}{4}\pi = -i.$$

Множество $\{i, -1, -i, 1\}$ с умножением является циклической группой $\langle i\rangle$ порядка 4. Составим таблицу умножения для этих корней.

	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1

В частности, $i^{-1} = -i$, $(-1)^{-1} = -1$, $(-i)^{-1} = i$. ⊠

Корень n–й степени из единицы называется *примитивным* или *первообразным*, если он не является корнем из единицы никакой меньшей степени. Итак, ε_m — примитивный корень степени n из единицы, если $\varepsilon_m^n = 1$ и $\varepsilon_m^k \ne 1$ для всех $0 < k < n$.

Теорема 5.7. *Корень ε_m n–й степени из единицы будет примитивным тогда и только тогда, когда m и n взаимно просты. В частности, ε_1 и ε_{n-1} — примитивные корни n–й степени.*

Пример 5.18. Укажите примитивные корни четвертой степени из единицы.

□ Примитивными корнями четвертой степени из единицы будут корни $\varepsilon_1 = i$ и $\varepsilon_3 = -i$. ⊠

5.8. Индивидуальные задания

1. Найдите $z_1 + z_2,\ z_1 - z_2,\ z_1 \cdot z_2,\ \frac{z_1}{z_2}$.
1.1. $z_1 = 2 + i,\ z_2 = -3 - 2i$.
1.2. $z_1 = -1 + 3i,\ z_2 = 2 - i$.
1.3. $z_1 = 4 - i,\ z_2 = 1 + 3i$.
1.4. $z_1 = -1 + 4i,\ z_2 = 2 - 3i$.
1.5. $z_1 = 3 - i,\ z_2 = -2 + 3i$.
1.6. $z_1 = -4 + i,\ z_2 = 2 - i$.
1.7. $z_1 = 1 - 3i,\ z_2 = -2 + i$.
1.8. $z_1 = 4 - 3i,\ z_2 = -2 + 5i$.
1.9. $z_1 = 2 - 4i,\ z_2 = 3 + i$.
1.10. $z_1 = -3 + 2i,\ z_2 = 5 - i$.
1.11. $z_1 = -2 - 5i,\ z_2 = -1 + i$.
1.12. $z_1 = -4 + 3i,\ z_2 = 6 - i$.
1.13. $z_1 = 5 - 2i,\ z_2 = 3 + 4i$.
1.14. $z_1 = -1 - 2i,\ z_2 = 4 + 3i$.
1.15. $z_1 = 6 - 4i,\ z_2 = 4 + i$.

2. Найдите действительные значения x и y из уравнения $z_1 \cdot x + z_2 \cdot y = 2 - 5i$, где z_1 и z_2 — числа из задания 1.

3. Вычислите $\sqrt{z_1}$ и $\sqrt{z_2}$ в алгебраической форме для чисел z_1 и z_2 из задания 1.

4. Решите уравнения
4.1. $x^2 - (2 + i)x + 7i - 1 = 0,\ x^2 - 4x + 5 = 0$.
4.2. $x^2 - (3 - 2i)x + 5 - 5i = 0,\ x^2 - 3x + 4 = 0$.

4.3. $x^2 - (5 - 3i)x + 2 - 6i = 0,\ 2x^2 - 3x + 5 = 0$.
4.4. $x^2 + (2i - 7)x + 13 - i = 0,\ x^2 + 3x + 6 = 0$.
4.5. $x^2 - (1 + i)x + 6 + 3i = 0,\ 3x^2 - 2x + 3 = 0$.
4.6. $x^2 - 5x + 4 + 10i = 0,\ -2x^2 + x - 1 = 0$.
4.7. $(1-i)x^2 + (5-i)x + 4 + 2i = 0,\ -x^2 + 2x - 2 = 0$.
4.8. $(3 + i)x^2 + (1 - i)x - 6i = 0,\ x^2 + x + 2 = 0$.
4.9. $x^2 - (7 + i)x + 16 + 11i = 0,\ 3x^2 - 2x + 4 = 0$.
4.10. $x^2 - (3 + 2i)x + 5i + 5 = 0,\ -2x^2 + 3x - 2 = 0$.
4.11. $x^2 + (5i - 1)x - 8 - i = 0,\ 3x^2 + 5x + 3 = 0$.
4.12. $x^2 + (4i - 3)x - 7 - i = 0,\ 2x^2 - 4x + 5 = 0$.
4.13. $x^2 - (3 - 3i)x + 6 - 2i = 0,\ x^2 - 2x + 5 = 0$.
4.14. $x^2 - (5 - 6i)x + 1 - 13i = 0,\ x^2 + 3x + 5 = 0$.
4.15. $x^2 - 3x + 11 - 3i = 0,\ x^2 + 5x + 7 = 0$.

5. Изобразите на плоскости и запишите в тригонометрической форме числа z_1 и z_2.
5.1. $z_1 = 1 - i,\ z_2 = -2i$.
5.2. $z_1 = 3i,\ z_2 = -1 + i\sqrt{3}$.
5.3. $z_1 = 2 + 2i,\ z_2 = -3$.
5.4. $z_1 = -\sqrt{3} + i,\ z_2 = -i$.
5.5. $z_1 = \sqrt{12} - 2i,\ z_2 = 2i$.
5.6. $z_1 = -4,\ z_2 = 1 + i$.
5.7. $z_1 = 1,\ z_2 = -\sqrt{12} + 2i$.
5.8. $z_1 = -1 + i,\ z_2 = -i$.
5.9. $z_1 = -1 - i,\ z_2 = 6i$.
5.10. $z_1 = 1 + i\sqrt{3},\ z_2 = -2$.
5.11. $z_1 = -3i,\ z_2 = -\sqrt{3} - i$.
5.12. $z_1 = -2 - i\sqrt{12},\ z_2 = -1$.
5.13. $z_1 = 2,\ z_2 = -1 - i\sqrt{3}$.
5.14. $z_1 = \sqrt{12} + 2i,\ z_2 = -6i$.
5.15. $z_1 = 5i,\ z_2 = -\sqrt{3} - i$.

6. Вычислите
6.1. $5(\cos 350^0 - i\sin(-10^0)) \cdot 2(\cos 80^0 - i\sin 280^0)$.
6.2. $3(\cos 50^0 - i\sin 670^0) \cdot 4(\cos 290^0 + i\sin 70^0)$.
6.3. $\frac{2(\cos 220^0 + i\sin 140^0)}{(\sin 40^0 - i\cos 220^0)}$.

6.4. $3(\cos 260^0 - i\sin 130^0)\cdot 4(\sin 50^0 + i\cos(-50^0))$.

6.5. $\frac{2(\cos(-\frac{13\pi}{7})+i\sin\frac{6\pi}{7})}{6(\cos(-\frac{13\pi}{7})-i\sin\frac{6\pi}{7})}$.

6.6. $3(\cos\frac{3\pi}{4} - i\sin\frac{7\pi}{4})\cdot(\cos\frac{7\pi}{4} - i\cos\frac{3\pi}{4})$.

6.7. $\frac{5(\cos 49^0 - i\sin 229^0)}{3(\cos 41^0 - i\cos 49^0)}$).

6.8. $3(\cos 340^0 - i\sin 20^0)\cdot 2(-\sin 70^0 - i\sin 160^0)$.

6.9. $\frac{2(\cos 430^0 + i\cos 160^0)}{5(\cos 110^0 - i\sin 250^0)}$.

6.10. $5(-\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{4\pi}{3})\cdot 4(\cos\frac{5\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3})$.

6.11. $\frac{6(\cos 42^0 + i\sin 222^0)}{5(\sin 42^0 - i\sin 132^0)}$.

6.12. $(\cos\frac{7\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4})\cdot 3(\cos\frac{7\pi}{4} - i\sin\frac{3\pi}{4})$.

6.13. $\frac{3(-\sin 20^0 - i\sin 110^0)}{(\cos(-220^0) - i\sin 140^0)}$.

6.14. $7(-\sin 40^0 - i\sin 130^0)\cdot 3(\cos 40^0 - i\sin 320^0)$.

6.15. $\frac{3(\cos 190^0 - i\sin 170^0)}{(-\sin 40^0 + i\sin 50^0)}$.

7. Изобразите на плоскости множество комплексных чисел, удовлетворяющих системе неравенств

7.1. $\begin{cases} 2 \le |z| \le 4, \\ \frac{\pi}{2} \le \arg\left(\frac{z}{1+i}\right) \le \pi. \end{cases}$

7.2. $\begin{cases} 1 < \left|\frac{z}{1+i\sqrt{3}}\right| < 2, \\ -\frac{\pi}{4} \le \arg z \le \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

7.3. $\begin{cases} 1 < |z| < 3, \\ \frac{\pi}{4} \le \arg\left(\frac{z}{1-i}\right) \le \frac{3\pi}{4}. \end{cases}$

7.4. $\begin{cases} 1 \le \left|\frac{z}{\sqrt{12}-2i}\right| \le 2, \\ -\frac{\pi}{2} \le \arg z \le \pi. \end{cases}$

7.5. $\begin{cases} 2 \le |z| + 1 \le 3, \\ \frac{\pi}{3} \le \arg\left(\frac{z}{1-i\sqrt{3}}\right) \le \frac{5\pi}{6}. \end{cases}$

7.6. $\begin{cases} 2 < \left|\frac{z}{-1-i\sqrt{3}}\right| < 3, \\ \frac{\pi}{3} \le \arg z - \frac{\pi}{6} \le \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

7.7. $\begin{cases} 3 \le |z| \le 5, \\ \frac{\pi}{4} < \arg\left(\frac{z}{-1-i}\right) < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

7.8. $\begin{cases} 1 \le \left|\frac{z}{2-i\sqrt{12}}\right| \le 3, \\ -\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

7.9. $\begin{cases} 1 \le \left|\frac{z}{1+\sqrt{3}}\right| \le 3, \\ -\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}. \end{cases}$

7.10. $\begin{cases} 1 < |z| < 5, \\ -\frac{\pi}{4} \le \arg\left(\frac{z}{\sqrt{12}-2i}\right) \le \frac{\pi}{3}. \end{cases}$

7.11. $\begin{cases} 2 < \left|\frac{z}{-1-i\sqrt{3}}\right| < 3, \\ -\frac{\pi}{3} \le \arg z \le \frac{\pi}{3}. \end{cases}$

7.12. $\begin{cases} 2 \le |z| \le 6, \\ \frac{\pi}{2} < \arg\left(\frac{z}{1-i\sqrt{3}}\right) < \pi. \end{cases}$

7.13. $\begin{cases} 1 \le \left|\frac{z}{\sqrt{3}-i}\right| \le 4, \\ -\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}. \end{cases}$

7.14. $\begin{cases} 2 < |z| < 3, \\ -\frac{\pi}{4} \le \arg\left(\frac{z}{1-i}\right) \le \pi. \end{cases}$

7.15. $\begin{cases} 2 \le \left|\frac{z}{\sqrt{3}-i}\right| \le 4, \\ -\frac{\pi}{3} < \arg\left(\frac{z}{2-i\sqrt{12}}\right) < \frac{\pi}{4}. \end{cases}$

8. Вычислите

8.1. $(-1 - i\sqrt{3})^{30}$, $\sqrt[5]{-\sqrt{12}+2i}$, $\sqrt[3]{-8}$.

8.2. $(1 - i)^{40}$, $\sqrt[4]{-\sqrt{12}-2i}$, $\sqrt[4]{-16}$.

8.3. $(-\sqrt{3}+i)^{36}$, $\sqrt[6]{-2-i\sqrt{12}}$, $\sqrt[4]{i}$.

8.4. $(-1 - i)^{24}$, $\sqrt[5]{1-i\sqrt{3}}$, $\sqrt[5]{-1}$.

8.5. $(-1 + i\sqrt{3})^{30}$, $\sqrt[4]{-16-16i}$, $\sqrt[4]{-2}$.

8.6. $(-\sqrt{3} - i)^{42}$, $\sqrt[5]{-2+i\sqrt{12}}$, $\sqrt[5]{3i}$.

8.7. $(1 - i)^{24}$, $\sqrt[6]{-1-i\sqrt{3}}$, $\sqrt[4]{-2i}$.

8.8. $(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})^{36}$, $\sqrt[4]{\sqrt{12}+2i}$, $\sqrt[5]{-4}$.

8.9. $(-\sqrt{12}+2i)^{48}$, $\sqrt[5]{3-i3\sqrt{3}}$, $\sqrt[4]{-81}$.

8.10. $(-4-4i)^{20}$, $\sqrt[6]{-\sqrt{12}+2i}$, $\sqrt[3]{-8i}$.

8.11. $(1-i\sqrt{3})^{54}$, $\sqrt[4]{-5+5i}$, $\sqrt[6]{64}$.

8.12. $(\sqrt{12}+2i)^{48}$, $\sqrt[5]{1-i}$, $\sqrt[4]{-4}$.

8.13. $(-1+i)^{28}$, $\sqrt[6]{\sqrt{3}-i}$, $\sqrt[3]{8i}$.

8.14. $(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3}i)^{30}$, $\sqrt[4]{-\sqrt{3}-i}$, $\sqrt[6]{-1}$.

8.15. $(2-i\sqrt{12})^{36}$, $\sqrt[5]{3-3i}$, $\sqrt[4]{-9}$.

5.9. Дополнительные задачи

1. Для комплексных чисел z, z_1 и z_2 докажите следующие равенства:

1.1. $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = \overline{z_1 + z_2}$,

1.2. $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = \overline{z_1 z_2}$,

1.3. $\bar{z}_1^k = (\bar{z}_1)^k$ для любого $k \in \mathbb{N}$,

1.4. $|z|^2 = z\overline{z}$,

1.5. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}$,

1.6. $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$, для каких комплексных чисел z_1, z_2 имеет место равенство,

1.7. $|z_1| - |z_2| \le |z_1 - z_2|$, для каких комплексных чисел z_1, z_2 имеет место равенство.

2. Покажите, что для любых комплексных чисел z_1 и z_2 выполняется равенство $|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2(|z_1|^2+|z_2|^2)$. Выясните геометрический смысл этого равенства.

3. Вычислите для любого натурального n:

3.1. i^n,

3.2. $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^n}$,

3.3. $\frac{(1+i)^{n+2}}{(1-i)^n}$.

4. Вычислите

$$\sqrt[4]{\frac{(-1+i\sqrt{3})^{17}\cdot(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12})}{32\sqrt{2}(1-i)^7}}.$$

5. Найдите $z^{1990} + \frac{1}{z^{1990}}$, если $z^2 - z + 1 = 0$.

6. Решите уравнения:

6.1. $x^8 - 5x^4 - 6 = 0$, $x \in \mathbb{R}$,

6.2. $x^4 + 1 + i\sqrt{3} = 0$, $x \in \mathbb{R}$,

6.3. $(x+i)^4 + (x-i)^4 = 0$, $x \in \mathbb{R}$,

6.4. $z^3 = -z$, $z \in \mathbb{C}$,

6.5. $(1-i)\overline{z} - 3iz = 2 - i$, $z \in \mathbb{C}$,

6.6. $z\overline{z} + 2\overline{z} = 3 + 2i$, $z \in \mathbb{C}$,

6.7. $z\overline{z} + 3(z - \overline{z}) = 4 + 3i$, $z \in \mathbb{C}$,

6.8. $z\overline{z} + 3(z + \overline{z}) = 3i$, $z \in \mathbb{C}$.

7. Решите систему уравнений:

7.1. $\begin{cases} ix + (1+i)y = 3 - i \\ (1-i)x - (6-i)y = 4 \end{cases}$

7.2. $\begin{cases} (2+i)x - (3+i)y = i \\ (3-i)\overline{x} + (2+i)\overline{y} = -i. \end{cases}$

8. Изобразите на плоскости множество решений системы

$$\begin{cases} |2z - 4 - 2i| \le 6, \\ |iz + 2| \ge 2, \\ -\frac{5\pi}{6} \le \arg\left(\frac{2z}{i-\sqrt{3}}\right) \le \frac{\pi}{6}. \end{cases}$$

9. Докажите, что если z_1, z_2, z_3, z_4 — различные комплексные числа и число

$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$$

действительное, то числа z_1, z_2, z_3, z_4 лежат на одной окружности или на одной прямой.

10. Изобразите на плоскости множество комплекс-

ных чисел, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} 2 \leq |z - 2i| \leq 3, \\ \frac{\pi}{2} \leq \arg z_i \leq \pi. \end{cases}$$

11. Пусть a и b — фиксированные различные комплексные числа. На комплексной плоскости найдите все точки, изображающие комплексные числа z, для которых

$$\frac{z-a}{z-b} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

где φ принимает произвольные действительные значения.

12. С помощью формулы Муавра выразите $\cos 4\alpha$ и $\sin 4\alpha$ через $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$.

13. Выразите в виде многочлена от $\sin x$ и $\cos x$ сумму $\sin 5x + \cos 3x$.

13. Докажите, что для любых целых чисел a, b, c, d произведение $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ можно представить как сумму квадратов $k^2 + l^2$ целых чисел k и l.

14. Докажите, что если m и n взаимно просты, то все корни степени mn из единицы получаются умножением корней n-й степени из единицы на корни m-й степени из единицы.

15. Среди комплексных чисел, удовлетворяющих условию $|z - 25i| \leq 15$, найдите число с наименьшим положительным аргументом.

16. Докажите, что бинарное отношение ρ на множестве всех комплексных чисел является отношением эквивалентности. Изобразите классы эквивалентности на плоскости.

16.1. $z_1 \rho z_2$ тогда и только тогда, когда $|z_1| = |z_2|$,

16.2. $z_1 \rho z_2$ тогда и только тогда, когда $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}$,

16.3. $z_1 \rho z_2$ тогда и только тогда, когда $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}^+$. Здесь $\mathbb{R}^+$ — множество всех положительных действительных чисел.

17. Докажите, что объединение всех корней n-й степени из комплексных чисел z и $-z$ совпадает с множеством всех корней $2n$-й степени из z^2.

18. Пусть $n, s \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$. Верно ли равенство $\sqrt[ns]{z^s} = \sqrt[n]{z}$?

19. Решите уравнения:

19.1. $(z+1)^n + (z-1)^n = 0$,

19.2. $(z+1)^n - (z-1)^n = 0$,

19.3. $(z+i)^n + (z-i)^n = 0$.

20. Пусть z — первообразный корень нечетной степени n из единицы. Докажите, что $(-z)$ — первообразный корень степени $2n$ из единицы.

21. Пусть z — первообразный корень степени $2n$ из единицы. Докажите, что z или $(-z)$ — первообразный корень степени n из единицы.

22. Обозначим через $\sigma(n)$ сумму всех первообразных корней степени n из единицы. Докажите следующие утверждения:

22.1. $\sigma(1) = 1$,

22.2. Если $n > 1$, то $\Sigma_{d|n}\sigma(d) = 0$,

22.3. Если p — простое число, то $\sigma(p) = -1$,

22.4. Если p — простое число, $k > 1$, то $\sigma(p^k) = 0$,

22.5. Если r и s — взаимно простые натуральные числа, то $\sigma(rs) = \sigma(r)\sigma(s)$.

23. Является ли число $\frac{2+i}{2-i}$ корнем некоторой степени из единицы?

24. Найти комплексные числа, соответствующие противоположным вершинам квадрата, если двум другим вершинам соответствуют комплексные числа z и w.

25. Найти комплексные числа, соответствующие вершинам правильного n-угольника, если двум смежным вершинам соответствуют комплексные числа z_0 и z_1.

6. МАТРИЦЫ

6.1. Матрицы над полями

Пусть $\mathbb{P}$ — поле, m и n — натуральные числа. *Матрицей размера* m *на* n или $m \times n$*-матрицей над* $\mathbb{P}$ назовем прямоугольную таблицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ & & \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (6.1)$$

составленную из элементов поля $\mathbb{P}$.

Элементы $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ имеют первым индексом число i и составляют в матрице A ее i-ю строку, которая обозначается через $A_i = (a_{i1}a_{i2}\dots a_{in})$. Элементы $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$ имеют вторым индексом число j и составляют j-й столбец матрицы A, который обозначается через

$$A^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = [a_{1j}a_{2j}\dots a_{mj}].$$

Элемент a_{ij} стоит в i-й строке и j-ом столбце. Матрицу A записывают в виде таблицы (6.1), либо сокращенно

$$A = (a_{ij}),\ i = 1, 2, \dots, m,\ j = 1, 2, \dots, n,$$

либо перечислив все ее строки

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_m \end{pmatrix} = [A_1A_2\dots A_m],$$

либо перечислив все ее столбцы $A = (A^1\ A^2\ \dots\ A^n)$.

При $m = n$ говорят, что $A = (a_{ij})$ — *квадратная матрица порядка* n.

Две матрицы над полем $\mathbb{P}$ считаются равными, если они имеют одинаковые размеры и элементы, стоящие на одинаковых местах, совпадают. Другими словами, $m \times n$-матрица $A = (a_{ij})$ и $k \times l$-матрица $B = (b_{ij})$ считаются равными, если $m = k,\ n = l,\ a_{ij} = b_{ij}$ для всех i и j.

Матрицу, все элементы которой равны нулевому элементу поля $\mathbb{P}$, называют *нулевой матрицей* и обозначают через O, т.е.

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Квадратная $n \times n$-матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

называется *единичной* и обозначается через E_n. Здесь 1 — единичный элемент поля $\mathbb{P}$. Если из контекста понятен размер матрицы, то вместо E_n будем писать E.

Диагональной матрицей называют квадратную

$n \times n$-матрицу
$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & d \end{pmatrix},$$
у которой на диагонали находятся элементы $a, b, \dots c, d$ из поля $\mathbb{P}$, а вне диагонали — нулевой элемент поля $\mathbb{P}$. При $a = b = \dots = c = d$ диагональную матрицу
$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix}$$
называют *скалярной* и обозначают через aE_n.

Верхней треугольной матрицей называют квадратную $n \times n$-матрицу
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix},$$
а *нижней треугольной матрицей* — матрицу
$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & & \\ a_{n-11} & a_{n-12} & a_{n-13} & \dots & a_{n-1n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ступенчатой называется матрица $A = (a_{ij})$, обладающая следующими двумя свойствами: если i-я строка нулевая, то и $(i+1)$-я строка также нулевая; если первые ненулевые элементы i-й и $(i+1)$-й строк располагаются в столбцах с номерами k и l, то $k < l$. Например, матрицы
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
ступенчатые, а матрицы
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
не являются ступенчатыми. Обратим внимание на то, что в определении ступенчатой матрицы не требуется, чтобы она была квадратной.

6.2. Операции над матрицами

Пусть теперь $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ — $m \times n$-матрицы над полем $\mathbb{P}$. *Суммой* $A + B$ матриц A и B называется $m \times n$-матрица $C = (c_{ij})$ такая, что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для всех i и j, т.е.
$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ & \dots & \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ & \dots & \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (6.2)$$

Теорема 6.1. *Пусть $\mathbb{P}$ — поле, m и n — натуральные числа, и $M_{m,n}(\mathbb{P})$ — совокупность всех $m \times n$-матриц с элементами из $\mathbb{P}$. Тогда $M_{m,n}(\mathbb{P})$ с операцией сложения (6.2) является абелевой группой. В частности, сложение матриц обладает следующими свойствами:*

1) *сложение матриц коммутативно, т.е.* $A + B = B + A$,

2) *сложение матриц ассоциативно, т.е.* $(A + B) + C = A + (B + C)$,

3) $A + O = O + A = A$, *где* O *— нулевая матрица.*

Здесь A, B и C — любые элементы аддитивной группы $M_{m,n}(\mathbb{P})$.

Произведением uA *элемента* $u \in \mathbb{P}$ *и матрицы* A называется $m \times n$-матрица $D = (d_{ij})$ такая, что $d_{ij} = ua_{ij}$ для всех i и j, т.е.

$$u \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ & \ldots & \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ua_{11} & \ldots & ua_{1n} \\ & \ldots & \\ ua_{m1} & \ldots & ua_{mn} \end{pmatrix}.$$

Теорема 6.2. *Пусть* $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{P})$, 0 *и* 1 *— нулевой и единичный элементы поля* $\mathbb{P}$, (-1) *— противоположный к* 1 *элемент,* $u, v \in \mathbb{P}$. *Тогда:*

1) $1A = A, 0A = O$,

2) $A + (-1)A = (-1)A + A = O$,

3) $(uv)A = u(vA)$,

4) $u(A + B) = uA + uB$,

5) $(u + v)A = uA + vA$.

Матрица $(-1)A$ называется *противоположной* к матрице A и обозначается через $-A$.

Рассмотрим теперь умножение матриц. Пусть $A = (a_{ij})$ — $m \times k$-матрица, $B = (b_{ij})$ — $k \times n$-матрица. Обратим внимание на то, что сразу требуется, чтобы число столбцов первой матрицы было равно числу строк второй матрицы. Произведение i-й строки A_i матрицы A на j-й столбец B^j матрицы B определяется так:

$$A_i B^j = (a_{i1} a_{i2} \ldots a_{ik})[b_{1j} b_{2j} \ldots b_{kj}] =$$

$$= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{l=1}^{k} a_{il}b_{lj}. \qquad (6.3)$$

Итак, произведением строки на столбец является элементом поля $\mathbb{P}$, который вычисляется по формуле (6.3).

Произведением $m \times k$-матрицы $A = (a_{ij})$ и $k \times n$-матрицы $B = (b_{ij})$ называется $m \times n$-матрица

$$AB = \begin{pmatrix} A_1B^1 & A_1B^2 & \ldots & A_1B^n \\ A_2B^1 & A_2B^2 & \ldots & A_2B^n \\ & \ldots & & \\ A_mB^1 & A_mB^2 & \ldots & A_mB^n \end{pmatrix}. \qquad (6.4)$$

Для получения первой строки произведения AB надо первую строку матрицы A умножить на каждый столбец матрицы B. Для получения второй строки произведения AB надо вторую строку матрицы A умножить на каждый столбец матрицы B, и т.д. Поэтому в произведении AB на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит элемент поля $\mathbb{P}$, равный произведению i-й строки матрицы A на j-й столбец матрицы B.

Вывод: 1. Перемножать можно матрицы A и B, у которых число столбцов первого сомножителя A равно числу строк второго сомножителя B. Если это требование выполняется, то говорят, что *умножение матриц* A *и* B *определено.* Отметим, что умножение квадратных матриц одного порядка всегда определено.

2. Перемножать матрицы следует по правилу "строки на столбец". Строка первого сомножителя умножается на столбец второго сомножителя по формуле (6.3).

3. Произведением является $m \times n$-матрица, определяемая формулой (6.4). Здесь m — число строк

первого сомножителя, n — число столбцов второго сомножителя.

Пример 6.1. Перемножить матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\square$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) & 1\cdot 4 + 2\cdot 0 & 1\cdot 3 + 2\cdot 2 \\ 0\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) & 0\cdot 4 + (-1)\cdot 0 & 0\cdot 3 + (-1)\cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что умножение матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

не определено. $\boxtimes$

Пример 6.2. Вычислить значение многочлена $f(x) = x^2 - 2x + 3$ от матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\square$ Так как $f(A) = A^2 - 2A + 3E_2$, то

$$f\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} +$$

$$+3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $f\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$. $\boxtimes$

Пример 6.3. Найти 2×2-матрицу X, удовлетворяющую условию

$$2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\square$ Пусть $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$, тогда

$$2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 - x_{11} & 4 - x_{12} \\ 6 - x_{21} & 8 - x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Две матрицы равны, если равны элементы, стоящие на одинаковых местах. Поэтому последнее равенство матриц приводит к уравнениям $2-x_{11} = 3, 4-x_{12} = 0$, $6 - x_{21} = 0$, $8 - x_{22} = 3$. Откуда $x_{11} = -1$, $x_{12} = 4$, $x_{21} = 6$, $x_{22} = 5$.

Ответ: $X = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$. $\boxtimes$

Теорема 6.3. *Операции над матрицами обладают следующими свойствами:*

1) *если A — $m\times n$-матрица, то $AE_n = E_mA = A$,*

2) *умножение матриц ассоциативно; более точно, если определено одно из произведений $(AB)C, A(BC)$, то определено и другое, и $(AB)C = A(BC)$,*

3) *умножение и сложение матриц связаны двумя законами дистрибутивности; более точно:*

3.1) *если определено одно из выражений $(A + B)C, AC+BC$, то определено и другое, и $(A+B)C = AC + BC$,*

3.2) *если определено одно из выражений $A(B + C), AB + AC$, то определено и другое, и $A(B + C) = AB + AC$,*

4) *$u(AB) = (uA)B = A(uB)$ для любого $u \in \mathbb{P}$ и любых матриц A и B, для которых умножение AB определено.*

Заметим, что умножение матриц некоммутативно. Примером служат следующие матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot(-1)+0\cdot(-2) & 1\cdot 2+0\cdot 3 \\ 2\cdot(-1)+3\cdot(-2) & 2\cdot 2+3\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -8 & 13 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Теорема 6.4. *Пусть $\mathbb{P}$ — поле, m — натуральное число, и $M_m(\mathbb{P})$ — совокупность всех квадратных $m\times m$-матриц с элементами из $\mathbb{P}$. Тогда $M_m(\mathbb{P})$ с операциями сложения (6.2) и умножения (6.4) является некоммутативным кольцом с единицей E_m.*

Кольцо $M_m(\mathbb{P})$ называется *полным матричным кольцом размерности m над полем $\mathbb{P}$.*

Пусть $A = (a_{ij})$ — $m\times n$-матрица. Матрица, у которой i-й столбец совпадает с i-й строкой матрицы A при любом $i = 1, 2, 3, \ldots, m$, называется *транспонированной к матрице A* и обозначается через A^T. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ & & \ldots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ & & \ldots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

транспонированная матрица имеет вид

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{i1} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{i2} & \ldots & a_{m2} \\ & & \ldots & & & \\ a_{1j} & a_{2j} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{mj} \\ & & \ldots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{in} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Теорема 6.5. *Пусть $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ — $m\times n$-матрицы, $u \in \mathbb{P}$. Тогда:*

1) $(A^T)^T = A$,

2) $u(A^T) = (uA)^T$,

3) $(A+B)^T = A^T + B^T$,

4) *если определено произведение AB, то* $(AB)^T = B^T A^T$.

Пример 6.4. Вычислить $2A - BC + 3A^T$, если

$$A = \begin{pmatrix} -2i & 4 \\ i & i-3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□ Перемножим матрицы B и C:

$$BC = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot 1+0\cdot 2+2\cdot(-1) & 3\cdot(-2)+0\cdot(-1)+2\cdot 1 \\ 0\cdot 1+1\cdot 2+2\cdot(-1) & 0\cdot(-2)+1\cdot(-1)+2\cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3-2 & -6+2 \\ 2-2 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$2A - BC + 3A^T = 2\begin{pmatrix} -2i & 4 \\ i & i-3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -2i & i \\ 4 & i-3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4i & 8 \\ 2i & 2i-6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6i & 3i \\ 12 & 3i-9 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4i-1-6i & 8-(-4)+3i \\ 2i-0+12 & 2i-6-1+3i-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-10i & 12+3i \\ 12+2i & -16+5i \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -1-10i & 12+3i \\ 12+2i & -16+5i \end{pmatrix}$. ⊠

Пример 6.5. Решить матричное уравнение

$$-2X - A^T + (B-3A)^T = A,$$

где $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

□ Исходное уравнение имеет вид

$$-2X - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^T + (\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix})^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$-2X - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -5 & -11 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$-2X + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 3 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$-2X + \begin{pmatrix} -5 & -7 \\ 4 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$-2X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & -7 \\ 4 & -14 \end{pmatrix},$$

$$-2X = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -2 & 17 \end{pmatrix},$$

$$X = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -2 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 1 & -\frac{17}{2} \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 1 & -\frac{17}{2} \end{pmatrix}$. ⊠

Пример 6.6. Решить систему матричных уравнений

$$\begin{cases} 2X - Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ 3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

□ Умножим первое уравнение системы на 2 и сложим со вторым.

$$4X - 2Y + 3X + 2Y = 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$7X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

откуда

$$X = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 0 \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

Умножим первое уравнение системы на (-3) и сложим его со вторым, умноженным на 2.

$$-6X + 3Y + 6X + 4Y = -3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$7Y = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, Y = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -1 \\ \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 0 \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -1 \\ \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$. ⊠

Пример 6.7. Найти матрицы $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ над полем $\mathbb{C}$, для которых $A^2 - 4A + 5E = O$. Здесь E, O — единичная и нулевая 2×2-матрицы.

□ Согласно условию

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2+b^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4a & 4b \\ 4b & 4a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a^2+b^2-4a+5 & 2ab-4b \\ 2ab-4b & a^2+b^2-4a+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из последнего равенства получим систему

$$\begin{cases} a^2+b^2-4a+5=0 \\ 2ab-4b=0. \end{cases}$$

Из второго уравнения $b(2a-4)=0$ следует, что либо $b=0$, либо $2a-4=0$. Если $b=0$, то из первого уравнения системы $a^2-4a+5=0$ получим $a_1=2-i$, $a_2=2+i$. Если $2a-4=0$, т.е. $a=2$, то из первого уравнения получаем $b^2=-1$, откуда $b_1=i$, $b_2=-i$.

Ответ:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2-i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2+i \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 2 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 2 & -i \\ -i & 2 \end{pmatrix}.$$

⊠

6.3. Элементарные преобразования строк матриц

Пусть $A=(a_{ij})$ — $k\times l$-матрица над полем $\mathbb{P}$. *Элементарными преобразованиями строк матрицы* A называются следующие преобразования:

1) умножение какой-либо строки матрицы A на ненулевой элемент поля $\mathbb{P}$,

2) прибавление к строке матрицы A другой ее строки, умноженной на элемент поля $\mathbb{P}$.

Лемма 6.6. 1. *С помощью элементарных преобразований можно поменять местами любые две строки матрицы.*

2. *Элементарные преобразования обратимы, т.е. если матрица B получается из A в результате какого-нибудь элементарного преобразования, то и матрица A может быть получена из B в результате элементарного преобразования.*

Ввиду п. 1 леммы 6.6 перестановку строк также можно причислять к элементарным преобразованиям.

Теорема 6.7. *Всякую матрицу с помощью элементарных преобразований можно привести к ступенчатому виду.*

Пример 6.8. С помощью элементарных преобразований строк привести к ступенчатому виду матрицу $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

□ Умножим первую строку матрицы A на 2 и сложим со второй строкой. Затем первую строку умножим на 3 и сложим с третьей. В итоге получим матрицу

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 7 & -8 \\ 0 & 5 & 11 & -11 \end{pmatrix}.$$

Теперь вторую строку умножим на $(-\frac{5}{3})$ и сложим с третьей

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$. ⊠

6.4. Обратная матрица

Квадратная матрица A порядка n называется *обратимой*, если существует матрица B такая, что $AB = BA = E_n$. В этом случае матрица B называется *обратной к матрице* A. Если матрица A — обратимая матрица, то обратная к ней матрица обозначается через A^{-1}.

Лемма 6.8. 1. *Если матрица обратима, то существует точно одна ей обратная матрица.*

2. *Если A и B — обратимые матрицы одного порядка, то AB обратима и $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.*

Теорема 6.9. *Обратимую матрицу A с помощью элементарных преобразований можно превратить в единичную матрицу. Применяя эти же преобразования в том же порядке к единичной матрице, получим обратную матрицу A^{-1}.*

На практике удобно поступать так. К матрице A дописывают справа единичную матрицу E и над полученной матрицей $(A \mid E)$ проводят элементарные преобразования, в результате которых приходят к матрице $(E \mid A^{-1})$.

Пример 6.9. С помощью элементарных преобразований найти обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

☐ Запишем матрицу $(A \mid E)$, где E — единичная матрица, и преобразуем ее с помощью элементарных преобразований так, чтобы получилась матрица вида $(E \mid B)$. Матрица B будет обратной к матрице A.

Выпишем матрицу $(A \mid E)$:

$$(A \mid E) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сделаем следующие элементарные преобразования: первую строку матрицы $(A \mid E)$ умножим на (-2) и прибавим ко второй, затем первую строку прибавим к третьей. В итоге получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь в получившейся матрице вторую строку прибавим к третьей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вторую строку умножим на (-1), а третью — на $(\frac{1}{2})$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Третью строку умножим на 2 и прибавим ко второй, а затем третью прибавим к первой

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Осталось вторую строку умножить на (-1) и прибавить к первой

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

В итоге получили матрицу вида $(E \mid B)$, поэтому
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$
Сделаем проверку.
$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Ответ. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. ⊠

Пример 6.10. С помощью элементарных преобразований найти обратную матрицу для матрицы
$$A = \begin{pmatrix} -2i & 4 \\ i & i-3 \end{pmatrix}.$$

☐ Запишем матрицу $(A|E)$ и приведем ее с помощью элементарных преобразований строк к матрице $(E|B)$.
$$(A|E) = \begin{pmatrix} -2i & 4 & 1 & 0 \\ i & i-3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Умножим первую строку на $(\frac{1}{2})$ и прибавим ко второй строке.
$$\begin{pmatrix} -2i & 4 & 1 & 0 \\ 0 & i-1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$
Умножим первую строку на $(\frac{1}{2}i)$, а вторую на $(-\frac{1}{2}(i+1))$.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2i & \frac{1}{2}i & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4}i-\frac{1}{4} & -\frac{1}{2}i-\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

К первой строке прибавим вторую, умноженную на $(-2i)$.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2}+i & -1+i \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \end{pmatrix}.$$

Получим матрицу вида $(E|B)$, поэтому
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}+i & -1+i \\ -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \end{pmatrix}.$$
Сделаем проверку:
$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} -2i & 4 \\ i & i-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}+i & -1+i \\ -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}+i & -1+i \\ -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2i & 4 \\ i & i-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$
Ответ: $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}+i & -1+i \\ -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \end{pmatrix}$ ⊠

6.5. Индивидуальные задания

1. Вычислите $AB, BA, B^TA, ABC, CAB, B^TC$.

1.1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} i & -2 \\ 1 & 3i \end{pmatrix}$.

1.2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} i-1 & 1 \\ 2 & i \end{pmatrix}$.

1.3. $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&-1&4\\2&-2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3&2\\1&-4\\-2&-2\end{pmatrix}$,
$C=\begin{pmatrix}2i&-3\\0&i+2\end{pmatrix}$.

1.4. $A=\begin{pmatrix}-2&3&1\\0&2&1\\1&2&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-3&2\\-2&6&-4\end{pmatrix}$,
$C=\begin{pmatrix}2&i+1\\-1&i\end{pmatrix}$.

1.5. $A=\begin{pmatrix}-3&0&1\\0&2&3\\-1&-1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&3\\-5&2\\-1&5\end{pmatrix}$,
$C=\begin{pmatrix}-1&-i\\2i&3\end{pmatrix}$.

1.6. $A=\begin{pmatrix}3&1&-1\\-2&0&1\\2&-1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5&-1\\2&-3\\3&2\end{pmatrix}$,
$C=\begin{pmatrix}2i&0\\-2&i-1\end{pmatrix}$.

1.7. $A=\begin{pmatrix}4&0&5\\-2&1&3\\-1&1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-3&-1\\3&-9&-3\end{pmatrix}$,
$C=\begin{pmatrix}0&-2\\i-1&3i\end{pmatrix}$.

1.8. $A=\begin{pmatrix}1&3&1\\0&2&-1\\1&-2&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2&1\\1&2\\-3&-1\end{pmatrix}$,
$C=\begin{pmatrix}-1&i\\2&4i\end{pmatrix}$.

1.9. $A=\begin{pmatrix}-1&2&4\\0&5&1\\1&1&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&-4&-6\\1&-2&-3\end{pmatrix}$,
$C=\begin{pmatrix}-2i&0\\i-2&-1\end{pmatrix}$.

1.10. $A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&2&0\\-1&1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4&3\\-1&2\\-3&1\end{pmatrix}$,
$C=\begin{pmatrix}i+2&-3\\1&i\end{pmatrix}$.

1.11. $A=\begin{pmatrix}3&-4&1\\1&0&5\\-1&1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4&2&4\\2&-1&-2\end{pmatrix}$,
$C=\begin{pmatrix}i&i-3\\0&2\end{pmatrix}$.

1.12. $A=\begin{pmatrix}1&3&1\\-2&1&3\\1&0&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2&1\\4&5\\2&6\end{pmatrix}$,
$C=\begin{pmatrix}0&-3\\i&2i\end{pmatrix}$.

1.13. $A=\begin{pmatrix}3&1&-2\\1&3&2\\-2&4&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&4&4\end{pmatrix}$,
$C=\begin{pmatrix}-1&i\\-i+1&0\end{pmatrix}$.

1.14. $A=\begin{pmatrix}-3&2&0\\1&4&3\\2&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2&1\\3&5\\5&4\end{pmatrix}$,
$C=\begin{pmatrix}-i-1&2\\0&-1\end{pmatrix}$.

1.15. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ i-2 & 2i \end{pmatrix}$.

2. Вычислите $C^3 - 5C^2 + 2C + 4\mathrm{E}_2$ для матрицы C из задания 1.

3. Решите матричное уравнение

$$5X + 3A - 2C^T = (2A - 3C)^T,$$

где C — матрица из задания 1, матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Решите систему матричных уравнений

$$\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} n-8 & 1 \\ 0 & n+3 \end{pmatrix}, \\ 2X + (n-16)Y = \begin{pmatrix} n+5 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

где $n \in \{1, 2, \ldots, 15\}$.

5. Найдите матрицы $A = \begin{pmatrix} z & \omega \\ \omega & z \end{pmatrix}$ над полем $\mathbb{C}$, удовлетворяющие условию:

5.1. $A^2 + A + E_2 = O$.
5.2. $2A^2 - A + 2E_2 = O$.
5.3. $3A^2 + A + E_2 = O$.
5.4. $A^2 + 2A + 5E_2 = O$.
5.5. $-2A^2 + 3A - 2E_2 = O$.
5.6. $-A^2 + A - 2E_2 = O$.
5.7. $5A^2 + 3A + 2E_2 = O$.
5.8. $A^2 + 3A + 4E_2 = O$.
5.9. $2A^2 - 3A + 5E_2 = O$.
5.10. $3A^2 - 2A + E_2 = O$.
5.11. $4A^2 + 3A + 2E_2 = O$.
5.12. $-2A^2 + 3A - 4E_2 = O$.

5.13. $6A^2 - 2A + E_2 = O$.
5.14 $5A^2 - 2A + 2E_2 = O$.
5.15. $-3A^2 + A - 2E_2 = O$.

6. Приведите матрицы A, B, C из задания 1 к ступенчатому виду.

7. Для матрицы F с помощью элементарных преобразований строк вычислите обратную матрицу.

7.1. $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 7 \\ -3 & -3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$.

7.2. $F = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

7.3. $F = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

7.4. $F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 5 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

7.5. $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & -3 & 8 \\ 2 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

7.6. $F = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 5 & 6 \\ -2 & 4 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

7.7. $F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

7.8. $F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 3 \\ -3 & 3 & -5 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

7.9. $F = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & -2 & -1 & 9 \end{pmatrix}$.

7.10. $F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

7.11. $F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

7.12. $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & 7 & 5 \\ 3 & 3 & -8 & -4 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

7.13. $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -5 & 5 & -4 \\ 3 & 6 & -4 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

7.14. $F = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & -1 & -9 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 9 & 6 \end{pmatrix}$.

7.15. $F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -6 & -4 \\ 2 & -2 & -9 & -7 \\ -1 & 2 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

8. С помощью элементарных преобразований найти матрицу, обратную матрице C из задания 1.

6.6. Дополнительные задачи

1. Вычислите при любом натуральном n:

1.1. $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}^n$, 1.2. $\begin{pmatrix} i & i \\ 0 & i \end{pmatrix}^n$, 1.3. $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$,

1.4. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n$, 1.5. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$,

1.6. $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n$.

2. В кольцах $M_2(\mathbb{P})$ и $M_3(\mathbb{P})$, $\mathbb{P} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5\}$, найдите все матрицы, квадраты которых равны:

2.1. нулевой матрице,
2.2. единичной матрице,
2.3. скалярной матрице,
2.4. диагональной матрице,
2.5. верхней треугольной матрице,
2.6. нижней треугольной матрице.

3. Пусть $f(x) = x^2 - (a+d)x + (ad - bc)$ и $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Докажите, что $f(A) = O$.

4. Решите и исследуйте уравнение

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

относительно переменных x, y, z, u.

5. Решите систему матричных уравнений:

5.1. $\begin{cases} X+Y=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\\ 2X+3Y=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\end{cases}$

5.2. $\begin{cases} 2X-Y=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\\ -4X+2Y=\begin{pmatrix}0&-2\\2&0\end{pmatrix}\end{cases}$

6. Докажите, что для матриц $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ равенство $AB - BA = E$ невозможно.

7. Пусть $A \in M_n(\mathbb{R})$ и $A^2 = A$. Докажите, что $(2A-E)^2 = E$.

8. Две квадратные матрицы A и B одного порядка называются перестановочными, если $AB = BA$. Покажите, что сумма и произведение матриц, перестановочных с данной матрицей, также перестановочны с ней.

9. Пусть $A \in M_n(\mathbb{R})$. Докажите, что матрица A перестановочна с каждой диагональной матрицей порядка n тогда и только тогда, когда матрица A сама диагональная.

10. Докажите, что матрицы

$$A = \begin{pmatrix}1&a_{12}&a_{13}\\0&1&a_{23}\\0&0&1\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}1&b_{12}&b_{13}\\0&1&b_{23}\\0&0&1\end{pmatrix}$$

перестановочны тогда и только тогда, когда $a_{12}b_{23} = b_{12}a_{23}$.

11. Пусть A и B — квадратные матрицы одного порядка над числовым полем. Докажите равносильность следующих утверждений:

11.1. $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

11.2. $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

11.3. Матрицы A и B перестановочны.

12. Пусть A — обратимая квадратная матрица.

Докажите, что $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

13. Матрица S называется симметрической, если $S^T = S$. Пусть A — произвольная квадратная матрица. Докажите, что симметрическими являются матрицы A^T, AA^T, $A + A^T$.

14. Матрица K называется кососимметрической, если $K^T = -K$. Пусть A — произвольная квадратная матрица. Докажите, что $A - A^T$ — кососимметрическая матрица.

15. Докажите, что каждая квадратная матрица представима в виде суммы симметрической и кососимметрической матриц.

16. Докажите, что

16.1. произведение двух симметрических или кососимметрических матриц является симметрической матрицей тогда и только тогда, когда эти матрицы перестановочны,

16.2. произведение симметрической и кососимметрической матриц является кососимметрической матрицей тогда и только тогда, когда эти матрицы перестановочны,

17. Найдите все квадратные матрицы, перестановочные со всеми квадратными матрицами того же порядка.

18. Найдите все верхние треугольные матрицы, перестановочные со всеми верхними треугольными матрицами того же порядка.

19. Докажите, что в кольце квадратных матриц над полем

19.1. обратимая матрица не является делителем нуля,

19.2. любая матрица либо обратима, либо является делителем нуля.

20. Пусть A и B — квадратные матрицы одного порядка. Докажите, что если матрица $E + AB$ обра-

тима, то матрица $E+BA$ также обратима.

21. С помощью элементарных преобразований строк приведите к ступенчатому виду матрицы

$$\begin{pmatrix}\overline{0} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{1}\\ \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{1}\\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{0}\end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_2),\ \begin{pmatrix}\overline{0} & \overline{2} & \overline{0} & \overline{0}\\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{2}\\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{0}\end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_3).$$

22. Докажите, что элементарное преобразование строк матрицы равносильно умножению слева на некоторую обратимую матрицу.

24. Являются ли кольцами следующие множества матриц с операциями сложений и умножения:

24.1. $\left\{ \begin{pmatrix} a & 3b\\ b & a\end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbb{Z}\right\}$,

24.2. $\left\{ \begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix} \mid a,b\in 3\mathbb{Z}\right\}$,

24.3. $\left\{ \begin{pmatrix} a & b\\ b & a\end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbb{Q}\right\}$.

25. Докажите, что матрица $A \in M_2(\mathbb{R})$ является делителем нуля. Найдите все такие матрицы $B\in M_2(\mathbb{R})$, для которых $AB=O$:

25.1. $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}$,

25.2. $A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}$,

25.3. $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$,

25.4. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$,

25.5. $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$.

7. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

7.1. Определитель матрицы и его свойства

Будем рассматривать только квадратные матрицы. Пусть $A=(a_{ij})$ — квадратная матрица порядка n над полем $\mathbb{P}$. Нулевой и единичный элементы поля $\mathbb{P}$ будем называть также нулем и единицей и обозначать через 0 и 1.

Определителем или *детерминантом* матрицы A называется элемент $\det A$ поля $\mathbb{P}$, вычисляемый по следующей формуле

$$\det A = \sum_{\tau\in S_n} \operatorname{sgn}\tau\, a_{1\tau(1)}a_{2\tau(2)}\dots a_{n\tau(n)}. \tag{7.1}$$

Здесь суммирование ведется по всем перестановкам из симметрической группы S_n степени n, поэтому в правой части формулы (7.1) число слагаемых равно $n!$. Для каждой перестановки $\tau\in S_n$ вычисляется свое слагаемое $\operatorname{sgn}\tau\, a_{1\tau(1)}a_{2\tau(2)}\dots a_{n\tau(n)}$. Каждое произведение

$$a_{1\tau(1)}a_{2\tau(2)}\dots a_{n\tau(n)} \tag{7.2}$$

состоит из n сомножителей. Поскольку первые индексы — это номера строк матрицы A, то произведение (7.2) содержит элемент из каждой строки. Перестановка различные элементы переводит в различные, поэтому вторые индексы $\tau(1),\tau(2),\dots,\tau(n)$ все различны. Но вторые индексы — номера столбцов матрицы A, поэтому в произведении (7.2) имеется элемент из каждого столбца. Так как $\operatorname{sgn}\tau\in\{-1,+1\}$, то каждое слагаемое (7.2) умножается на (-1) или на $(+1)$ в зависимости от того нечетная перестановка τ или четная.

Таким образом, определитель матрицы A — это сумма $n!$ всевозможных произведений $\mathrm{sgn}\tau a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\dots a_{i_nj_n}$ элементов матрицы A, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца, где

$$\tau = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix} \in S_n.$$

Определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

также обозначается через

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Эта запись особенно удобна при решении примеров.

Пример 7.1. Выберите натуральные числа i, j, k таким образом, чтобы слагаемое $a_{4i}a_{2k}a_{32}a_{j4}$ входило в развернутое выражение определителя четвертого порядка со знаком минус.

☐ В развернутое выражение определителя (7.1) при $n = 4$ данное слагаемое входит в виде $\mathrm{sgn}\tau a_{4i}a_{2k}a_{32}a_{j4}$, где перестановка

$$\tau = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & j \\ i & k & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $j = 1$, а для i и k возможны 2 случая:

1) $i = 1$, $k = 3$. Тогда

$$\tau = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (41)(23), \mathrm{sgn}\tau = (-1)^{4-2} = 1.$$

2) $i = 3$, $k = 1$. Тогда

$$\tau = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (4321), \mathrm{sgn}\tau = (-1)^{4-1} = -1.$$

Таким образом, при $i = 3$, $j = 1$, $k = 1$ слагаемое $a_{4i}a_{2k}a_{32}a_{j4}$ имеет знак минус.

Ответ: $i = 3$, $j = 1$, $k = 1$. ⊠

Пример 7.2. Вычислить определители матриц порядка $n \le 3$.

☐ Очевидно, 1×1-матрица (a) имеет определитель равный a.

Пусть $n = 2$. Тогда

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Применяя формулу (7.1) получаем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{\tau \in S_2} \mathrm{sgn}\tau a_{1\tau(1)}a_{2\tau(2)} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Пусть $n = 3$. Тогда

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\},$$

Применяя формулу (7.1) получаем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{\tau \in S_3} \mathrm{sgn}\tau a_{1\tau(1)}a_{2\tau(2)}a_{3\tau(3)} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

⊠

Формулы вычисления определителй второго и третьего порядков легче запомнить с помощью следующих рисунков.

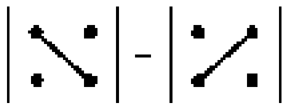


Рис. 5. Определитель 2×2-матрицы

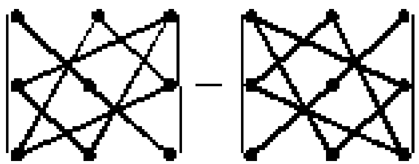


Рис. 6. Определитель 3×3-матрицы

Пример 7.3. Вычислите определители

$$\begin{vmatrix} i & -1 \\ 2 & i+2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

☐ Первый и второй определитель вычислим, используя приведенные рисунки.

$$\begin{vmatrix} i & -1 \\ 2 & i+2 \end{vmatrix} = i \cdot (i+2) - (-1) \cdot 2 = i^2 + 2i + 2 = 1 + 2i.$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot4\cdot1 + 1\cdot2\cdot2 + (-1)\cdot0\cdot(-1) - 2\cdot4\cdot(-1) -$$

$$-3 \cdot 0 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 \cdot 1 = 12 + 4 + 8 + 1 = 25.$$

Ответ: $1 + 2i$, 25, 54. ⊠

Определитель вида

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

называется *определителем Вандермонда*. Можно доказать, что он вычисляется по формуле

$$V = \prod_{1 \le j < i \le n} (a_i - a_j).$$

Определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 4 & 25 & 1 \end{vmatrix}$$

является определителем Вандермонда, поэтому

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 4 & 25 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2^2 & 5^2 & (-1)^2 \end{vmatrix} = (5-2)\cdot(-1-2)\cdot(-1-5) = 54.$$

Пример 7.4. Вычислить определитель верхней треугольной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{7.3}$$

☐ В сумме (7.1) интересны только ненулевые слагаемые. Очевидно, $a_{n\tau(n)}$ может быть отлично от нуля только при $\tau(n) = n$. Элемент $a_{n-1\tau(n-1)} \ne 0$ только при $\tau(n-1) = n-1$. И т.д. Итак, в сумме (7.1) только одно слагаемое $a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$ может быть отлично от нуля. Это слагаемое соответствует тождественной перестановке, знак которой равен $(+1)$. Таким образом, определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов

$$\det A = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}.$$

Аналогично, определитель нижней треугольной матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ & & \ldots & & & \\ a_{n-11} & a_{n-12} & a_{n-13} & \ldots & a_{n-1n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

равен произведению диагональных элементов.

В частности, определитель диагональной матрицы равен произведению диагональных элементов, а определитель единичной матрицы равен единичному элементу поля. ⊠

Рассмотрим теперь свойства определителей. Поскольку в любом слагаемом суммы (7.1) есть представитель каждой строки и каждого столбца, то выполняется

Свойство 1. *Определитель матрицы с нулевой строкой или нулевым столбцом равен нулю.*

Свойство 2. *При транспонировании матрицы определитель не меняется, т.е.* $\det A = \det A^T$.

Свойство 2 позволяет все утверждения об определителе матрицы, высказанные для строк, переносить на определители матриц, связанные со столбцами.

Свойство 3. *Если матрица B получается из матрицы A после умножения каждого элемента некоторой строки на элемент $v \in \mathbb{P}$, то $detB = vdetA$. Другими словами, при вычислении определителя общий множитель всех элементов некоторой строки (столбца) можно выносить за знак определителя.*

Пример 7.5. Пусть $v \in \mathbb{P}, A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{P})$. Вычислить $\det vA$.

□ Произведением vA является матрица

$$vA = \begin{pmatrix} va_{11} & \ldots & va_{1n} \\ & \ldots & \\ va_{n1} & \ldots & va_{nn} \end{pmatrix}.$$

Выносия число v из каждой строки, получаем, что $\det(vA) = v^n \det A$. ⊠

Свойство 4. *Если каждый элемент k-й строки матрицы A есть сумма двух слагаемых $a_{ki} + a'_{ki}$, то определитель матрицы A равен сумме определителей двух матриц, у которых все строки, кроме k-й, прежние, а k-я строка первой матрицы состоит из первых слагаемых a_{ki}, а второй — из вторых слагаемых a'_{ki}, т.е.*

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ & \ldots & \\ a_{k1}+a'_{k1} & \ldots & a_{kn}+a'_{kn} \\ & \ldots & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ & \ldots & \\ a_{k1} & \ldots & a_{kn} \\ & \ldots & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ & \ldots & \\ a'_{k1} & \ldots & a'_{kn} \\ & \ldots & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Свойство 5. *Если матрица B получается из матрицы A после перестановки двух строк, то* $\det B = -\det A$.

Свойство 6. *Определитель матрицы с пропорциональными строками равен нулю. В частности, нулю равен определитель матрицы, содержащей две одинаковые строки.*

Свойство 7. *Если все элементы некоторой строки умножить на элемент $v \in \mathbb{P}$ и сложить с элементами другой строки, то получим матрицу, определитель которой равен определителю исходной матрицы.*

Пример 7.6. Используя свойства определителей, вычислите

$$\begin{vmatrix} 57823 & -23251 \\ 56823 & -22251 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

□ Вторую строку первого определителя умножим на (-1) и прибавим к первой строке.

$$\begin{vmatrix} 57823 & -23251 \\ 56823 & -22251 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1000 & -1000 \\ 56823 & -22251 \end{vmatrix}.$$

Вынесем за знак определителя общий множитель первой строки.

$$\begin{vmatrix} 1000 & -1000 \\ 56823 & -22251 \end{vmatrix} = 1000 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 56823 & -22251 \end{vmatrix}.$$

Теперь первый столбец прибавим к второму.

$$1000 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 56823 & -22251 \end{vmatrix} = 1000 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 56823 & 34572 \end{vmatrix} =$$

$$= 1000 \cdot 1 \cdot 34572 = 34572000.$$

Второй определитель вычислим, приведя его к треугольному виду. Вначале поменяем местами первую и вторую строки, а затем получившуюся первую строку умножим на 2 и на (-1) и сложим соответственно со второй и третьей строками.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Поменяем местами второй и третий столбец, а затем

вторую и третью строку.

$$- \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -5.$$

Ответ: 34572000, -5. ⊠

Пример 7.7. Доказать, что на число 11 делится определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 6 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

□ Так как числа 11, 121, 1089 и 605 делятся на 11, то, умножая первый столбец на 1000, второй на 100, третий на 10 и прибавляя все это к четвертому столбцу, получим матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 121 \\ 1 & 0 & 8 & 1089 \\ 0 & 6 & 0 & 605 \end{pmatrix}$$

По свойству 7 определители матриц B и A равны, а по свойству 3 определитель матрицы B делится на 11, так как на 11 делятся все элементы последнего столбца. ⊠

7.2. Определитель произведения матриц

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mm} \end{pmatrix}$$

две квадратные матрицы порядков n и m соответственно над полем $\mathbb{P}$. Введем матрицу

$$X = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_{1n+1} & \dots & a_{1n+m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_{nn+1} & \dots & a_{nn+m} \\ 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & b_{m1} & \dots & b_{mm} \end{pmatrix},$$

где

$$C = \begin{pmatrix} a_{1n+1} & \dots & a_{1n+m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{nn+1} & \dots & a_{nn+m} \end{pmatrix}$$

— произвольная $n \times m$-матрица над полем $\mathbb{P}$. Ясно, что X является $(n+m) \times (n+m)$-матрицей. Аналогично строятся матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & C \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C & A \\ B & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 7.1. *Для построенных матриц справедливы равенства:*

$$1) \quad det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix} = detA detB,$$

$$2) \; det \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & C \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} C & A \\ B & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{nm} detA detB.$$

Пример 7.8. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & a & 0 \\ b & 0 & -b & 0 \\ 0 & c & 0 & c \\ d & d & -d & -d \end{pmatrix}.$$

☐ Переставив 2-й и 3-й столбцы, получим матрицу

$$B = \begin{pmatrix} a & a & 0 & 0 \\ b & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & c \\ d & -d & d & -d \end{pmatrix}.$$

Так как $\det A = -\det B$, а

$$\det B = \det \begin{pmatrix} a & a \\ b & -b \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} c & c \\ d & -d \end{pmatrix}$$

по теореме 7.1, то $\det A = -4abcd$. ⊠

На основе теоремы 7.1 легко доказывается

Теорема 7.2. *Определитель произведения матриц равен произведению определителей, т.е. если A и B — квадратные матрицы одного порядка, то $detAB = detA detB$.*

Невырожденной называют матрицу, определитель которой отличен от нулевого элемента поля.

Теорема 7.3. 1. *Обратимая матрица является невырожденной.*

2. *Если A — обратимая матрица, то $detA^{-1} = (detA)^{-1}$*

7.3. Миноры и алгебраические дополнения

Пусть $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{P})$. *Минором элемента a_{kl}* называется определитель матрицы, полученной из матрицы A после вычеркивания k-й строки и l-го столбца. Минор элемента a_{kl} обозначим через M_{kl}. Минор является элементом поля $\mathbb{P}$. Элемент $(-1)^{k+l}M_{kl} \in \mathbb{P}$ называется *алгебраическим дополнением элемента a_{kl}* и обозначается через A_{kl}.

Лемма 7.4. *Если равны нулю все элементы некоторой строки (столбца) квадратной матрицы, кро-*

ме одного, то определитель равен произведению этого элемента на его алгебраическое дополнение.

Теорема 7.5. *Определитель квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения, т.е.*

$$detA = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \ldots + a_{kn}A_{kn} =$$
$$= a_{1l}A_{1l} + a_{2l}A_{2l} + \ldots + a_{nl}A_{nl}.$$

Пример 7.9. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ a & b & c & d \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

□ Применим теорему 7.5 к элементам второй строки

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ a & b & c & d \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -a \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+b \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} + d \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$= 5(a + b + c + d)$. ⊠

Теорема 7.6. *Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю, т.е.*

$$a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \ldots + a_{kn}A_{in} = 0 \text{ при } k \neq i,$$
$$a_{1l}A_{1j} + a_{2l}A_{2j} + \ldots + a_{nl}A_{nj} = 0 \text{ при } l \neq j.$$

7.4. Ранг матрицы

Пусть $A = (a_{ij})$ — $k \times l$-матрица. Зафиксируем натуральное число r, не превосходящее k и l. Выделим в матрице r строк с номерами $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$ и r столбцов с номерами $j_1 < j_2 < \ldots < j_r$. Элементы матрицы A, стоящие на пересечении отмеченных строк и отмеченных столбцов, образуют квадратную матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \ldots & a_{i_1j_r} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \ldots & a_{i_2j_r} \\ & & \ldots & \\ a_{i_rj_1} & a_{i_rj_2} & \ldots & a_{i_rj_r} \end{pmatrix}.$$

порядка r. Определитель этой матрицы называется *минором r-го порядка матрицы A*. Конечно, для каждого $r < \min\{k, l\}$ можно составить несколько миноров r-го порядка.

Ранее рассматривался минор M_{ij} элемента квадратной матрицы A порядка n. Ясно, что минор M_{ij} элемента будет минором $(n-1)$-го порядка матрицы A.

Лемма 7.7. *Если в матрице A все миноры r-го порядка равны нулю, то равны нулю все миноры более высокого порядка.*

Рангом ненулевой матрицы A называется такое натуральное число r, что среди миноров r-го порядка матрицы A имеется хотя бы один не равный нулю, а все миноры $(r+1)$-го порядка, если такие можно составить, равны нулю. Ранг матрицы A обозначается через $r(A)$. Ранг ненулевой матрицы всегда ≥ 1. У нулевой матрицы все элементы равны нулю и ее ранг считают равным 0.

Если $r(A) = r$, то для $m > r$ в силу леммы 7.7 в матрице A все миноры m-го порядка равны нулю.

Поэтому ранг ненулевой матрицы A — это наивысший порядок отличных от нуля миноров.

Пример 7.10. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

□ В матрице A строки пропорциональны. По свойству 6 определителей любой минор r-го порядка, $r \geq 2$, этой матрицы равен нулю. Поэтому ее ранг равен 1. ⊠

Теорема 7.8. *При элементарных преобразованиях ранг матрицы не меняется. В частности, при элементарных преобразованиях невырожденная квадратная матрица остается невырожденной.*

Теорема 7.9. *Ранг ступенчатой матрицы равен числу ее ненулевых строк.*

Из теорем 7.8 и 7.9 получаем, что для вычисления ранга матрицы A следует:

1) привести матрицу A к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований,

2) число ненулевых строк получившейся ступенчатой матрицы будет рангом матрицы A.

Пример 7.11. Вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

□ С помощью элементарных преобразований приведем матрицу A к ступенчатому виду

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & -3 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & -3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $r(A) = 3$. ⊠

Пример 7.12. Вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & -2 & 0 \\ -11 & -9 & -5 & 1 & 0 \\ 11 & 9 & 5 & -1 & 0 \\ -22 & -18 & -10 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

□ С помощью элементарных преобразований наполним нулями верхний правый угол матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & -2 & 0 \\ -11 & -9 & -5 & 1 & 0 \\ 11 & 9 & 5 & -1 & 0 \\ -22 & -18 & -10 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -17 & -14 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 9 & 5 & -1 & 0 \\ -22 & -18 & -10 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -17 & -14 & -7 & 0 & 0 \\ 11 & 9 & 5 & -1 & 0 \\ -22 & -18 & -10 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $r(A) = 3$. ⊠

7.5. Формула обратной матрицы

Для квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ порядка n построим матрицу

$$A' = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ & & \dots & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

которую назовем *присоединенной (или взаимной) матрицей к матрице* A. Чтобы получить присоединенную матрицу A', надо поставить вместо каждого элемента a_{ij} его алгебраическое дополнение A_{ij}, а затем перейти к транспонированной матрице.

Если a — ненулевой элемент поля $\mathbb{P}$, то обратный ему элемент a^{-1} условимся также обозначать через $\frac{1}{a}$. В частности, обратный элемент к определителю $\det A$ невырожденной матрицы A будем обозначать через $\frac{1}{\det A}$.

Теорема 7.10. *Квадратная матрица обратима тогда и только тогда, когда она невырождена. Если A невырождена, то $A^{-1} = \frac{1}{detA}A'$.*

Итак, для невырожденной матрицы A формула обратной матрицы имеет вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}A' = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ & & \dots & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Пример 7.13. Найти обратную к матрице 2-го порядка.

☐ Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Найдем все алгебраические дополнения:

$$A_{11} = a_{22}, A_{12} = -a_{21}, A_{21} = -a_{12}, A_{22} = a_{11}.$$

Поэтому присоединенная матрица принимает вид

$$A' = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Если det A$=a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, то

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

⊠

Пример 7.14. Найти обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} i & -2 \\ 1-i & 3i \end{pmatrix}.$$

☐ Вычислим определитель матрицы A.

$$\begin{vmatrix} i & -2 \\ 1-i & 3i \end{vmatrix} = i \cdot 3i - (-2 \cdot (1-i)) = -1 - 2i.$$

Найдем все алгебраические дополнения:

$$A_{11} = 3i, A_{12} = -1 + i, A_{21} = 2, A_{22} = i.$$

Следовательно,

$$A^{-1} = \frac{1}{-1-2i}\begin{pmatrix} 3i & 2 \\ -1+i & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} - \frac{3}{5}i & -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i \\ -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i & -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} - \frac{3}{5}i & -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i \\ -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i & -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & -2 \\ 1-i & 3i \end{pmatrix} = E.$$

Аналогично,

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} i & -2 \\ 1-i & 3i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{6}{5} - \frac{3}{5}i & -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i \\ -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i & -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i \end{pmatrix} = E.$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} - \frac{3}{5}i & -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i \\ -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i & -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i \end{pmatrix}$. ⊠

Пример 7.15. Найти обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\square$ Вычислим определитель матрицы A, а затем найдем присоединенную матрицу.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 5 + 4 - 2 - 5 - 4 = 6.$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3, A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 9, A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3, A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -7,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -2, A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2.$$

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \\ 9 & -7 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \\ 9 & -7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку.

$$A^{-1}A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \\ 9 & -7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, AA^{-1}=E.

Ответ. $A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \\ 9 & -7 & 2 \end{pmatrix}.$ $\boxtimes$

Пример 7.16. Найти обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$ Вычислим A^{-1} по формуле обратной матрицы.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Найдем $\det A$ с помощью разложения по элементам второй строки:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+1 \cdot (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2.$$

Так как $\det A = -2 \neq 0$, то обратная матрица A^{-1} существует. Найдем алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Таким образом,

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Вычислим A^{-1} с помощью элементарных преобразований строк. Запишем матрицу $(A \mid E)$ и преобразуем ее с помощью элементарных преобразований к виду $(E \mid B)$. Матрица B и будет обратной для матрицы A.

$$(A \mid E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \mapsto$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \mapsto$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \mapsto$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \mapsto$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \mapsto$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) = (E \mid A^{-1}).$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. ⊠

7.6. Индивидуальные задания

1. Найдите такие значения i, j, k, чтобы произведение m входило в формулу (7.1) определителя матрицы шестого порядка со знаком минус.

1.1. $m = a_{2i}a_{41}a_{j3}a_{5k}a_{12}a_{64}$.
1.2. $m = a_{j3}a_{14}a_{5i}a_{k1}a_{26}a_{45}$.
1.3. $m = a_{32}a_{i1}a_{46}a_{1j}a_{2k}a_{63}$.
1.4. $m = a_{62}a_{i1}a_{4j}a_{25}a_{5k}a_{34}$.
1.5. $m = a_{4i}a_{j2}a_{36}a_{k5}a_{61}a_{53}$.
1.6. $m = a_{ij}a_{13}a_{4k}a_{62}a_{54}a_{31}$.
1.7. $m = a_{2i}a_{32}a_{j6}a_{k5}a_{51}a_{63}$.
1.8. $m = a_{16}a_{i3}a_{4j}a_{k1}a_{25}a_{32}$.
1.9. $m = a_{44}a_{2j}a_{k3}a_{65}a_{i6}a_{31}$.
1.10. $m = a_{26}a_{3j}a_{1k}a_{55}a_{64}a_{i1}$.
1.11. $m = a_{11}a_{2i}a_{63}a_{4k}a_{j6}a_{34}$.
1.12. $m = a_{i6}a_{2j}a_{5k}a_{13}a_{34}a_{62}$.
1.13. $m = a_{15}a_{i2}a_{j4}a_{51}a_{36}a_{2k}$.
1.14. $m = a_{23}a_{4k}a_{j6}a_{5i}a_{11}a_{34}$.
1.15. $m = a_{42}a_{i5}a_{66}a_{3j}a_{1k}a_{51}$.

2. Вычислите определители матриц A, B, C.

2.1. $A = \begin{pmatrix} 3i & -1 \\ 2 & 3i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 13547 & 13647 \\ 28423 & 28523 \end{pmatrix}$,

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.2. $A = \begin{pmatrix} 2-i & 1 \\ 2 & i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 23528 & 43621 \\ 24528 & 44621 \end{pmatrix}$,

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.3. $A = \begin{pmatrix} 3-i & 2i \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 10159 & 6523 \\ 11259 & 7623 \end{pmatrix}$,

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.4. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2+i \\ 3i & i+1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 12353 & 17829 \\ 12363 & 17839 \end{pmatrix}$,

$$C = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

2.5. $A = \begin{pmatrix} 6-i & 8 \\ -2i & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 21351 & -22351 \\ 16273 & -17273 \end{pmatrix}$,

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.6. $A = \begin{pmatrix} 4i & 3+2i \\ 5 & -5+i \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} -13297 & 26153 \\ -13397 & 26253 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.7. $A = \begin{pmatrix} 8i & 9-i \\ -1 & 3i+2 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 17324 & -11526 \\ 27324 & -21526 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.8. $A = \begin{pmatrix} -3-i & 2 \\ 1 & 6+i \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 14326 & 15326 \\ -95623 & -96623 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.9. $A = \begin{pmatrix} 4+i & 6-i \\ 9i & 2 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} -35201 & 26731 \\ 35211 & -26741 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -4 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.10. $A = \begin{pmatrix} -7+i & 6i \\ 6-i & 7 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 27802 & 28802 \\ 11935 & 12935 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.11. $A = \begin{pmatrix} 5-2i & -2 \\ -i & 4+3i \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 17932 & 25113 \\ 13932 & 21113 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

2.12. $A = \begin{pmatrix} 6-i & 7+2i \\ 8i & 1 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 33253 & -16821 \\ 31253 & -14821 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

2.13. $A = \begin{pmatrix} -4i & 2+3i \\ -1 & 1+2i \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 71815 & -23526 \\ 71805 & -23516 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.14. $A = \begin{pmatrix} 3i-1 & 2 \\ i & 2i+3 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 84434 & -84534 \\ 12796 & -12896 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

2.15. $A = \begin{pmatrix} -4+3i & 2i \\ 5-i & -3 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 66437 & 41432 \\ -66337 & -41332 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислите определители матриц F и H приведением их к треугольному виду.

3.1. $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 7 \\ -3 & -3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$,

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3.2. $F = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$,

$$H = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & -4 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.3. $F = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$,

$$H = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.4. $F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 5 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$,

$$H = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.5. $$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & -3 & 8 \\ 2 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

3.6. $$F = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 5 & 6 \\ -2 & 4 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 7 \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3.7. $$F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 6 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.8. $$F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 3 \\ -3 & 3 & -5 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & 4 & 3 \\ 3 & -3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.9. $$F = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & -2 & -1 & 9 \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.10. $$F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.11. $$F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 1 \\ -4 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.12. $$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & 7 & 5 \\ 3 & 3 & -8 & -4 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 4 & 3 \\ -4 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

3.13. $$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -5 & 5 & -4 \\ 3 & 6 & -4 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.14. $$F = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & -1 & -9 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 9 & 6 \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3.15. $$F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -6 & -4 \\ 2 & -2 & -9 & -7 \\ -1 & 2 & 1 & 10 \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Вычислите определитель.

4.1. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & -3 & 9 & -27 & 81 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 16 & -64 & 256 \end{vmatrix}.$$

4.2. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 2 & -2 & 1 \\ 9 & 16 & 4 & 4 & 1 \\ -27 & 64 & 8 & -8 & 1 \\ 81 & 256 & 16 & 16 & 1 \end{vmatrix}.$$

4.3. $$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 9 & -81 \\ 1 & 6 & 36 & 216 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \\ 1 & -4 & 16 & -64 \end{vmatrix}.$$

4.4. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 5 & 2 & -3 \\ 16 & 25 & 4 & 9 \\ -64 & 125 & 8 & -27 \end{vmatrix}.$$

4.5. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -9 & 81 & -729 & 6561 \\ 1 & 8 & 64 & 512 & 4096 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 \\ 1 & -2 & 4 & -8 & 16 \end{vmatrix}$.

4.6. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & -4 & -2 & 5 \\ 49 & 9 & 16 & 4 & 25 \\ 343 & 27 & -64 & -8 & 125 \\ 2401 & 81 & 256 & 16 & 625 \end{vmatrix}$.

4.7. $\begin{vmatrix} 1 & -8 & 64 & -512 \\ 1 & -6 & 36 & -216 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -4 & 16 & -64 \end{vmatrix}$.

4.8. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 11 & -5 & 4 & 7 \\ 121 & 25 & 16 & 49 \\ 1331 & -125 & 64 & 343 \end{vmatrix}$.

4.9. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 9 & -27 & 81 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & 36 & 216 & 1296 \end{vmatrix}$.

4.10. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -5 & 7 & -1 \\ 4 & 16 & 25 & 49 & 1 \\ -8 & 64 & -125 & 343 & -1 \\ 16 & 256 & 625 & 2401 & 1 \end{vmatrix}$.

4.11. $\begin{vmatrix} 1 & 12 & 144 & 1728 \\ 1 & -9 & 81 & -729 \\ 1 & 7 & 49 & 343 \\ 1 & -3 & 9 & -27 \end{vmatrix}$.

4.12. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 7 & 11 & -8 \\ 16 & 49 & 121 & 64 \\ -64 & 343 & 1331 & -512 \end{vmatrix}$.

4.13. $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 16 & -64 & 256 \\ 1 & -6 & 36 & -216 & 1296 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & -8 & 64 & -512 & 4096 \\ 1 & 9 & 81 & 729 & 6561 \end{vmatrix}$.

4.14. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & 1 & -4 & 5 \\ 49 & 4 & 1 & 16 & 25 \\ -343 & 8 & 1 & -64 & 125 \\ 2401 & 16 & 1 & 256 & 625 \end{vmatrix}$.

4.15. $\begin{vmatrix} 1 & -6 & 36 & -216 \\ 1 & 7 & 49 & 343 \\ 1 & -12 & 144 & -1728 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}$.

5. Вычислите определитель матрицы C из задания 2 разложением по элементам второго столбца, а определитель матрицы F из задания 3 по элементам третьей строки.

6. Вычислите определитель.

6.1. $\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$. 6.2. $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 3 & 2 \\ 3 & 1 & x & 2 \\ 5 & 3 & 1 & x \end{vmatrix}$.

6.3. $\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$. 6.4. $\begin{vmatrix} 1 & x & 2 & 1 \\ x & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & x & 1 \\ 1 & 1 & -1 & x \end{vmatrix}$.

6.5. $\begin{vmatrix} 3x & -1 & 1 & 1 \\ 2 & x & -2 & 1 \\ 1 & x & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & x \end{vmatrix}$. 6.6. $\begin{vmatrix} -x & -1 & x & 2 \\ 1 & -x & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & x & 3 \end{vmatrix}$.

6.7. $\begin{vmatrix} 1 & x & -x & 4 \\ x & 1 & -1 & 2 \\ 1 & x & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -x & 2 \end{vmatrix}$. 6.8. $\begin{vmatrix} -2 & 1 & x & -1 \\ x & 1 & 2 & x \\ 0 & x & 3 & 0 \\ 1 & -1 & x & 1 \end{vmatrix}$.

6.9. $\begin{vmatrix} 3x & -1 & 2 & 0 \\ 1 & x & -1 & 2 \\ 3 & x & -2 & x \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix}$. 6.10. $\begin{vmatrix} -1 & x & 1 & 2 \\ 3 & 1 & x & -1 \\ 0 & 2 & 1 & x \\ 1 & -1 & x & 3 \end{vmatrix}$.

6.11. $\begin{vmatrix} -1 & x & -2 & 0 \\ x & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x & 3 \end{vmatrix}$. 6.12. $\begin{vmatrix} -2 & 1 & x & 4 \\ x & 3 & 1 & 0 \\ -1 & x & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & x \end{vmatrix}$.

6.13. $\begin{vmatrix} 2x & -1 & x & 3 \\ 4 & -x & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 & 1 \\ x & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$. 6.14. $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & x \\ 2 & x & -1 & 0 \\ x & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & x & 1 \end{vmatrix}$.

6.15. $\begin{vmatrix} 4x & -2 & 3 & 1 \\ 0 & x & 2 & 1 \\ x & 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & x & 3 \end{vmatrix}$.

7. Вычислите ранг матрицы при $x = 0$ и при $x = 1$.

7.1. $\begin{pmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & x \end{pmatrix}$.

7.2. $\begin{pmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 3 & 2 \\ 3 & 1 & x & 2 \\ 5 & 3 & 1 & x \end{pmatrix}$.

7.3. $\begin{pmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}$.

7.4. $\begin{pmatrix} 1 & x & 2 & 1 \\ x & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & x & 1 \\ 1 & 1 & -1 & x \end{pmatrix}$.

7.5. $\begin{pmatrix} 3x & -1 & 1 & 1 \\ 2 & x & -2 & 1 \\ 1 & x & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & x \end{pmatrix}$.

7.6. $\begin{pmatrix} -x & -1 & x & 2 \\ 1 & -x & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & x & 3 \end{pmatrix}$.

7.7. $\begin{pmatrix} 1 & x & -x & 4 \\ x & 1 & -1 & 2 \\ 1 & x & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -x & 2 \end{pmatrix}$.

7.8. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & x & -1 \\ x & 1 & 2 & x \\ 0 & x & 3 & 0 \\ 1 & -1 & x & 1 \end{pmatrix}$.

7.9. $\begin{pmatrix} 3x & -1 & 2 & 0 \\ 1 & x & -1 & 2 \\ 3 & x & -2 & x \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{pmatrix}$.

7.10. $\begin{pmatrix} -1 & x & 1 & 2 \\ 3 & 1 & x & -1 \\ 0 & 2 & 1 & x \\ 1 & -1 & x & 3 \end{pmatrix}$.

7.11. $\begin{pmatrix} -1 & x & -2 & 0 \\ x & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x & 3 \end{pmatrix}$.

7.12. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & x & 4 \\ x & 3 & 1 & 0 \\ -1 & x & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & x \end{pmatrix}$.

7.13. $\begin{pmatrix} 2x & -1 & x & 3 \\ 4 & -x & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 & 1 \\ x & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

7.14. $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 & x \\ 2 & x & -1 & 0 \\ x & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & x & 1 \end{pmatrix}$.

7.15. $\begin{pmatrix} 4x & -2 & 3 & 1 \\ 0 & x & 2 & 1 \\ x & 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & x & 3 \end{pmatrix}$.

8. Найдите матрицы, обратные матрицам A и C из задания 2, с помощью алгебраических дополнений.

7.7. Дополнительные задачи

1. Вычислите определители:

1.1. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$, 1.2. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$,

1.3. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 1-i & -i & 1 \end{vmatrix}$,

1.4. $\begin{vmatrix} 1 & z & z^2 \\ z^2 & 1 & z \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix}$, $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$,

1.5. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & z & z^2 \\ 1 & z^2 & z \end{vmatrix}$, $z = \cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi$.

2. Вычислите коэффициенты при x^3 и x^4 в многочлене

$$f(x) = \begin{vmatrix} 2x & 1 & 3 & 1 \\ x & x & 2 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 2 & -1 & 1 & x \end{vmatrix}.$$

3. Вычислите определитель $n \times n$-матрицы.

3.1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 2 & 2 \\ & & & \dots & & \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

3.2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ & & & \dots & \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$.

3.3. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ & & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}.$

3.4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$

4. Вычислите определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}$$

над полем $\mathbb{Z}_2$.

5. Решите уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3-x^2 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 5 \\ -4 & -4 & 6 & x^2-3 \end{vmatrix} = 0.$$

6. Докажите тождество

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2,$$

вычислив определитель

$$\left| \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \right|$$

двумя способами: как определитель произведения матриц и как произведение определителей матриц.

7. Вычисляя определитель произведения матриц разными способами, получите соответствующие тождества для элементов a, b, c, d.

7.1. $\begin{pmatrix} a & b \\ 5b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d \\ 5d & c \end{pmatrix}.$

7.2. $\begin{pmatrix} c & -3d \\ d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -3b \\ b & a \end{pmatrix}.$

8. Как изменится определитель квадратной матрицы, если:

8.1. каждый элемент матрицы заменить на противоположный,

8.2. каждый элемент матрицы умножить на фиксированный элемент поля,

8.3. каждый элемент a_{ik} матрицы умножить на c^{i-k}, где c — ненулевой элемент поля?

9. Как изменится определитель квадратной матрицы, если:

9.1. строки записать в обратном порядке,

9.2. первую строку поставить на последнее место, а остальные строки сдвинуть вверх, не меняя их порядок,

9.3. к каждой строке, начиная со второй, прибавить предыдущую строку,

9.4. к каждой строке, начиная со второй, прибавить все предыдущие строки?

10. Чему равен определитель квадратной матрицы, у которой сумма строк с четными номерами равна сумме строк с нечетными номерами?

11. Пусть A — квадратная матрица над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Заменяя элементы матрицы A сопряженными комплексными числами, получим матрицу B. Как связаны между собой определители матриц A и B?

12. Пусть поле $\mathbb{P}$ имеет характеристику $\neq 2$. Докажите, что определитель кососимметрической матрицы нечетного порядка над полем $\mathbb{P}$ равен 0.

13. Пусть A' — присоединенная матрица к квадратной матрице A порядка n. Докажите, что:

13.1. $AA' = A'A = |A|E_n$,

13.2. $(A')^T = (A^T)'$,

13.3. $|A'| = |A|^{n-1}$,

13.4. $|A'| = 0$ тогда и только тогда, когда $|A| = 0$,

13.5. Если A — симметрическая матрица, т.е. $A^T = A$, то A' также является симметрической матрицей.

14. Пусть все элементы матриц A и A^{-1} являются целыми числами. Чему равны определители этих матриц?

15. Найдите сумму алгебраических дополнений всех элементов матрицы.

15.1. $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$.

15.2. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & a_2 & 0 \\ & & \dots & & \\ a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

16. Приведите матрицы к ступенчатому виду и исследуйте зависимость ранга матрицы от параметров α, β, γ:

16.1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{pmatrix}$,

16.2. $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$,

16.3. $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

17. При каких ограничениях на параметры следующие матрицы обратимы? Для обратимых матриц

найдите обратные.

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{pmatrix}.$$

18. Обратимы ли матрицы над полем $\mathbb{Z}_5$? Если да, то найдите к ним обратные матрицы.

$$\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{4} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{4} \\ \overline{1} & \overline{4} & \overline{4} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{4} \\ \overline{3} & \overline{4} & \overline{0} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{4} & \overline{2} & \overline{1} \end{pmatrix}.$$

19. Найдите наибольшее значение определителя квадратной матрицы третьего порядка, элементами которой являются числа:

19.1. 0 и 1, 19.2. 1 и -1.

20. Пусть A, B, C, D, — квадратные матрицы порядка n, причем $CD = DC$ и одна из матриц C или D невырождена. Докажите, что

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = | AD - BC | .$$

21. Докажите, что сумма алгебраических дополнений всех элементов матрицы не изменится, если к каждому элементу прибавить один и тот же элемент поля.

22. Докажите, что с операцией умножения матриц группами являются следующие множества квадратных матриц порядка n над полем $\mathbb{P}$:

22.1. множество всех невырожденных матриц,

22.2. множество всех матриц, у которых определитель равен единичному элементу поля,

22.3. множество всех матриц, у которых определитель равен единичному элементу поля, или элементу, противоположному к единичному,

22.4. множество всех скалярных невырожденных матриц, 22.5. множество всех невырожденных верхних треугольных матриц,

22.6. множество всех верхних треугольных матриц с единичными элементами на диагонали.

23. Докажите, что группа всех скалярных невырожденных матриц порядка n над полем $\mathbb{P}$ изоморфна мультипликативной группе поля $\mathbb{P}$.

24. Докажите, что множество всех матриц

$$\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R},$$

с операциями сложения и умножения матриц образует некоммутативное кольцо с единицей, в котором каждый ненулевой элемент обратим.

25. Докажите, что множество всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad a,b \in \mathbb{R},$$

с операциями сложения и умножения матриц образует поле, изоморфное полю $\mathbb{C}$ комплексных чисел.

8. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

8.1. Системы линейных уравнений, их матричная запись

Системой k линейных уравнений с l неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_l$ над полем $\mathbb{P}$ называется совокупность уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1l}x_l = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2l}x_l = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kl}x_l = b_k. \end{cases} \tag{8.1}$$

Здесь a_{ij} — элементы поля $\mathbb{P}$, которые называют *коэффициентами,* элементы b_i — также принадлежат $\mathbb{P}$, их называют *свободными коэффициентами системы.*

Решением системы (8.1) называют совокупность $c_1, c_2, \dots, c_l$ элементов поля $\mathbb{P}$, которые после подстановки соответственно вместо $x_1, x_2, \dots, x_l$ превращают каждое уравнение системы (8.1) в истинное равенство.

Система, имеющая хотя бы одно решение, называется *совместной*; а система, не имеющая ни одного решения, — *несовместной.*

Относительно системы (8.1) возникают следующие вопросы. Совместна ли система? Если система совместна, то сколько она имеет решений? Как найти все решения системы?

Цель этой главы — ответить на поставленные вопросы.

Из коэффициентов при неизвестных в системе

(8.1) составим $k \times l$-матрицу
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1l} \\ & \dots & \\ a_{k1} & \dots & a_{kl} \end{pmatrix}.$$

Эту матрицу называют *матрицей системы* (8.1). Если к ней дописать столбец свободных коэффициентов, то получим *расширенную матрицу системы*
$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1l} & b_1 \\ & \dots & & \\ a_{k1} & \dots & a_{kl} & b_k \end{pmatrix}.$$
Неизвестные образуют $(l \times 1)$-матрицу
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_l \end{pmatrix},$$
а свободные коэффициенты — $k \times 1$-матрицу
$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_k \end{pmatrix}.$$
Перемножив матрицы A и X, получим матрицу
$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1l}x_l \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2l}x_l \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kl}x_l \end{pmatrix}.$$
Матрица AX является $k \times 1$—матрицей. Ввиду (8.1) матрицы AX и B совпадают, что приводит к матричному уравнению
$$AX = B. \tag{8.2}$$
Уравнение (8.2) — есть *матричная запись системы* (8.1).

Под *элементарными преобразованиями системы линейных уравнений* (8.1) понимаются следующие преобразования:

1) умножение какого-либо уравнения на ненулевой элемент поля $\mathbb{P}$,

2) прибавление к одному уравнению другого уравнения, умноженного на произвольный элемент поля $\mathbb{P}$.

После элементарного преобразования получается новая система. Очевидно, что каждому элементарному преобразованию системы соответствует аналогичное элементарное преобразование над строками расширенной матрицы, и наоборот, каждому элементарному преобразованию над строками расширенной матрицы соответствует некоторое элементарное преобразование системы. Отсюда в силу леммы 6.6, с. 133, получаем справедливость следующего утверждения.

Лемма 8.1. 1. *С помощью элементарных преобразований можно поменять местами любые два уравнения системы.*

2. *Элементарные преобразования системы обратимы, т.е. если в результате элементарных преобразований перешли от первой системы ко второй, то можно получить первую систему в результате элементарных преобразований над второй.*

Эта лемма позволяет перестановку уравнений причислять к элементарным преобразованиям системы (8.1).

Две системы линейных уравнений от одних и тех же неизвестных называются *равносильными*, если каждое решение одной из них является решением другой, и наоборот, или если обе системы несовместны.

Теорема 8.2. *При элементарных преобразованиях система переходит в равносильную систему.*

8.2. Метод Гаусса

Метод Гаусса или *метод последовательного исключения неизвестных*, основан на приведении системы линейных уравнений к ступенчатому виду. Система линейных уравнений называется *ступенчатой*, если ее расширенная матрица ступенчатая, см. гл. 5. В силу теоремы 6.7, с. 133, справедлива

Теорема 8.3. *Всякую систему линейных уравнений с помощью элементарных преобразований можно привести к ступенчатому виду.*

Метод Гаусса заключается в том, чтобы вначале сделать систему линейных уравнений ступенчатой системой. После этого уже не представляет труда разобраться в вопросе о совместности ступенчатой системы. Отметим ещё раз, что в силу теоремы 8.2 решения ступенчатой системы совпадают с решениями исходной системы.

Сделаем два замечания. Если в процессе элементарных преобразований получаем уравнение
$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_l = 0,$$
то ему удовлетворяет все элементы поля $\mathbb{P}$. Это уравнение не влияет на поиск решений системы. Поэтому такое уравнение можно убрать из системы.

Если же приходим к уравнению
$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_l = b,\ b \neq 0,$$
то ему не удовлетворяет ни один набор элементов поля $\mathbb{P}$. Поэтому система с таким уравнением будет несовместной.

Для иллюстрации метода Гаусса рассмотрим несколько примеров.

Пример 8.1. Решить над полем $\mathbb{Q}$ систему
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 4. \end{cases}$$

□ Пользуясь элементарными преобразованиями, приведём систему к ступенчатому виду. Для этого первое уравнение умножим на (-1) и прибавим ко второму. Затем первое уравнение умножим на (-3) и прибавим ко третьему. И, наконец, первое уравнение умножим на (-2) и прибавим к четвертому
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1 \\ x_2 - 10x_3 + 17x_4 = -2 \\ -x_2 + 10x_3 - 17x_4 = 2 \\ -x_2 + 10x_3 - 17x_4 = 2. \end{cases}$$
Второе уравнение прибавим к третьему и четвертому
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1 \\ x_2 - 10x_3 + 17x_4 = -2 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0. \end{cases}$$
Последние два уравнения превратились в уравнения вида
$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 0.$$
Этим уравнениям удовлетворяют любые значения неизвестных. Поэтому два последних уравнения можно убрать.

Придадим неизвестным x_3 и x_4 произвольные значения из поля $x_3 = \lambda_3$, $x_4 = \lambda_4$. Тогда из второго уравнения значение x_2 находится однозначно:
$$x_2 = 10\lambda_3 - 17\lambda_4 - 2.$$

Из первого уравнения значение x_1 также находится однозначно
$x_1 = -2(10\lambda_3 - 17\lambda_4 - 2) + 3\lambda_3 - 5\lambda_4 + 1 = -17\lambda_3 + 29\lambda_4 + 5.$
Так как последняя система равносильна исходной, то формулы

$$\begin{cases} x_1 = -17\lambda_3 + 29\lambda_4 + 5 \\ x_2 = 10\lambda_3 - 17\lambda_4 - 2 \\ x_3 = \lambda_3 \\ x_4 = \lambda_4 \end{cases} \tag{8.3}$$

при произвольных λ_3 и λ_4 дают нам все решения заданной системы.

Ответ. Система имеет бесконечно много решений, которые определяются формулами (8.3). ⊠

Пример 8.2. Решить над полем $\mathbb{Q}$ систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11. \end{cases}$$

□ Так как каждому элементарному преобразованию системы соответствует элементарное преобразование расширенной матрицы этой системы, то вместо системы можно оперировать с расширенной матрицей.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -5 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & 11 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -8 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & 9 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & -8 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -8 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & 9 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & -18 & 36 & -40 \\ 0 & 0 & -18 & 54 & -47 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & -18 & 36 & -40 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & -7 \end{pmatrix}.$$

Здесь произведены следующие элементарные преобразования. Первую строку исходной матрицы умножали на $(-2), (-3), (-2)$ и складывали со второй, третьей и четвертой строками соответственно. В результате получили вторую матрицу. Во второй матрице к второй строке прибавили третью, умноженную на (-1), а затем получившуюся вторую строку умножили на (-1). Пришли к третьей матрице. В третьей матрице вторую строку умножали на 4 и 7 и складывали с третьей строкой и четвертой соответственно. Получили четвертую матрицу. В этой матрице третью строку умножили на (-1) и прибавили к четвертой строке. В итоге получили пятую матрицу.

Таким образом, начальная система равносильна следующей ступенчатой системе

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_2 - 2x_3 + 7x_4 = -8 \\ -18x_3 + 36x_4 = -40 \\ 18x_4 = -7 \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение

$$x_4 = -\frac{7}{18}, x_3 = \frac{13}{9}, x_2 = -\frac{43}{18}, x_1 = \frac{2}{3}.$$

Легко проверить, что эти значения превращают каждое уравнение исходной системы в верное равенство.

Ответ. Система имеет единственное решение $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = -\frac{43}{18}$, $x_3 = \frac{13}{9}$, $x_4 = -\frac{7}{18}$. ⊠

Пример 8.3. Решить над полем $\mathbb{C}$ систему

$$\begin{cases} x_1 - 2ix_2 - (3-2i)x_3 = -1 \\ 2ix_1 - x_2 + 3x_3 = 3i \\ -ix_1 + 3x_2 + ix_3 = -4i. \end{cases}$$

□ Так как каждому элементарному преобразованию системы соответствует элементарное преобразование расширенной матрицы этой системы, то вместо системы можно оперировать с расширенной матрицей.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2i & -3+2i & -1 \\ 2i & -1 & 3 & 3i \\ -i & 3 & i & -4i \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2i & -3+2i & -1 \\ 0 & -5 & 7+6i & 5i \\ 0 & 5 & -2-2i & -5i \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2i & -3+2i & -1 \\ 0 & -5 & 7+6i & 5i \\ 0 & 0 & 5+4i & 0 \end{pmatrix} = B.$$

Здесь произведены следующие элементарные преобразования. Первую строку матрицы $\tilde{A}$ умножали на $(-2i)$, i и складывали со второй и третьей строками соответственно. В результате получили вторую матрицу. Во второй матрице к третьей строке прибавили вторую. В результате получили матрицу B. Таким образом, исходная система равносильна следующей ступенчатой системе

$$\begin{cases} x_1 - 2ix_2 + (-3+2i)x_3 = -1 \\ -5x_2 + (7+6i)x_3 = 5i \\ (5+4i)x_3 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $x_3 = 0$, $x_2 = -i$, $x_1 = 1$. Легко проверить, что эти значения неизвестных превращают каждое уравнение исходной системы в верное равенство.

Ответ. Система имеет единственное решение $x_3 = 0$, $x_2 = -i$, $x_1 = 1$. ⊠

Пример 8.4. Решить над полем $\mathbb{R}$ систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = -3 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5 \\ 3x_1 + 3x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}$$

□ Приведём расширенную матрицу этой системы к ступенчатому виду.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -5 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 3 & -10 & 8 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 9 & -14 & 13 & -9 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 6 & -6 & 2 & 2 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 9 & -14 & 13 & -9 \\ 0 & 6 & -6 & 2 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 18 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 20 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, исходная система равносильна следующей системе:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 2 \\ -3x_2 + 8x_3 - 11x_4 = 9 \\ 10x_3 - 20x_4 = 18 \\ 0 = 2. \end{cases}$$

Последнее уравнение

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 2$$

не может быть удовлетворено никакими значениями неизвестных. Поэтому система несовместна.

Ответ. Система несовместна. ⊠

8.3. Теорема Крамера

Вернемся к исходной системе.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1l}x_l = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2l}x_l = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kl}x_l = b_k. \end{cases} \tag{8.1}$$

Система линейных уравнений (8.1) называется *крамеровской*, если число уравнений равно числу неизвестных и определитель матрицы системы отличен от нуля, т.е. $k = l$ и

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1l} \\ & \ldots & \\ a_{k1} & \ldots & a_{kl} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Теорема 8.4 (Крамера). *Крамеровская система имеет единственное решение, которое определяется формулами*

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \ i = 1, 2, \ldots, k, \tag{8.4}$$

где $\Delta = detA$ — определитель матрицы системы, а Δ_i — определитель матрицы, у которой в i-м столбце стоят свободные коэффициенты $b_1, \ldots, b_k$, а остальные столбцы как и у матрицы A.

Формулы (8.4) называются *формулами Крамера.*

Пример 8.5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 11. \end{cases}$$

☐ Вычислим определитель матрицы системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -6 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -5 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} = -25.$$

Вычислим определители Δ_i, $i = 1, 2, 3$, где Δ_i — определитель матрицы, у которой в i-м столбце стоят свободные коэффициенты $7, 9, 11$, а остальные столбцы как и у матрицы A.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & -1 & 1 \\ 11 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 25 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ -25 & -4 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 25 & 5 \\ -25 & -2 \end{vmatrix} = -75,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 9 & 1 \\ 1 & 11 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -5 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 25,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 9 \\ 1 & -4 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -5 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = -50.$$

По формулам (8.4) имеем

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 3, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -1, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 2.$$

Сделаем проверку. Подставим в систему $x_1 = 3, x_2 =$

$-1, x_3 = 2$. Получим

$$\begin{cases} 3 + 2\cdot(-1) + 3\cdot 2 = 7 \\ 2\cdot 3 - 1\cdot(-1) + 2 = 9 \\ 3 - 4\cdot(-1) + 2\cdot 2 = 11. \end{cases}$$

Поскольку каждое уравнение превратилось в истинное равенство, то полученные значения неизвестных являются решением исходной системы.

Ответ. $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$. ⊠

8.4. Теорема Кронекера–Капелли

Следующее теорема даёт критерий совместности системы линейных уравнений.

Теорема 8.5 (Кронекера-Капелли). *Для того, чтобы система линейных уравнений была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу расширенной матрицы.*

На основе этой теоремы получаем следующий *алгоритм решения системы линейных уравнений.*

Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1l}x_l = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2l}x_l = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kl}x_l = b_k. \end{cases} \tag{8.1}$$

Для решения этой системы поступают следующим образом.

1. Вычисляют ранг $r(A)$ матрицы системы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1l} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kl} \end{pmatrix}.$$

2. Вычисляют ранг $r(\tilde{A})$ расширенной матрицы системы

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1l} & b_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kl} & b_k \end{pmatrix}.$$

3. Если $r(A) \neq r(\tilde{A})$, то система (8.1) несовместна.

4. Если $r(A) = r(\tilde{A})$, то система (8.1) совместна. Пусть $r = r(A) = r(\tilde{A})$. В матрице A зафиксируем невырожденную квадратную матрицу D r-го порядка. От системы (8.1) оставим только те r уравнений, которые соответствуют строкам матрицы D.

4.1. Если $r = l$, то система будет крамеровской. По теореме 8.4 система имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера (8.4).

4.2. Если $r < l$, то система имеет более одного решения. В левой части уравнений системы оставляем только те неизвестные, коэффициенты которых составляют матрицу D. Их называют *главными неизвестными*. Остальные неизвестные называют *свободными*, их переносят в правую часть. Затем главные неизвестные выражают через свободные.

Пример 8.6. Совместна ли система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 0? \end{cases}$$

☐ Ранг матрицы системы и ранг расширенной матрицы находим одновременно, приводя расширенную матрицу системы к ступенчатому виду

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что ранг матрицы системы равен 2, а ранг расширенной матрицы системы равен 3. По теореме Кронекера-Капелли система несовместна.

Ответ: Несовместна. ⊠

Пример 8.7. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$$

□ Ранг матрицы системы равен 3 и равен рангу расширенной матрицы. Кроме того, ранг совпадает с числом неизвестных. Поэтому система совместна и имеет единственное решение. Определитель матрицы третьего порядка из левого верхнего угла не равен нулю

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

Поэтому можно ограничиться первыми тремя уравнениями, а четвертое можно отбросить

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Решая эту систему по теореме Крамера или методом Гаусса, получаем $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{1}{2}$.

Ответ. Система совместна и имеет единственное решение $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{1}{2}$. ⊠

Пример 8.8. Решить над полем $\mathbb{Q}$ систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

□ Составляем расширенную матрицу

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вычитаем первую строку из двух последних

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Прибавляем к третьей строке вторую, умноженную на 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что ранг получившейся матрицы равен 2. Поэтому ранг расширенной матрицы $\tilde{A}$ равен 2. Матрица системы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

с помощью проведенных элементарных преобразований превратилась в матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому ранг матрицы A равен 2 и система совместна. Ненулевой минор второго порядка можно составить из коэффициентов при x_2 и x_3 в первых двух уравнениях. Третье уравнение отбросим, а неизвестные x_1 и x_4 считаем свободными. Получаем систему

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 1 - x_1 - x_4 \\ x_2 + 2x_3 = -x_1 - x_4. \end{cases}$$

Отсюда $x_3 = -1$, $x_2 = 2 - x_1 - x_4$.

Ответ. Система совместна и имеет бесконечно много решений, которые определяются равенствами $x_2 = 2 - x_1 - x_4$, $x_3 = -1$, x_1 и x_4 — любые рациональные числа. ⊠

Пример 8.9. Решить над полем $\mathbb{C}$ систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - ix_2 + 3x_3 - 2ix_4 = 1 \\ x_1 - ix_2 + 6ix_3 - 2ix_4 = 2 \\ x_1 - ix_2 - 3x_3 - 2ix_4 = \frac{7}{5} + \frac{4}{5}i. \end{cases}$$

□ Составляем расширенную матрицу

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -i & 3 & -2i & 1 \\ 1 & -i & 6i & -2i & 2 \\ 1 & -i & -3 & -2i & \frac{7}{5} + \frac{4}{5}i. \end{pmatrix}.$$

Вычитаем первую строку из двух последних

$$\begin{pmatrix} 1 & -i & 3 & -2i & 1 \\ 0 & 0 & 6i-3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i. \end{pmatrix}.$$

Умножим вторую строку на комплексное число $\frac{1}{i-\frac{1}{2}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -i & 3 & -2i & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & -\frac{2}{5} - \frac{4}{5}i \\ 0 & 0 & -6 & 0 & \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i. \end{pmatrix}.$$

Прибавляем к третьей строке вторую

$$\begin{pmatrix} 1 & -i & 3 & -2i & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & -\frac{2}{5} - \frac{4}{5}i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0. \end{pmatrix}.$$

Ясно, что ранги матрицы системы и расширенной матрицы равны 2, поэтому система совместна. Ненулевой минор второго порядка составим из коэффициентов при x_2 и x_3 в первых двух уравнениях. Третье уравнение уберем. Неизвестные x_2 и x_3 будут главными, а x_1 и x_4 — свободными. Получаем систему

$$\begin{cases} -ix_2 + 3x_3 = 1 - x_1 + 2ix_4 \\ -ix_2 + 6ix_3 = 2 - x_1 + 2ix_4. \end{cases}$$

Отсюда $x_3 = -\frac{1}{15} - \frac{2}{15}i$, $x_2 = -\frac{2}{5} + \frac{6}{5}i - ix_1 - 2x_4$.

Ответ. Система совместна и имеет бесконечно много решений, которые определяются равенствами $x_2 = -\frac{2}{5} + \frac{6}{5}i - ix_1 - 2x_4$, $x_3 = -\frac{1}{15} - \frac{2}{15}i$, x_1 и x_4 — любые комплексные числа. ⊠

Пример 8.10. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 = -3. \end{cases}$$

Исследуйте систему на совместность. Совместную систему решите методом Гаусса, по правилу Крамера и матричным методом.

□ Совместность данной системы проверим по теореме Кронекера-Капелли. Запишем расширенную матрицу системы и приведём её к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & 1 & 10 \\ 0 & 5 & 1 & 10 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы системы A равен 3, ранг расширенной матрицы системы $\tilde{A}$ также равен 3. По теореме Кронекера-Капелли данная система линейных уравнений совместна. Поскольку $r(A) = r(\tilde{A}) = 3$ совпадает с числом неизвестных, то система имеет единственное решение.

Для решения системы методом Гаусса воспользуемся полученной ступенчатой матрицей и запишем соответствующую ступенчатую систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -3 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ -4x_3 = 0. \end{cases}$$

Из третьего уравнения находим $x_3 = 0$. Подставляя его во второе уравнение, получим $x_2 = 2$. Из первого уравнения вытекает $x_1 = -1$.

Для решения системы по правилу Крамера составим крамеровскую систему. Так как $r(A) = 3$, то в исходной системе выберем три уравнения так, чтобы определитель матрицы системы был отличным от нуля. Например, взяв второе, третье и четвёртое уравнения, получим крамеровскую систему

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 = -3, \end{cases} \tag{8.5}$$

поскольку

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -12 \neq 0.$$

Вычисляем определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 - 3 + 18 = 12,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -27 - 3 + 6 = -24,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -12 + 2 + 1 + 9 = 0.$$

По формулам Крамера (8.4) получаем

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{12}{-12} = -1,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-24}{-12} = 2,$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{-12} = 0.$$

Поскольку матричный метод применяется для крамеровских систем, то можем воспользоваться предыдущей крамеровской системой (8.5). В матричном виде эта система записывается так $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

В матричной форме решение системы имеет вид $X = A^{-1}B$. Находим

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{-12}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 1 & -3 & 7 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 1 & -3 & 7 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда $x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = 0$.

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$. ⊠

Пример 8.11. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -1. \end{cases} \qquad (8.6)$$

Исследуйте систему на совместность. Совместную систему решите методом Гаусса, по правилу Крамера и матричным методом.

☐ Исследуем систему на совместность

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & -2 & 3 & -4 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -7 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы и равен 2, то по теореме Кронекера-

Капелли система совместна. Поскольку найденные ранги меньше числа неизвестных, то система имеет бесконечно много решений.

Для решения системы (8.6) методом Гаусса используем полученную ступенчатую матрицу. Составим соответствующую ступенчатую систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ -x_2 + 3x_3 + x_4 = 7. \end{cases}$$

В соответствии с числом уравнений ступенчатой системы выбираем две главные неизвестные. В качестве главных неизвестных можно выбирать те, для которых минор 2-го порядка матрицы ступенчатой системы, составленный из коэффициентов при этих неизвестных, отличен от нуля. В частности, главными неизвестными всегда можно выбирать неизвестные, которые первыми встречаются в уравнениях ступенчатой системы.

Пусть x_1 и x_2 — главные неизвестные, тогда x_3 и x_4 — свободные неизвестные. Пусть $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$ — произвольные числа. Тогда

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 - 2\alpha + \beta \\ -x_2 = 7 - 3\alpha - \beta. \end{cases}$$

Находим главные неизвестные

$$\begin{cases} x_2 = -7 + 3\alpha + \beta \\ x_1 = -5 + \alpha + 2\beta. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = -5 + \alpha + 2\beta$, $x_2 = -7 + 3\alpha + \beta, x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, где α, β — любые числа.

Для решения системы (8.6) по правилу Крамера, необходимо выбрать в исходной системе две главные неизвестные (т.к. ранги равны 2) и составить крамеровскую систему относительно этих неизвестных. В матрице исходной системы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

выберем ненулевой минор Δ порядка $2=r(A)$. Пусть минор

$$\Delta=\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-2\neq 0$$

составлен из коэффициентов при x_2 и x_4 в первом и втором уравнениях. Тогда x_2 и x_4 — главные неизвестные, а x_1 и x_3 — свободные неизвестные. Оставим в системе уравнения, соответствующие строкам минора Δ, и придадим свободным неизвестным значения $x_1=\alpha$, $x_3=\beta$, где α и β – произвольные числа. Тогда система

$$\begin{cases} -x_2-x_4=2-\alpha-2\beta \\ x_2+3x_4=3+2\alpha+\beta \end{cases}$$

является крамеровской относительно главных неизвестных x_2 и x_4. Находим

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 2-\alpha-2\beta & -1 \\ 3+2\alpha+\beta & 3 \end{vmatrix}=9-\alpha-5\beta,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} -1 & 2-\alpha-2\beta \\ 1 & 3+2\alpha+\beta \end{vmatrix}=-5-\alpha+\beta,$$

откуда

$$x_2=\frac{\Delta_1}{\Delta}=-\frac{9}{2}+\frac{1}{2}\alpha+\frac{5}{2}\beta,\ x_4=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\beta,$$
$$x_1=\alpha,\ x_3=\beta,$$

где α и β — любые числа.

Ответ: $x_1=\alpha$, $x_2=-\frac{9}{2}+\frac{1}{2}\alpha+\frac{5}{2}\beta$, $x_3=\beta$, $x_4=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\beta$, где α, β — любые числа.

Поскольку для решения системы (8.6) матричным методом нужно составить крамеровскую систему, то

используем крамеровскую систему

$$\begin{cases} -x_2-x_4=2-\alpha-2\beta, \\ x_2+3x_4=3+2\alpha+\beta \end{cases}$$

относительно главных неизвестных x_2, x_4. В матричном виде эта система записывается $AX=B$, где

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2-\alpha-2\beta \\ 3+2\alpha+\beta \end{pmatrix}.$$

Находим

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}=A^{-1}B=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2-\alpha-2\beta \\ 3+2\alpha+\beta \end{pmatrix}=$$

$$-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 9-\alpha-5\beta \\ -5-\alpha+\beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{9}{2}+\frac{1}{2}\alpha+\frac{5}{2}\beta \\ \frac{5}{2}+\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\beta \end{pmatrix},$$

откуда

$$x_2=-\frac{9}{2}+\frac{1}{2}\alpha+\frac{5}{2}\beta,\ x_4=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\beta,\ x_1=\alpha,\ x_3=\beta,$$

где α,β — любые числа.

Ответ: $x_1=\alpha$, $x_2=-\frac{9}{2}+\frac{1}{2}\alpha+\frac{5}{2}\beta$, $x_3=\beta$, $x_4=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\beta$, где α, β — любые числа. ⊠

Пример 8.12. Исследуйте систему на совместность в зависимости от параметра α. В случае совместности найдите решения системы

$$\begin{cases} x_1-\alpha x_2+x_3=1 \\ 2x_1-3x_2+2x_3=-2 \\ -3x_1+x_2-\alpha x_3=0. \end{cases}$$

☐ Исследуем систему на совместность. Пусть $\tilde{A}$

— расширенная матрица системы.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & -\alpha & 0 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 1 & 1 \\ 0 & -3+2\alpha & 0 & -4 \\ 0 & 1-3\alpha & 3-\alpha & 3 \end{pmatrix}.$$

Если $-3+2\alpha = 0$, т.е. $\alpha = \frac{3}{2}$, то

$$\tilde{A} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \frac{-3}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & \frac{-7}{2} & \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \frac{-3}{2} & 1 & 1 \\ 0 & \frac{-7}{2} & \frac{3}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

В этом случае ранг матрицы A системы уравнений равен 2, а ранг расширенной матрицы системы $\tilde{A}$ равен 3. По теореме Кронекера-Капелли система несовместна.

Пусть $\alpha \neq \frac{3}{2}$. Тогда

$$\tilde{A} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 1 & 1 \\ 0 & -3+2\alpha & 0 & -4 \\ 0 & 1-3\alpha & 3-\alpha & 3 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3-2\alpha} \\ 0 & 1-3\alpha & 3-\alpha & 3 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3-2\alpha} \\ 0 & 0 & 3-\alpha & \frac{5+6\alpha}{3-2\alpha} \end{pmatrix}.$$

Если $\alpha = 3$, то

$$\tilde{A} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{23}{3} \end{pmatrix}.$$

В этом случае ранг матрицы системы равен 2, а ранг расширенной матрицы системы равен 3. По теореме Кронекера-Капелли система несовместна.

Пусть $\alpha \neq 3$. Тогда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы и равен 3. В этом случае система совместна и имеет единственное решение. Запишем ступенчатую систему, соответствующую ступенчатой матрице,

$$\begin{cases} x_1 - \alpha x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 = \frac{4}{3-2\alpha} \\ (3-\alpha)x_3 = \frac{5+6\alpha}{3-2\alpha}. \end{cases}$$

Из этой системы находим

$$x_3 = \frac{5+6\alpha}{(3-2\alpha)(3-\alpha)}, \; x_2 = \frac{4}{3-2\alpha}$$

$$x_1 = \frac{-2\alpha^2 - 3\alpha + 4}{(3-2\alpha)(3-\alpha)}.$$

Ответ: если $\alpha \in \{3, \frac{3}{2}\}$, то система несовместна; если $\alpha \notin \{3, \frac{3}{2}\}$, то система имеет единственное решение

$x_1 = \frac{-2\alpha^2-3\alpha+4}{(3-2\alpha)(3-\alpha)}$, $x_2 = \frac{4}{3-2\alpha}$, $x_3 = \frac{5+6\alpha}{(3-2\alpha)(3-\alpha)}$. ⊠

8.5. Однородные системы

Линейное уравнение называется *однородным*, если в нём свободный коэффициент равен нулю. Система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1l}x_l = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kl}x_l = 0, \end{cases}$$

в которой все уравнения однородные, называется *однородной системой линейных уравнений.*

Однородная система всегда совместна, так как она имеет решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_l = 0$. Это решение называется *нулевым*.

Для однородных систем представляет особый интерес вопрос о существовании ненулевых решений.

Теорема 8.6. 1. *Однородная система линейных уравнений имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы меньше числа неизвестных.*

2. *Если число уравнений в однородной системе меньше числа неизвестных, то эта система имеет ненулевое решение.*

3. *Однородная система n линейных уравнений с n неизвестными имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы системы равен нулю.*

Пример 8.13. Решить однородную систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 9x_4 = 0. \end{cases}$$

□ Вычислим ранг матрицы системы

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -9 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы системы равен 2. Поэтому система имеет ненулевые решения. Третье уравнение отбросим. Неизвестные x_1 и x_4 считаем главными, а x_2 и x_3 — свободными. Положим $x_2 = \alpha$, $x_3 = \beta$. Тогда

получаем систему

$$\begin{cases} x_1 - x_4 = \alpha - \beta \\ x_1 + 3x_4 = \alpha - \beta. \end{cases}$$

Решая систему, находим $x_4 = 0$, $x_1 = \alpha - \beta$.

Ответ. $x_1 = \alpha - \beta$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = \beta$, $x_4 = 0$, где α и β — произвольные числа. ⊠

8.6. Индивидуальные задания

1. Исследуйте систему на совместность. Совместную систему решите методом Гаусса, по правилу Крамера, матричным методом.

1.1. $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 = -8 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 15 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 = -10 \\ 2x_1 + 5x_3 = 3 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 = -2 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -8 \\ 5x_2 + x_3 = -6 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 = -7 \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 7x_3 = -5 \\ 2x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 - 8x_3 = 7 \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} 4x_1 + 5x_3 = -10 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = -5 \\ -5x_1 + x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$

1.7. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ -2x_1 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$

1.8. $\begin{cases} -3x_1 + x_3 = 3 \\ 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

1.9. $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

1.10. $\begin{cases} x_1 + 2x_3 = -1 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = -5 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -6 \end{cases}$

1.11. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 13 \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 10 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$

1.12. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ -3x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

1.13. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5 \\ -3x_1 + 4x_2 = 13 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$

1.14. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -2 \\ 4x_1 + 3x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$

1.15. $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 = 8 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -5 \end{cases}$

2. Исследуйте системы на совместность. Совместные системы решите методом Гаусса.

2.1. $\begin{cases} 3ix_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 - ix_2 + 2x_3 = i - 2 \\ -x_1 + 3x_2 - ix_3 = 3 \end{cases}$

$\begin{cases} 2ix_1 - x_2 + (1-i)x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 + ix_3 = -3 + i \\ (-1+2i)x_1 + x_3 = 4 \end{cases}$

2.2. $\begin{cases} ix_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 + ix_3 = i \\ (2+i)x_1 - 5x_2 + (3+i)x_3 = -3 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + ix_3 = -2 - 2i \\ -x_1 + 2ix_2 + 3x_3 = -3 \\ 3x_1 - ix_2 + x_3 = -1 \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} (2-i)x_1 + x_2 - x_3 = -1 - i \\ x_1 - (2+i)x_3 = 1 - 2i \\ 3x_1 - x_2 + 2ix_3 = -1 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 - 2ix_2 + 3x_3 = 2 \\ -ix_1 + x_2 - (1-i)x_3 = -2i \\ (1-i)x_1 + (1-2i)x_2 + (2+i)x_3 = 5 \end{cases}$

2.4. $\begin{cases} -x_1 + (1-2i)x_3 = -4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2i \\ -3x_1 + x_2 - 2ix_3 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} (1-i)x_1 - 2x_2 = -1 - i \\ x_1 - 2x_2 + ix_3 = 0 \\ 3x_1 - ix_2 + 2x_3 = 2 - 3i \end{cases}$

2.5. $\begin{cases} ix_1 - x_2 + (1-i)x_3 = 1 - i \\ 2x_1 + ix_2 - 3x_3 = i - 3 \\ -3x_1 + x_2 - (2+i)x_3 = -3 - 4i \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 - 2ix_2 + x_3 = -3 \\ -ix_1 + 2x_2 = -3 + i \\ (1+i)x_1 - (2+2i)x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$

2.6. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - (1+i)x_3 = 2i \\ -x_1 + ix_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 + (1-i)x_2 - ix_3 = 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3ix_2 - x_3 = -1 \\ -ix_1 + x_2 - 2x_3 = -4 - 2i \\ 3x_1 - ix_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

2.7. $\begin{cases} -2ix_1 + x_2 - x_3 = -3i \\ x_1 + (1-2i)x_2 + 2x_3 = -1 - i \\ 2x_1 - ix_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2ix_2 + 3x_3 = 1 - i \\ -x_1 + 4ix_2 - 4x_3 = 2 + i \\ 2x_1 + 2ix_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

2.8. $\begin{cases} 4x_1 - ix_2 + (1-i)x_3 = 2 \\ ix_1 + x_2 = -i \\ (4+i)x_1 + (1-i)x_2 + (1-i)x_3 = 5 \end{cases}$

$$\begin{cases} (1-2i)x_1 + x_2 - x_3 = -1 - i \\ x_1 - (1-i)x_2 + 2x_3 = 1 + i \\ -3x_1 + x_2 - (2+i)x_3 = -2i \end{cases}$$

2.9. $\begin{cases} 2ix_1 - x_2 + (1-i)x_3 = 3 \\ x_1 - (1+2i)x_2 = 2 + 2i \\ -2x_1 + 4x_2 - ix_3 = -6 - 2i \end{cases}$

$$\begin{cases} ix_1 - (2+i)x_2 - x_3 = -1 \\ 2ix_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4i \\ ix_1 + ix_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$$

2.10. $\begin{cases} x_1 - 4ix_2 + (1-i)x_3 = 2 + i \\ -3x_1 + x_2 - ix_3 = 2 + 2i \\ 4x_1 - (1+4i)x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 - 4ix_2 + x_3 = 0 \\ ix_1 - 2x_2 - 3x_3 = 3 + i \\ -2x_1 + (1-2i)x_3 = -3 + 2i \end{cases}$$

2.11. $\begin{cases} (2+i)x_1 - x_2 + 2x_3 = -2 - 3i \\ x_1 - 4ix_2 + ix_3 = 2 + i \\ -2x_1 + x_2 - (1-i)x_3 = 3 + 2i \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + (3i-1)x_3 = 4 + i \\ -x_1 + 4x_2 - ix_3 = 2 \\ 3x_1 - 5x_2 + (4i-1)x_3 = 3 \end{cases}$$

2.12. $\begin{cases} -x_1 + 2ix_2 - (1+i)x_3 = 2 - i \\ 3x_1 - 4x_2 + ix_3 = 4 \\ 2x_1 + (2i-4)x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$

$$\begin{cases} (i-1)x_1 + 2x_2 - x_3 = 3i - 2 \\ x_1 - (i+2)x_2 + 2x_3 = 2 - 2i \\ -3x_1 + x_2 - 4ix_3 = -10 \end{cases}$$

2.13. $\begin{cases} (i+2)x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 - 3i \\ 2x_1 - (2i+1)x_2 = -1 - 2i \\ -3x_1 + 2x_2 - (1-2i)x_3 = 4 + i \end{cases}$

$$\begin{cases} 4x_1 - 2ix_2 + ix_3 = 1 - 2i \\ -x_1 + (4+2i)x_2 = -3 \\ 3x_1 + 4x_2 + ix_3 = 4 \end{cases}$$

2.14. $\begin{cases} -3x_1 + x_2 - (1-i)x_3 = 2 \\ 2x_1 - 4x_2 + ix_3 = 3 - i \\ -x_1 - 3x_2 - (1-2i)x_3 = 4 \end{cases}$

$$\begin{cases} -ix_1 + 2x_2 - 3x_3 = -2 - 4i \\ 2x_1 - (1-i)x_2 + ix_3 = 2 - i \\ x_1 - ix_2 + 4x_3 = 1 + 5i \end{cases}$$

2.15. $\begin{cases} (3-i)x_1 - x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_1 - ix_2 + x_3 = 1 - i \\ -2x_1 + 2x_2 - (1-i)x_3 = 1 + i \end{cases}$

$$\begin{cases} ix_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 - i \\ (1-i)x_1 + 4x_3 = 2i \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

3. Исследуйте систему на совместность. Совместную систему решите методом Гаусса.

3.1. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 4 \end{cases}$

3.2. $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+x_4=5\\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4=-2\\ 3x_1+3x_2+x_3+3x_4=3 \end{cases}$

3.3. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=1\\ 2x_1+3x_2-4x_3+4x_4=-6\\ 2x_1-3x_2+x_3-4x_4=3 \end{cases}$

3.4. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-3x_3+x_4=0\\ x_1-4x_2+5x_3-2x_4=-8\\ 3x_1-x_2+2x_3-x_4=-8 \end{cases}$

3.5. $\begin{cases} 3x_1+4x_2+3x_3-4x_4=12\\ 4x_1+5x_2-3x_3+x_4=2\\ 2x_1+3x_2-4x_3+2x_4=-2 \end{cases}$

3.6. $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-3x_4=4\\ x_1+3x_2+x_4=-5\\ 2x_1+4x_2+2x_3-2x_4=-1 \end{cases}$

3.7. $\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3+4x_4=16\\ x_1+3x_2+2x_3+3x_4=6\\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4=9 \end{cases}$

3.8. $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+x_4=-6\\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4=2\\ 3x_1+3x_2+x_3+3x_4=-4 \end{cases}$

3.9. $\begin{cases} 2x_1+5x_2+x_3+3x_4=0\\ 4x_1+6x_2+3x_3+5x_4=-3\\ 4x_1+x_2-x_3+x_4=-4 \end{cases}$

3.10. $\begin{cases} 2x_1+5x_2+4x_3+x_4=-7\\ x_1+3x_2+2x_3+x_4=-4\\ x_1+2x_2+2x_3=-3 \end{cases}$

3.11. $\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3+x_4=3\\ 4x_1+3x_2-x_3+2x_4=3\\ -x_1+5x_2-3x_3+4x_4=1 \end{cases}$

3.12. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+5x_4=-8\\ x_1+x_2+5x_3-2x_4=6\\ 3x_1+4x_2+4x_3+3x_4=-2 \end{cases}$

3.13. $\begin{cases} 2x_1+x_2+4x_3-4x_4=3\\ x_1+3x_2-6x_3+2x_4=4\\ 3x_1-2x_2+2x_3-2x_4=2 \end{cases}$

3.14. $\begin{cases} 3x_1+4x_2+3x_3-4x_4=11\\ 4x_1+5x_2-x_3-2x_4=7\\ -x_1-x_2+4x_3-2x_4=4 \end{cases}$

3.15. $\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=1\\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4=4\\ 3x_1-4x_2+x_3-3x_4=-8 \end{cases}$

4. Исследуйте систему на совместность. Совместную систему решите методом Гаусса, по правилу Крамера, матричным методом.

4.1. $\begin{cases} 3x_1+2x_2-4x_3=8\\ 2x_1+4x_2-5x_3=7\\ x_1-2x_2+x_3=1 \end{cases}$

4.2. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1\\ x_1-x_2+2x_3=-5\\ 2x_1+3x_3=-4 \end{cases}$

4.3. $\begin{cases} 2x_1-x_2+4x_3=6\\ 3x_1-x_2+x_3=-4\\ 5x_1-2x_2+5x_3=2 \end{cases}$

4.4. $\begin{cases} 3x_1-3x_2+2x_3=2\\ 4x_1-5x_2+2x_3=1\\ x_1-2x_2=-1 \end{cases}$

4.5. $\begin{cases} 3x_1+2x_2-4x_3=8\\ 2x_1+4x_2-5x_3=1\\ 5x_1+6x_2-9x_3=9 \end{cases}$

4.6. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 5 \\ 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 2 \end{cases}$

4.7. $\begin{cases} 4x_1 - 7x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 6 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -5 \end{cases}$

4.8. $\begin{cases} 5x_1 - 9x_2 - 4x_3 = 6 \\ x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$

4.9. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 7 \\ 4x_1 - 3x_2 = 10 \end{cases}$

4.10. $\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 - 4x_3 = -3 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 1 \\ 4x_1 - 4x_2 - 9x_3 = -4 \end{cases}$

4.11. $\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ 6x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases}$

4.12. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$

4.13. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = -8 \end{cases}$

4.14. $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 2 \\ 9x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$

4.15. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 9 \end{cases}$

5. Исследуйте систему на совместность в зависимости от параметра α. В случае совместности найдите решения системы

$$\begin{cases} x_1 + (n-7)x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 = -1 \\ (n-8)x_1 + x_2 + \alpha x_3 = 1, \end{cases}$$

где $1 \le n \le 15$ — номер варианта.

6. Матрицы A и B называются перестановочными, если $AB = BA$. Найдите все матрицы B над полем $\mathbb{R}$, перестановочные с матрицей A.

6.1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 6.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

6.3. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 6.4. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

6.5. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 6.6. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

6.7. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 6.8. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

6.9. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ 6.10. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

6.11. $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 6.12. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

6.13. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ 6.14. $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

6.15. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

8.7. Дополнительные задачи

1. Решите систему уравнений в зависимости от значения параметра α.

1.1. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = \alpha \\ 2x_1 + 2x_2 + \alpha x_3 = 4 \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 = \alpha, \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+(\alpha-1)x_4=1 \\ x_1+x_2+(\alpha-1)x_3+x_4=2 \\ x_1+(\alpha-1)x_2+x_3+x_4=2 \\ x_1+x_2+x_3+x_4=1, \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} \alpha x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+\alpha x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+x_2+\alpha x_3+x_4=1 \\ x_1+x_2+x_3+\alpha x_4=1, \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} (1+\alpha)x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+(1+\alpha)x_2+x_3=\alpha \\ x_1+x_2+(1+\alpha)x_3=\alpha^2, \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} (1+\alpha)x_1+x_2+x_3=\alpha^2+3\alpha \\ x_1+(1+\alpha)x_2+x_3=\alpha^3+3\alpha^2 \\ x_1+x_2+(1+\alpha)x_3=\alpha^4+3\alpha^4. \end{cases}$

2. Сколько решений имеет совместная система линейных уравнений с n неизвестными над конечным полем порядка q, если ранг матрицы системы равен r?

3. Дана система уравнений над полем $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=0 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=0, \end{cases}$$

коэффициенты которой удовлетворяют следующим условиям: a_{11}, a_{22}, a_{33} положительные, все остальные коэффициенты отрицательные, в каждом уравнении сумма коэффициентов положительна. Докажите, что $x_1=x_2=x_3=0$ является единственным решением системы.

4. Докажите, что система над полем $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} ax+by+cz+dt=0 \\ bx-ay+dz-ct=0 \\ cx-dy+az+bt=0 \\ dx+cy-bz-at=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение, если a, b, c, d — действительные числа, не все равные нулю.

5. Система над полем $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} ay+bx=c \\ cx+az=b \\ bz+cy=a \end{cases}$$

имеет единственное решение. Докажите, что $abc\neq 0$ и найдите решения системы.

6. Решите системы линейных уравнений над полем $\mathbb{Z}_2$:

6.1. $\begin{cases} \bar{1}x_1+\bar{1}x_2+\bar{1}x_3+\bar{1}x_4=\bar{1} \\ \bar{1}x_1+\bar{1}x_3=\bar{1} \\ \bar{1}x_2+\bar{1}x_4=\bar{0}, \end{cases}$

6.2. $\begin{cases} \bar{1}x_1+\bar{1}x_2+\bar{1}x_3+\bar{1}x_4=\bar{1} \\ \bar{1}x_1+\bar{1}x_3=\bar{1} \\ \bar{1}x_2+\bar{1}x_4=\bar{1}. \end{cases}$

7. Решите системы линейных уравнений над полем $\mathbb{Z}_3$:

7.1. $\begin{cases} \bar{1}x_1+\bar{1}x_2+\bar{1}x_3=\bar{1} \\ \bar{2}x_1+\bar{1}x_2+\bar{1}x_3=\bar{1} \\ \bar{2}x_2+\bar{2}x_3=\bar{1}, \end{cases}$

7.2. $\begin{cases} \bar{2}x_1+\bar{1}x_2+\bar{1}x_3=\bar{1} \\ \bar{2}x_1+\bar{1}x_2+\bar{2}x_3=\bar{2} \\ \bar{2}x_1+\bar{2}x_2+\bar{1}x_3=\bar{0}. \end{cases}$

8. Решите системы линейных уравнений над по-

лем $\mathbb{Z}_5$:

8.1. $\begin{cases} \overline{1}x_1 + \overline{2}x_2 + \overline{4}x_3 = \overline{1} \\ \overline{1}x_1 + \overline{3}x_2 + \overline{4}x_3 = \overline{2} \\ \overline{1}x_1 + \overline{4}x_2 + \overline{1}x_3 = \overline{3}, \end{cases}$

8.2. $\begin{cases} \overline{1}x_1 + \overline{1}x_2 + \overline{1}x_3 = \overline{2} \\ \overline{2}x_1 + \overline{3}x_2 + \overline{4}x_3 = \overline{1} \\ \overline{3}x_1 + \overline{2}x_3 = \overline{0}. \end{cases}$

9. Решите систему линейных однородных уравнений над полем $\mathbb{Z}_7$:

$$\begin{cases} \overline{3}x_1 + \overline{2}x_2 + \overline{1}x_3 + \overline{6}x_4 = \overline{0} \\ \overline{1}x_1 + \overline{1}x_2 + \overline{3}x_3 = \overline{0} \\ \overline{5}x_1 + \overline{6}x_2 + \overline{2}x_3 + \overline{4}x_4 = \overline{0}. \end{cases}$$

10. Решите систему линейных уравнений над полем $\mathbb{Z}_{17}$:

$$\begin{cases} \overline{3}x + \overline{2}y + \overline{5}z = \overline{1} \\ \overline{2}x + \overline{5}y + \overline{3}z = \overline{1} \\ \overline{5}x + \overline{3}y + \overline{2}z = \overline{4}. \end{cases}$$

11. Решите систему линейных однородных уравнений над полем $\mathbb{R}$ при всевозможных значениях параметра λ:

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (2-\lambda)x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (2-\lambda)x_3 = 0. \end{cases}$$

12. При каких значениях λ однородная система над полем $\mathbb{R}$ имеет ненулевые решения

$$\begin{cases} -\lambda x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0 \\ x_1 - \lambda x_2 + \ldots + x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_1 + x_2 + \ldots - \lambda x_n = 0? \end{cases}$$

13. Пусть ранг матрицы однородной системы линейных уравнений равен $(n-1)$, где n — число неизвестных, Докажите, что любые два решения этой системы пропорциональны.

14. Найдите условия, при которых в любом решении однородной системы линейных уравнений k-я неизвестная равна нулю.

15. Найдите все решения системы

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \end{cases}$$

принадлежащие кольцу $\mathbb{Z}$.

16. Исследуйте систему линейных уравнений над полем $\mathbb{R}$.

16.1. $\begin{cases} x_1 + ax_2 + a^2x_3 = a^3 \\ x_1 + bx_2 + b^2x_3 = b^3 \\ x_1 + cx_2 + c^2x_3 = c^3, \end{cases}$

16.2. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = d \\ a^2x_1 + b^2x_2 + c^2x_3 = d^2, \end{cases}$

16.3. $\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 = a+b+c \\ bx_1 + cx_2 + ax_3 = a+b+c \\ cx_1 + bx_2 + ax_3 = a+b+c. \end{cases}$

17. Решите системы линейных уравнений над полем $\mathbb{R}$.

17.1. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a \\ x_1 + x_2 + x_4 = b \\ x_1 + x_3 + x_4 = c \\ x_2 + x_3 + x_4 = d, \end{cases}$

17.2. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2a \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2b \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2c \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2d, \end{cases}$

17.3. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_{99} + x_{100} + x_1 = 0 \\ x_{100} + x_1 + x_2 = 0, \end{cases}$

17.4. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n = a_1 \\ nx_1 + x_2 + 2x_3 + \ldots + (n-1)x_n = a_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + \ldots + x_n = a_n. \end{cases}$

18. Имеется система уравнений

$$\begin{cases} *x_1 + *x_2 + *x_3 = 0 \\ *x_1 + *x_2 + *x_3 = 0 \\ *x_1 + *x_2 + *x_3 = 0. \end{cases}$$

Два студента по очереди вписывают вместо звездочек числа. Докажите, что начинающий всегда может добиться того, чтобы система имела ненулевое решение.

9. МНОГОЧЛЕНЫ

9.1. Построение кольца многочленов

Пусть $\mathbb{P}$ — произвольное поле. Нулевой и единичный элементы поля $\mathbb{P}$ будем называть также нулем и единицей и обозначать через 0 и 1.

Построим кольцо A, элементами которого являются бесконечные последовательности

$$f = (f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots), \quad f_i \in \mathbb{P} \tag{9.1}$$

элементов поля $\mathbb{P}$ с конечным числом ненулевых элементов. В каждой такой последовательности, начиная с некоторого номера, все члены равны нулю.

Две последовательности $f = (f_0, f_1, \ldots)$ и $g = (g_0, g_1, \ldots)$ считаются равными в точности тогда, когда $f_i = g_i$ для всех i.

Введём на множестве A операцию сложения

$$f + g = (f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots) + (g_0, g_1, \ldots, g_n, \ldots) = \\ = (f_0 + g_0, f_1 + g_1, \ldots, f_n + g_n, \ldots). \tag{9.2}$$

Если в последовательности f нулевыми будут члены, начиная с номера k, а в последовательности g — с номера l, то в последовательности $f + g$ нулевыми будут все члены, начиная с номера $\max\{k, l\}$. Поэтому $f + g \in A$ и сложение определено на множестве A.

Введём умножение на множестве A:

$$fg = h = (h_0, h_1, \ldots, h_s, \ldots), \\ h_s = \sum_{i+j=s} f_i g_j, \quad s = 0, 1, \ldots. \tag{9.3}$$

В частности,

$$h_0 = f_0 g_0, \;\; h_1 = f_0 g_1 + f_1 g_0, \\ h_2 = f_0 g_2 + f_1 g_1 + f_2 g_0,$$

$$h_3 = f_0g_3 + f_1g_2 + f_2g_1 + f_3g_0.$$

Если в последовательности f нулевыми будут члены, начиная с номера k, а в g — с номера l, то в последовательности $h = fg$ нулевыми будут все члены, начиная с номера $k + l$. Поэтому умножение определено на множестве A. Несложно доказывается

Теорема 9.1. *Путь $\mathbb{P}$ — поле. Множество A всех последовательностей (9.1) с операциями сложения (9.2) и умножения (9.3) является коммутативным кольцом с единичным элементом* $(1, 0, 0, \dots)$.

Последовательности $(a, 0, \dots, 0, \dots)$ складываются и умножаются как элементы поля $\mathbb{P}$. Поэтому отображение

$$\varphi : a \mapsto (a, 0, \dots),\ \ a \in \mathbb{P}$$

является изоморфизмом поля $\mathbb{P}$ и подполя

$$\varphi(\mathbb{P}) = \{(a, 0, \dots) \mid a \in \mathbb{P}\}$$

кольца A. Это позволяет отождествить последовательности $(a, 0, \dots, 0 \dots)$ с соответствующими элементами поля $\mathbb{P}$, т.е. положить $a = (a, 0, \dots)$ для всех $a \in \mathbb{P}$. Тем самым поле $\mathbb{P}$ становится подполем кольца A.

Обозначим далее $(0, 1, 0, \dots, 0, \dots)$ через x и назовём x — *переменной над* $\mathbb{P}$ или *неизвестной над* $\mathbb{P}$. Используя введенную на A операцию умножения (9.3), находим

$$x = (0, 1 = f_1, 0, 0, \dots, 0, \dots),$$
$$x^2 = (0, 0, 1 = f_2, 0, \dots, 0, \dots),$$
$$x^3 = (0, 0, 0, 1 = f_3, \dots, 0, \dots),$$
$$\dots$$
$$x^n = (0, 0, 0, 0, \dots, 0, 1 = f_n, 0, \dots, 0),$$
$$\dots$$

Кроме того,

$$(0, \dots, 0, a = g_n, 0, \dots) = (a, 0, 0, \dots)\times$$
$$\times(0, 0, \dots, 0, 1 = f_n, 0, \dots) = ax^n = x^n a =$$
$$= (0, 0, \dots, 0, 1 = f_n, 0, \dots)(a, 0, 0, \dots).$$

Итак, если f_n — последний отличный от нуля член последовательности $f = (f_0, \dots, f_n, \dots)$, то в новых обозначениях

$$f = (f_0, f_1, \dots, f_n, 0, \dots) = (f_0, \dots, f_{n-1}, 0, \dots) + f_n x^n =$$
$$= (f_0, f_1, \dots, f_{n-2}, 0, \dots) + f_{n-1}x^{n-1} + f_n x^n = \dots =$$
$$= f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \dots + f_n x^n.$$

Таким образом, каждый элемент кольца A принимает вид

$$f = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \dots + f_n x^n.$$

Построенное кольцо A называют *кольцом многочленов над* полем $\mathbb{P}$ от одной переменной x и обозначают через $\mathbb{P}[x]$. Элементы кольца $\mathbb{P}[x]$ называют *многочленами* или *полиномами*. Используется также запись многочлена по убывающим степеням x, т.е. в виде

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n. \qquad (9.4)$$

Элементы $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{P}$ называются *коэффициентами многочлена* $f(x)$.

Нулевой многочлен — это многочлен, все коэффициенты которого равны нулевому элементу поля $\mathbb{P}$.

Если в записи (9.4) элемент $a_0 \neq 0$ и $n \geq 1$, то a_0 называют *старшим коэффициентам*, а натуральное число n — *степенью многочлена* $f(x)$. Степень многочлена $f(x)$ обозначают через $\deg f$. Многочлены степени $1, 2, 3$ называют соответственно *линейными, квадратичными (или квадратными), кубичными.*

Если $f(x) = a \in \mathbb{P}$, $a \neq 0$, то $\deg f(x) = 0$. Нулевому многочлену $f(x) = 0$ присваивают степень $(-\infty)$ и считают, что $-\infty < n$ для каждого $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Теорема 9.2. *Если $\mathbb{P}$ — поле, то в кольце $\mathbb{P}[x]$ степень суммы многочленов не превосходит наибольшую из степеней слагаемых, а степень произведения многочленов равна сумме степеней сомножителей, т.е.*

$$deg(f(x) + \varphi(x)) \leq max\{degf(x), deg\varphi(x)\},$$
$$deg(f(x)\varphi(x)) = degf(x) + deg\varphi(x)\}.$$

В частности, из теоремы 9.2 и свойств умножения в кольце $\mathbb{P}[x]$ на нулевой элемент вытекают соотношения

$$-\infty + (-\infty) = -\infty, \ -\infty + n = n + (-\infty) = -\infty.$$

9.2. Делимость многочленов

Пусть $\mathbb{P}$ — произвольное поле, 0 и 1 — нулевой и единичный элементы поля $\mathbb{P}$, $\mathbb{P}^* = \mathbb{P} \setminus \{0\}$. Согласно теореме 9.1 $\mathbb{P}[x]$ — коммутативное кольцо с единицей. По аналогии с кольцом $\mathbb{Z}$ целых чисел в кольце $\mathbb{P}[x]$ многочленов можно рассмотреть вопросы делимости.

Говорят, что *многочлен $g \in \mathbb{P}[x]$ делит многочлен $f \in \mathbb{P}[x]$*, если существует такой многочлен $\varphi \in \mathbb{P}[x]$, что $f = g\varphi$. В этом случае говорят также, что *f делится на g*. Многочлен g называют *делителем многочлена f*, а *φ — частным*. Запись $f \vdots g$ означает, что f делится на g, а запись $g|f$ — многочлен g делит f.

Лемма 9.3. *Для ненулевых многочленов над полем $\mathbb{P}$ справедливы следующие свойства:*

1) *$f|f$,*
2) *если $g|f$ и $f|h$, то $g|h$,*
3) *если $g|f_1$ и $g|f_2$, то $g|(f_1\varphi_1 \pm f_2\varphi_2)$ для любых φ_1 и $\varphi_2 \in \mathbb{P}[x]$,*

4) *$a|f$, для всех $a \in \mathbb{P}^*$,*
5) *если $g|f$, то $ag|f$ для всех $a \in \mathbb{P}^*$,*
6) *если $g|f$, а $f|g$, то $f = ag$, где $a \in \mathbb{P}^*$,*
7) *всякий делитель многочлена f является делителем af, $a \in \mathbb{P}^*$, и наоборот.*

Для многочленов, как и для целых чисел, справедлива теорема о делении с остатком.

Теорема 9.4 (о делении с остатком). *Пусть $\mathbb{P}$ — поле и g — ненулевой многочлен кольца $\mathbb{P}[x]$. Тогда каждому многочлену $f \in \mathbb{P}[x]$ соответствует единственная пара многочленов q и $r \in \mathbb{P}[x]$, для которых $f = gq + r$ и $degr < degg$.*

Итак, для любой пары многочленов f и g, $g \neq 0$, существует единственная пара многочленов q и r такая, что $f = gq + r$ и $\deg r < \deg g$. Многочлен q называют *неполным частным*, а *r — остатком от деления f* на g. В частности, f делится на g тогда и только тогда, когда остаток от деления f на g равен 0.

Пример 9.1. В кольце $\mathbb{Q}[x]$ разделить многочлен $x^3 - x^2 + x + 1$ на $x^2 - 1$.

☐ На первом этапе надо домножить делитель $x^2 - 1$ на x и вычесть из делимого.

$$x^3 - x^2 + x + 1 - x(x^2 - 1) = -x^2 + 2x + 1.$$

Теперь надо повторить этот прием, чтобы исключить $(-x^2)$. Деление удобно записывать углом

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 \quad + x + 1 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2} \underline{x^3 \qquad\quad - x \qquad} & \ x - 1 \\ - x^2 + 2x + 1 & \\ \underline{- x^2 \qquad\ + 1} & \\ 2x & \end{array}$$

Ответ: $x^3 - x^2 + x + 1 = (x^2 - 1)(x - 1) + 2x$. ☒

Пример 9.2. В кольце $\mathbb{Z}_5[x]$ найдите неполное частное и остаток при делении многочлена

$$f(x)=\overline{1}x^4+\overline{2}x^3+\overline{2}x^2+\overline{1}x+\overline{4}$$

на многочлен

$$g(x)=\overline{1}x^3+\overline{1}x^2+\overline{4}x+\overline{4}.$$

☐ Разделим $f(x)$ на $g(x)$.

$$\begin{array}{rl|l}
- & \overline{1}x^4+\overline{2}x^3+\overline{2}x^2+\overline{1}x+\overline{4} & \overline{1}x^3+\overline{1}x^2+\overline{4}x+\overline{4} \\ \cline{3-3}
 & \overline{1}x^4+\overline{1}x^3+\overline{4}x^2+\overline{4}x & \overline{1}x+\overline{1} \\ \cline{2-2}
- & \overline{1}x^3+\overline{3}x^2+\overline{2}x+\overline{4} & \\
 & \overline{1}x^3+\overline{1}x^2+\overline{4}x+\overline{4} & \\ \cline{2-2}
 & \overline{2}x^2+\overline{3}x &
\end{array}$$

Итак, $f(x)=g(x)(\overline{1}x+\overline{1})+(\overline{2}x^2+\overline{3}x)$.

Ответ: $q(x)=\overline{1}x+\overline{1}$ — неполное частное, $r(x)=\overline{2}x^2+\overline{3}x$ — остаток. ☒

Если многочлен d делит многочлены f и g, то d называется *общим делителем* f и g. Если, кроме того d делится на любой другой общий делитель многочленов f и g, то d называется *наибольшим общим делителем.* Множество всех наибольших общих делителей многочленов f и g обозначается через НОД(f,g). Согласно п. 6 леммы 9.3 все наибольшие общие делители двух многочленов f и g отличаются друг от друга на ненулевой элемент поля. Среди всех НОД многочленов f и g выделим тот, у которого старший коэффициент равен 1, и обозначим его через НОД$^1(f,g)$. Ясно, что НОД$^1(f,g)$ определён однозначно.

НОД многочленов находится с помощью алгоритма Евклида, который основан на многократном применении теоремы о делении с остатком.

Пусть f и g — два многочлена над полем $\mathbb{P}$. Если $g|f$, то $g\in$ НОД(f,g). Пусть g не делит f. Тогда можно написать цепочку равенств.

$$\begin{gathered}
f=gq_1+r_1,\quad \deg r_1<\deg g,\\
g=r_1q_2+r_2,\quad \deg r_2<\deg r_1,\\
r_1=r_2q_3+r_3,\quad \deg r_3<\deg r_2,\\
\dots\\
r_{n-3}=r_{n-2}q_{n-1}+r_{n-1},\quad \deg r_{n-1}<\deg r_{n-2},\\
r_{n-2}=r_{n-1}q_n+r_n,\quad \deg r_n<\deg r_{n-1},\\
r_{n-1}=r_nq_{n+1}.
\end{gathered}\tag{9.5}$$

Каждое из равенств (9.5) основано на теореме о делении с остатком. Поскольку степени остатков строго убывают

$$\deg g>\deg r_1>\deg r_2>\ldots>\deg r_{n-1}>\deg r_n,$$

то через конечное число шагов должен появится остаток, равный нулю, т.е. на каком-то этапе деление произойдёт без остатка. В (9.5) деление без остатка записано в последней строке.

Алгоритм Евклида для многочленов f и g заключается в нахождении равенств (9.5).

Теорема 9.5. *НОД любых ненулевых многочленов всегда непустое множество. Если $g|f$, то $g\in$ НОД(f,g). Если g не делит f, то последний отличный от нуля остаток в алгоритме Евклида принадлежит НОД(f,g).*

Отметим, что $f\in$ НОД$(f,0)$, где f — ненулевой многочлен, а НОД$(0,0)$ — пустое множество.

Пример 9.3. Найти НОД$^1(x^3-1,x^2+1)$ в кольце $\mathbb{Q}[x]$.

☐ Построим алгоритм Евклида для этих многочленов. Вначале произведем деление.

$$\begin{array}{r|l} -\; x^3 \;\; -1 & x^2 \;\; +1 \\ \underline{x^3 \;\; +x} & x \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -\; x^2 \;\; +1 & -x \;\; -1 \\ \underline{x^2 \;\; +x} & -x \;\; +1 \\ -\; -x \;\; +1 & \\ \underline{-x \;\; -1} & \\ 2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -\; -x \;\; -1 & 2 \\ \underline{-x \qquad} & -\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} \\ -\; -1 & \\ \underline{-1} & \\ 0 & \end{array}$$

Теперь запишем равенства.

$$\begin{aligned} x^3-1 &= (x^2+1)x+(-x-1), \\ x^2+1 &= (-x-1)(-x+1)+2, \qquad (9.6) \\ -x-1 &= 2(-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Итак, $2 \in$ НОД(x^3-1, x^2+1). Ясно, что НОД$^1(x^3-1, x^2+1)=1$.

Ответ: НОД$^1(x^3-1, x^2+1)=1$. ⊠

Взаимно простые многочлены — это многочлены у которых НОД^1 равен 1.

Теорема 9.6. 1. *Если $d \in$ НОД(f,g), то существуют такие многочлены φ и ψ, что $d=\varphi f+\psi g$.*

2. *Многочлены f и g взаимно просты тогда и только тогда, когда существуют такие многочлены φ и ψ, что $1=\varphi f+\psi g$.*

Теорема 9.7. *Если произведение многочленов fg делится на многочлен h, причем f и h взаимно просты, то g делится на h.*

Пример 9.4. Выразить НОД$^1(x^3-1, x^2+1)$ в кольце $\mathbb{Q}[x]$ через исходные многочлены.

☐ Для многочленов x^3-1 и x^2+1 алгоритм Евклида состоит из трех равенств, см. (9.6). Из второго и первого равенств получаем:

$$\begin{aligned} 2 &= x^2+1-(-x-1)(-x+1) = \\ &= x^2+1-((x^3-1)-(x^2+1)x)(-x+1) = \\ &= (x^3-1)(x-1)+(x^2+1)(1+x(-x+1)). \end{aligned}$$

Ответ: $1=(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2})(x^3-1)+(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^2)(x^2+1)$. ⊠

Пример 9.5. В кольце $\mathbb{Q}[x]$ найдите НОД$(f(x), g(x))$ и выразите его через исходные многочлены, если $f(x)=3x^4+8x^3+6x^2+3x-2$ и $g(x)=3x^4-x^3-9x^2-3x+2$.

☐ Применим алгоритм Евклида к многочленам $f(x)$ и $g(x)$. Разделим многочлен $f(x)$ на многочлен $g(x)$.

$$\begin{array}{r|l} -\; 3x^4+8x^3+6x^2+3x-2 & 3x^4-x^3-9x^2-3x+2 \\ \underline{3x^4-x^3-9x^2-3x+2} & 1 \\ 9x^3+15x^2+6x-4 & \end{array}$$

$$f(x)=g(x)\cdot 1+(9x^3+15x^2+6x-4).$$

Разделим $3g(x)$ на $r_1(x)=9x^3+15x^2+6x-4$

$$\begin{array}{r|l} -\; 9x^4-3x^3-27x^2-9x+6 & 9x^3+15x^2+6x-4 \\ \underline{9x^4+15x^3+6x^2-4x \quad} & x-2 \\ -\; -18x^3-33x^2-5x+6 & \\ \underline{-18x^3-30x^2-12x+8} & \\ -3x^2+7x-2 & \end{array}$$

$$3g(x)=r_1(x)(x-2)+(-3x^2+7x-2).$$

Делим $r_1(x)$ на $r_2(x) = -3x^2 + 7x - 2$.

$$\begin{array}{rrrr|l}
-\,9x^3 & +15x^2 & +\ 6x & -\ 4 & -3x^2+7x-2 \\ \cline{5-5}
9x^3 & -21x^2 & +\ 6x & & -3x\ -12 \\ \cline{1-4}
 & -\,36x^2 & & -\ 4 & \\
 & 36x^2 & -84x & +24 & \\ \cline{2-4}
 & & 84x & -28 &
\end{array}$$

$$r_1(x) = r_2(x)(-3x - 12) + 28(3x - 1).$$

Делим $r_2(x)$ на $r_3(x) = 3x - 1$.

$$\begin{array}{rrr|l}
-\,-3x^2 & +7x & -2 & \ \ 3x-1 \\ \cline{4-4}
-3x^2 & +\ x & & -x\ +2 \\ \cline{1-3}
 & -\,6x & -2 & \\
 & 6x & -2 & \\ \cline{2-3}
 & & 0 &
\end{array}$$

$$r_2(x) = r_3(x)(-x + 2).$$

Итак, алгоритм Евклида многочленов $f(x)$ и $g(x)$ имеет вид:

$f(x) = g(x) \cdot 1 + r_1(x)$,
$3g(x) = r_1(x)(x - 2) + r_2(x)$,
$r_1(x) = r_2(x)(-3x - 12) + 28r_3(x)$,
$r_2(x) = r_3(x)(-x + 2)$.

Последний ненулевой остаток в алгоритме Евклида является наибольшим общим делителем $f(x)$ и $g(x)$, т.е. $28r_3(x) = 84x - 28 \in$ НОД$(f(x), g(x))$.

Двигаясь в алгоритме Евклида снизу вверх и последовательно заменяя остатки, выразим НОД$(f(x), g(x))$ через исходные многочлены.

НОД$(f(x), g(x)) \ni 84x - 28 = r_1(x) + r_2(x)(3x + 12) =$
$= r_1(x) + (3g(x) - r_1(x)(x - 2))(3x + 12) =$
$= g(x)(9x + 36) + r_1(x)(-3x^2 - 6x + 25) =$
$= g(x)(9x + 36) + (f(x) - g(x))(-3x^2 - 6x + 25) =$
$= f(x)(-3x^2 - 6x + 25) + g(x)(3x^2 + 15x + 11)$.

Ответ: НОД$(f(x), g(x)) \ni 84x - 28 = (-3x^2 - 6x + 25)f(x) + (3x^2 + 15x + 11)g(x)$. $\boxtimes$

9.3. Неприводимые многочлены

Пусть f — произвольный многочлен над полем $\mathbb{P}$ степени ≥ 1. Тогда f делится на a и af, где a — ненулевой элемент поля $\mathbb{P}$. Если f других делителей не имеет, то f называется *неприводимым многочленом*. Другими словами, *многочлен f степени ≥ 1 называется неприводимым* над полем $\mathbb{P}$, если его нельзя представить в виде произведения двух многочленов над полем $\mathbb{P}$ меньших степеней. Многочлен, который не является неприводимым, называется *приводимым*.

Приводимость многочленов зависит от поля. Например, многочлен $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ неприводим над $\mathbb{Q}$, но приводим над $\mathbb{R}$. Многочлен $x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$ неприводим над $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$, но приводим над $\mathbb{C}$.

Лемма 9.8. *Многочлены над полем $\mathbb{P}$ обладают следующими свойствами:*

1) *многочлены первой степени неприводимы,*

2) *если f неприводим, то af неприводим для всех $a \in \mathbb{P}^*$,*

3) *если f неприводим, то для любого многочлена g либо f делит g, либо f и g взаимно просты,*

4) *если произведение fg делится на неприводимый многочлен h, то либо f делится на h, либо g делится на h.*

Теорема 9.9. *Всякий многочлен f над полем $\mathbb{P}$ степени $n \geq 1$ можно представить в виде произведения неприводимых над $\mathbb{P}$ многочленов. Если имеются два таких разложения*

$$f = \varphi_1\varphi_2 \cdots \varphi_s = \psi_1\psi_2 \cdots \psi_t,$$

то $s = t$ и при подходящей нумерации $\psi_i = a_i\varphi_i$, $a_i \in \mathbb{P}^*$, $i = 1, 2, \ldots, s$.

Многочлен, старший коэффициент которого равен 1, называется *унитарным.*

Теорема 9.10. 1. *Над любым полем унитарных неприводимых многочленов бесконечно много.*

2. *Над любым конечным полем существуют неприводимые многочлены сколь угодно высокой степени.*

Пусть p — неприводимый делитель многочлена $f \in \mathbb{P}[x]$. Если p^k делит f, но p^{k+1} не делит f, то p назовём *k-кратным неприводимым множителем.* Если $k = 1$, то p называется *простым неприводимым множителем* многочлена f.

По теореме 9.9 каждый многочлен представим в виде произведения неприводимых многочленов $f = \varphi_1\varphi_2 \cdots \varphi_s$. Если вынести за скобки старшие коэффициенты всех неприводимых множителей, а затем объединить одинаковые множители, то приходим к *каноническому разложению многочлена*

$$f = ap_1^{k_1}p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n}.$$

В этом разложении все p_i — унитарные неприводимые попарно взаимно простые многочлены.

При рассмотрении пар ненулевых многочленов f и g удобно добавлять к их каноническим разложениям нулевые степени неприводимых унитарных многочленов с той целью, чтобы многочлены f и g были записаны в виде произведения одних и тех же неприводимых унитарных многочленов.

Теорема 9.11. *Если ненулевые многочлены*

$$f = ap_1^{k_1}p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n}, \quad g = bp_1^{l_1}p_2^{l_2} \cdots p_n^{l_n},$$

где p_i — унитарные неприводимые над полем $\mathbb{P}$ попарно различные многочлены, $a, b \in \mathbb{P}^*$, $k_i, l_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, то НОД$^1(f, g) = p_1^{m_1} \cdots p_n^{m_n}$, где $m_i = \min\{k_i, l_i\}$.

Например, для многочленов

$$f = x(x+1)^3(x-1)^2(x^2+1) \in \mathbb{R}[x],$$
$$g = (x+1)^2(x-1)^4(x-3)(x^2+1) \in \mathbb{R}[x],$$

НОД$^1(f, g) = (x+1)^2(x-1)^2(x^2+1)$.

9.4. Производная многочлена

Пусть $\mathbb{P}$ — поле нулевой характеристики. Это означает, что

$$na = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{n \text{ раз}} \neq 0 \in \mathbb{P}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$ и $a \in \mathbb{P}^*$.

Для многочлена

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

степени $n \geq 1$ над полем $\mathbb{P}$ определим его производную

$$f'(x) = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}.$$

Так как $\mathbb{P}$ — поле нулевой характеристики, то $na_0 \neq 0$ и f' — многочлен степени $n - 1$.

Лемма 9.12. *Пусть $\mathbb{P}$ — поле нулевой характеристики, f и $g \in \mathbb{P}[x]$. Тогда:*

1) *$c' = 0$ для всех $c \in \mathbb{P}$,*
2) *$(cf)' = c(f')$, где $c \in \mathbb{P}$,*
3) *$(f+g)' = f' + g'$,*
4) *$(fg)' = f'g + fg'$,*
5) *$(f^k)' = kf^{(k-1)}f'$, где $k \in \mathbb{N}$.*

Теорема 9.13. 1. *Если p — k-кратный неприводимый множитель многочлена f над полем нулевой характеристики, то он является $(k-1)$-кратным множителем производной f'. В частности, если p — простой неприводимый множитель многочлена f, то p взаимно прост с производной f'.*

2. *Если* $f = ap_1^{k_1}\cdots p_s^{k_s}$ *— каноническое разложение многочлена* f *над полем нулевой характеристики, то* НОД$^1(f, f') = p_1^{k_1-1}\cdots p_s^{k_s-1}$*. В частности,* f *не содержит кратных множителей тогда и только тогда, когда* f *взаимно прост со своей производной.*

Пример 9.6. Определить кратные неприводимые множители многочлена

$$f(x) = x^8 - x^6 - 2x^5 + 2x^3 + x^2 - 1 \in \mathbb{Q}[x].$$

$\square$ Находим производную

$$f'(x) = 8x^7 - 6x^5 - 10x^4 + 6x^2 + 2x = \\ = 2x(4x^6 - 3x^4 - 5x^3 + 3x + 1).$$

Так как $f(x)$ не делится на x, то НОД$^1(f(x), f'(x)) =$ НОД$^1(f(x), 4x^6 - 3x^4 - 5x^3 + 3x + 1)$. С помощью алгоритма Евклида находим, что НОД$^1(f(x), f'(x)) = x^4 - x^3 - x + 1 = (x^3 - 1)(x - 1) = (x - 1)^2(x^2 + x + 1)$. По теореме 9.13 кратным неприводимыми множителями многочлена $f(x)$ являются $x - 1$ кратности 3 и $x^2 + x + 1$ кратности 2. Разделив $f(x)$ на $(x - 1)^3(x^2 + x + 1)^2$, получим полное разложение $f(x)$ на неприводимые множители: $f = (x - 1)^3(x^2 + x + 1)^2(x + 1)$.

Ответ: Неприводимые множители многочлена $f(x)$: $(x - 1)$ кратности 3, $(x^2 + x + 1)$ кратности 2, $(x + 1)$ кратности 1. $\boxtimes$

9.5. Корни многочлена

Пусть $\mathbb{P}$ — поле и многочлен

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

над полем $\mathbb{P}$ отличен от нулевого. Для элемента $c \in \mathbb{P}$ сумму

$$a_0c^n + a_1c^{n-1} + \ldots + a_{n-1}c + a_n$$

будем обозначать через $f(c)$ и называть *значением многочлена* $f(x)$ при $x = c$. Если $f(c) = 0$, то элемент

c называют *корнем многочлена* $f(x)$.

Несложно доказать, что при делении многочлена $f(x)$ на $(x - c)$ остаток равен $f(c)$. Этот факт используется в доказательстве следующей теоремы.

Теорема 9.14 (Безу). *Элемент* $c \in \mathbb{P}$ *является корнем ненулевого многочлена* $f(x) \in \mathbb{P}[x]$ *тогда и только тогда, когда* $(x - c)$ *делит* $f(x)$.

Деление многочлена на одночлен удобно производить с помощью схемы Горнера. Пусть надо разделить многочлен

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

на $(x - c)$. Найдём коэффициенты неполного частного $q(x)$. Многочлен $q(x)$ имеет степень $n - 1$ и его можно записать так:

$$q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}.$$

Для нахождения коэффициентов многочлена $q(x)$ составляется следующая таблица.

	a_0	a_1	$\ldots$	a_k	$\ldots$
c	$b_0 = a_0$	$b_1 = a_1 + b_0c$	$\ldots$	$b_k = a_k + b_{k-1}c$	$\ldots$

$\ldots$	a_{n-1}	a_n
$\ldots$	$b_{n-1} = a_{n-1} + b_{n-2}c$	$f(c) = a_n + b_{n-1}c$

Для ее составления надо в первую строку выписать коэффициенты делимого $f(x)$, в первой клетке второй строки записывается элемент c, а во второй клетке $b_0 = a_0$. Остальные клетки второй строки заполняются по принципу

$$\boxed{b_k = a_k + b_{k-1}c}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \longrightarrow \qquad \cdot\, \mathrm{c} + \downarrow \\ b_{k-1}c + a_k = b_k \end{array}} \tag{9.7}$$

В последней клетке второй строки получается остаток $f(c)$, в остальных клетках — коэффициенты частного $q(x)$.

Пример 9.7. В кольце $\mathbb{C}[x]$ разделить многочлен
$$f(x) = 2x^5 + (1+2i)x^4 + (2+i)x^2 + (1+4i)x + i$$
на многочлен $g(x) = x + i$.

☐ Применим схему Горнера.

	2	$1+2i$	0	$2+i$	$1+4i$	i
$-i$	2	1	$-i$	$1+i$	$2+3i$	$3-i$

Так как $g(x) = x+i$, то первый элемент второй строки равен $(-i)$. Во второй клетке стоит коэффициент $b_0 = a_0 = 2$, остальные клетки заполняются по формуле $b_k = a_k + b_{k-1}c$. Остаток $f(c) = 3 - i$, частное $q(x) = 2x^4 + x^3 - ix^2 + (1+i)x + 2 + 3i$.

Ответ: $f(x) = (2x^4+x^3-ix^2+(1+i)x+2+3i)(x+i) + 3 - i$. ⊠

Пример 9.8. Используя схему Горнера, вычислите $f(-5)$, если $f(x) = 2x^5 - 3x^3 + 2x^2 - 1$.

☐ Так как при делении на $(x+5)$ многочлен $f(x) = (x+5)q(x) + r$, где $q(x)$ — неполное частное, r — остаток, то очевидно, что $f(-5) = r$. Составим схему Горнера деления $f(x)$ на $(x+5)$

	2	0	–3	2	0	–1
–5	2	–10	47	–233	1165	–5826

Ответ: $f(-5) = -5826$. ⊠

Пример 9.9. Разложите многочлен $f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 5x + 1$ по степеням $x - 1$.

☐ Разделим по схеме Горнера на $x-1$ поочерёдно $f(x)$, первое неполное частное, второе неполное частное и т.д. Получаемые при этом остатки являются

коэффициентами искомого разложения

	1	2	3	5	1
1	1	3	6	11	12
1	1	4	10	21	
1	1	5	15		
1	1	6			
1	1				

Искомое разложение многочлена $f(x)$ имеет вид
$$f(x) = (x-1)^4 + 6(x-1)^3 + 15(x-1)^2 + 21(x-1) + 12.$$

Ответ: $f(x) = (x-1)^4 + 6(x-1)^3 + 15(x-1)^2 + 21(x-1) + 12$. ⊠

Элемент $c \in \mathbb{P}$ называется *k-кратным корнем многочлена* $f(x) \in \mathbb{P}[x]$ или *корнем кратности* k, если $f(x)$ делится на $(x-c)^k$, но не делится на $(x-c)^{k+1}$. Корень кратности 1 называется *простым корнем*. При $k = 2$ говорят о *двойном корне*, а при $k = 3$ — о *тройном*.

Лемма 9.15. *Элемент c является k-кратным корнем ненулевого многочлена $f(x)$ тогда и только тогда, когда*
$$f(x) = (x-c)^k q(x) \quad \text{и } q(c) \neq 0.$$

Теорема 9.16. 1. *Если $c_1, c_2, \ldots, c_r$ — корни кратностей $k_1, k_2, \ldots, k_r$ многочлена $f(x)$, то*
$$f(x) = (x-c_1)^{k_1}(x-c_2)^{k_2} \cdots (x-c_r)^{k_r} q(x)$$
и $q(c_i) \neq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r$.

2. *Число корней, рассматриваемых вместе с их кратностями, не превосходит степени многочлена.*

Пример 9.10. Найти кратность корня $x = 2$ многочлена

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8 \in \mathbb{R}[x].$$

□ Делим $f(x)$ на $x-2$, затем получившиеся частное делим на $x-2$ и т.д., пока не получится ненулевой остаток. Деление удобно производить по схеме Горнера.

	1	−5	7	−2	4	−8
2	1	−3	1	0	4	0
2	1	−1	−1	−2	0	
2	1	1	1	0		
2	1	3	$7 \neq 0$			

Итак, $f(x)$ делится на $(x-2)^3$, но не делится на $(x-2)^4$.

Ответ: $x = 2$ — корень кратности 3. ⊠

Теорема 9.17. *Если c — k-кратный корень многочлена $f(x)$ над полем нулевой характеристики, то c — $(k-1)$-кратный корень производной $f'(x)$. В частности, c — простой корень многочлена $f(x)$, если $f(c) = 0$ и $f'(c) \neq 0$.*

Пример 9.11. Определить a и b так, чтобы многочлен $f(x) = ax^4 + bx^3 + 1$ имел $x = 1$ корнем кратности ≥ 2.

□ Число 1 будет корнем многочлена $f(x)$ не ниже второй кратности, если значения многочлена $f(x)$ и его производной $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2$ при $x = 1$ равны нулю. Приравнивая $f(1)$ и $f'(1)$ к нулю, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a + b = -1 \\ 4a + 3b = 0 \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем

Ответ: $a = 3, \quad b = -4$. ⊠

Пример 9.12. Определите коэффициенты a и b многочлена $f(x) = (a-2)x^4 + 2(b+1)x^3 - 3x + 1$ так,

чтобы $x = -2$ стал двукратным корнем многочлена $f(x)$.

□ Так как $x = -2$ двукратный корень многочлена $f(x)$, то должны выполняться условия:

$$\begin{cases} f(-2) = 0, \\ f'(-2) = 0. \end{cases}$$

Находим $f'(x) = 4(a-2)x^3 + 6(b+1)x^2 - 3$. Тогда

$$\begin{cases} (a-2)16 - 16(b+1) + 6 + 1 = 0, \\ 4(a-2)(-8) + 6(b+1)4 - 3 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16a - 16b = 41, \\ -32a + 24b = -85. \end{cases}$$

Умножая первое уравнение на 2 и складывая его со вторым, получим

$$\begin{cases} 16a - 16b = 41, \\ \qquad -8b = -3, \end{cases}$$

откуда

$$b = \frac{3}{8}, \quad a = \frac{47}{16}.$$

Ответ: $a = \frac{47}{16}$, $b = \frac{3}{8}$. ⊠

Пусть

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$$

— многочлен степени n со старшим коэффициентом равным 1. Допустим, что этот многочлен имеет n корней $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Тогда по теореме 9.16

$$f(x) = (x - c_1)(x - c_2)\ldots(x - c_n).$$

Перемножая линейные множители в правой части и приводя подобные члены, а затем приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем следующие равенства, называемые *формулами Виета:*

$a_1 = -(c_1 + c_2 + \ldots + c_n),$

$a_2 = c_1c_2 + c_1c_3 + \ldots + c_1c_n + c_2c_3 + \ldots + c_2c_n + \ldots$

$\ldots + c_{n-1}c_n = \sum_{1\le i_1<i_2\le n} c_{i_1}c_{i_2}$,

$\ldots$

$$a_k = (-1)^k \sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n} c_{i_1}c_{i_2}\cdots c_{i_k}, \qquad (9.8)$$

$\ldots$

$a_n = (-1)^n c_1c_2\cdots c_n$.

Если многочлен $f(x)$ не является унитарным, т.е. его старший коэффициент $a_0 \neq 1$, то полученные формулы (9.8) давали бы выражения для a_i/a_0, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Для $n = 2$ и $\mathbb{P} = \mathbb{R}$ эти формулы известны из школьного курса математики. Повторим вывод этих формул для многочлена третьей степени

$$f(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = (x-c_1)(x-c_2)(x-c_3) =$$
$$= x^3 + x^2(-c_3 - c_2 - c_1) + x(c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3) - c_1c_2c_3.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем:

$$a_1 = -(c_1 + c_2 + c_3),$$

$$a_2 = c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3, \qquad (9.9)$$

$$a_3 = -c_1c_2c_3.$$

Пример 9.13. Найти многочлен над полем $\mathbb{R}$ третьей степени, имеющий двукратным корнем число 3 и простым корнем число (-2).

☐ Многочлен $f(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ имеет корни $c_1 = 3$, $c_2 = 3$, $c_3 = -2$. По формулам (9.9) получаем:

$a_1 = -(3+3-2) = -4$, $a_2 = 9-6-6 = -3$, $a_3 = 18$.

Ответ: $f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$. ⊠

9.6. Многочлены над $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$

Следующую теорему называют основной теоремой алгебры комплексных чисел.

Теорема 9.18. *Всякий многочлен степени $n \ge 1$ над полем $\mathbb{C}$ имеет точно n корней.*

Теорема 9.19. *Неприводимыми над полем комплексных чисел являются только многочлены первой степени.*

Итак, над полем комплексных чисел каждый многочлен степени $n > 1$ разложим в произведение многочленов первой степени. Если $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ и $\deg f(x) = n$, то

$$f(x) = a_0(x-c_1)(x-c_2)\cdots(x-c_n),$$

где $a_0 \in \mathbb{C}^*$, $c_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Пример 9.14. Разложить над полем $\mathbb{C}$ на неприводимые множители многочлен $f(x) = x^4 + x^3 - x - 1$.

☐ Сгруппируем слагаемые следующим образом:

$$x^4 + x^3 - x - 1 = x^3(x+1) - (x+1) = (x+1)(x^3-1) =$$
$$= (x+1)(x-1)(x^2+x+1).$$

Решим уравнение $x^2 + x + 1 = 0$.

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $x^4 + x^3 - x - 1 == (x+1)(x-1)(x+\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})(x+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})$. ⊠

Произвольное поле $\mathbb{P}$ называется *алгебраически замкнутым полем*, если каждый многочлен степени $n \ge 1$ над полем $\mathbb{P}$ имеет хотя бы один корень. В этом случае каждый ненулевой многочлен над алгебраически замкнутым полем будет иметь ровно столько корней, какова его степень. Теперь теорему 9.18 можно сформулировать так: *поле комплексных чисел алгебраически замкнуто.*

Поле $\mathbb{R}$ действительных чисел не является алгебраически замкнутым. Многочлен x^2+1 не имеет действительных корней. Однако $\mathbb{R}$ содержится в поле комплексных чисел. Поэтому всякий ненулевой многочлен с действительными коэффициентами имеет столько комплексных корней, какова его степень.

Теорема 9.20. 1. *Если $z=a+bi$ — корень многочлена $f(x)\in\mathbb{R}[x]$, то сопряженное число $\bar{z}=a-bi$ — также корень $f(x)$.*

2. *Многочлен нечетной степени над полем $\mathbb{R}$ имеет действительный корень.*

Теорема 9.21. *Неприводимыми над полем действительных чисел являются многочлены первой степени и многочлены второй степени с отрицательным дискриминантом.*

Теорема 9.22. *Каждый многочлен степени $n\geq 1$ с действительными коэффициентами разлагается над $\mathbb{R}$ в произведение m многочленов первой степени, соответствующих действительным корням, и $\frac{n-m}{2}$ неприводимых над $\mathbb{R}$ многочленов второй степени, соответствующих парам комплексных сопряженных корней.*

Пример 9.15. Разложить над полем $\mathbb{R}$ на неприводимые множители многочлен x^4+x^3-8x-8.

☐ Группируя слагаемые, получаем:

$$x^4+x^3-8x-8=x^3(x+1)-8(x+1)=(x+1)(x^3-8)=$$
$$=(x+1)(x-2)(x^2+2x+4).$$

Многочлен x^2+2x+4 имеет отрицательный дискриминант $D=4-16=-12$, поэтому неприводим над $\mathbb{R}$.

Ответ: $x^4+x^3-8x-8=(x+1)(x-2)(x^2+2x+4)$. ☒

Пример 9.16. Разложить над полями $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$ на неприводимые множители многочлен $f(x)=x^4+4$.

☐ Вначале над полем комплексных чисел найдем корни многочлена x^4+4.

$$x_k=\sqrt[4]{-4}=\sqrt[4]{4(\cos\pi+i\sin\pi)}=$$
$$=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4}),\quad k=0,1,2,3.$$

$$x_0=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})=1+i,$$

$$x_1=\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})=\sqrt{2}(\cos(\pi-\frac{\pi}{4})+i\sin(\pi-\frac{\pi}{4}))=$$
$$=\sqrt{2}(-\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})=-1+i,$$

$$x_2=\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4})=\sqrt{2}(\cos(\pi+\frac{\pi}{4})+i\sin(\pi+\frac{\pi}{4}))=$$
$$=\sqrt{2}(-\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4})=-1-i,$$

$$x_3=\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4})=\sqrt{2}(\cos(2\pi-\frac{\pi}{4})+i\sin(2\pi-\frac{\pi}{4}))=$$
$$=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4})=1-i.$$

Получаем разложение

$$f(x)=(x-(1+i))(x-(-1+i))(x-(-1-i))(x-(1-i))=$$
$$=(x-1-i)(x+1-i)(x+1+i)(x-1+i).$$

Перемножим скобки, отвечающие сопряженным корням:

$$(x-1-i)(x-1+i)=(x-1)^2-i^2=x^2-2x+2,$$
$$(x+1-i)(x+1+i)=(x+1)^2-i^2=x^2+2x+2.$$

Над полем $\mathbb{R}$ получаем разложение $f(x)=(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$.

Ответ: $f(x)=(x-1-i)(x+1-i)(x+1+i)(x-1+i)$ над полем $\mathbb{C}$.

$f(x)=(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$ над полем $\mathbb{R}$. ☒

Теорема 9.23. *Для многочлена*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

с целыми коэффициентами $a_n \neq 0, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \neq 0$ *рациональное число* p/q *является корнем тогда и только тогда, когда* p *делит* a_0, *а* q *делит* a_n.

Пример 9.17. Найдите все корни многочлена $f(x) = 16x^4 + 8x^3 - 7x^2 + 2x + 1$.

☐ Воспользуемся теоремой 9.23. Составим множество возможных рациональных корней p/q многочлена $f(x)$.

$$p \in \{\pm 1\}, q \in \{1, 2, 4, 8, 16\},$$

$$\frac{p}{q} \in \left\{\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}, \pm\frac{1}{16}\right\}.$$

Для нахождения корней используем схему Горнера

	16	8	–7	2	1
1	16	24	17	19	$20 \neq 0$
–1	16	–8	1	1	0
–1	16	–24	25	$-24 \neq 0$	
$\frac{1}{2}$	16	0	1	$\frac{3}{2} \neq 0$	
$-\frac{1}{2}$	16	–16	9	$-\frac{7}{2} \neq 0$	
$\frac{1}{4}$	16	–4	0	$1 \neq 0$	
$-\frac{1}{4}$	16	–12	4	0	

Итак, найдены два корня $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{4}$. По теореме Безу

$$f(x) = (x+1)(x+\frac{1}{4})(16x^2 - 12x + 4).$$

Остальные корни легко найти, решая уравнение

$$16x^2 - 12x + 4 = 0,$$
$$4x^2 - 3x + 1 = 0,$$
$$x_3 = \frac{3 - i\sqrt{7}}{8}, \quad x_4 = \frac{3 + i\sqrt{7}}{8}.$$

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{4}$, $x_3 = \frac{3-i\sqrt{7}}{8}$, $x_4 = \frac{3+i\sqrt{7}}{8}$. ⊠

Пример 9.18. Найдите все корни многочлена $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 2$, если известен один из корней $x_1 = 1 + i$.

☐ Так как коэффициенты многочлена $f(x)$ являются действительными числами, то вторым корнем многочлена $f(x)$ будет число, сопряженное x_1, т.е $x_2 = 1 - i$. Тогда по теореме Безу многочлен $f(x)$ делится на $(x - x_1)$ и на $(x - x_2)$, т.е. на многочлен

$$(x - x_1)(x - x_2) = (x - 1 - i)(x - 1 + i) =$$
$$= (x-1)^2 - i^2 = x^2 - 2x + 1 + 1 = x^2 - 2x + 2.$$

$$\begin{array}{r|l}
-\;3x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 2 & x^2 - 2x + 2 \\ \cline{2-2}
3x^4 - 6x^3 + 6x^2 \qquad\quad & 3x^2 + x - 1 \\ \cline{1-1}
-\;x^3 - 3x^2 + 4x - 2 & \\
x^3 - 2x^2 + 2x \quad\;\; & \\ \cline{1-1}
-\;-x^2 + 2x - 2 & \\
-x^2 + 2x - 2 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Решая уравнение $3x^2 + x - 1 = 0$, находим остальные корни

$$x_3 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{6}, \quad x_4 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{6},$$

Ответ: $x_1 = 1 + i$, $x_2 = 1 - i$, $x_3 = \frac{-1-\sqrt{13}}{6}$, $x_4 = \frac{-1+\sqrt{13}}{6}$. ⊠

Пример 9.19. Разложите на неприводимые множители над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ многочлены $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 4$ и $g(x) = x^4 + 3x^2 + 9$.

□ Найдём все корни многочлена $f(x)$:

$$x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = 1 + i, x_4 = 1 - i.$$

Так как неприводимыми над полем $\mathbb{C}$ являются только многочлены первой степени, то искомое разложение над полем $\mathbb{C}$ имеет вид

$$f(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 1 - i)(x - 1 + i).$$

Неприводимые многочлены над полем $\mathbb{R}$ должны иметь действительные коэффициенты. Поэтому $(x + 1)$ и $(x - 2)$ — неприводимые множители $f(x)$ над полем $\mathbb{R}$. Перемножим

$$(x - 1 - i)(x - 1 + i) = (x - 1)^2 - i^2 = x^2 - 2x + 2.$$

Тогда $f(x) = (x + 1)(x - 2)(x^2 - 2x + 2)$. Поскольку неприводимыми над полем $\mathbb{R}$ являются многочлены первой степени и второй степени с отрицательным дискриминантом, то полученное разложение и будет искомым над полем $\mathbb{R}$.

Преобразуем многочлен $g(x)$:

$$g(x) = x^4 + 3x^2 + 9 = x^4 + 6x^2 + 9 - 3x^2 =$$

$$= (x^2 + 3)^2 - (\sqrt{3}x)^2 = (x^2 - \sqrt{3}x + 3)(x^2 + \sqrt{3}x + 3).$$

Так как дискриминанты полученных квадратных трехчленов отрицательны, то $g(x) = (x^2 - \sqrt{3}x + 3)(x^2 + \sqrt{3}x + 3)$ — искомое разложение над полем $\mathbb{R}$.

Разложим каждый из квадратных трехчленов на неприводимые множители над полем $\mathbb{C}$:

$$x^2 - \sqrt{3}x + 3 = (x - \frac{\sqrt{3} - 3i}{2})(x - \frac{\sqrt{3} + 3i}{2}),$$

$$x^2 + \sqrt{3}x + 3 = (x - \frac{-\sqrt{3} - 3i}{2})(x - \frac{-\sqrt{3} + 3i}{2}).$$

Тогда разложение на неприводимые множители над полем $\mathbb{C}$ имеет вид

$$g(x) = (x - \frac{\sqrt{3} - 3i}{2})(x - \frac{\sqrt{3} + 3i}{2})(x + \frac{\sqrt{3} + 3i}{2})(x + \frac{\sqrt{3} - 3i}{2}).$$

Ответ: $f(x) = (x + 1)(x - 2)(x^2 - 2x + 2)$, $g(x) = (x^2 - \sqrt{3}x + 3)(x^2 + \sqrt{3}x + 3)$ — над полем $\mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)(x-2)(x-1-i)(x-1+i)$, $g(x) = (x - \frac{\sqrt{3}-3i}{2})(x - \frac{\sqrt{3}-3i}{2})(x + \frac{\sqrt{3}+3i}{2})(x + \frac{\sqrt{3}-3i}{2})$ — над полем $\mathbb{C}$. ⊠

9.7. Индивидуальные задания

1. В кольце $\mathbb{Z}_4[x]$ найдите неполное частное и остаток при делении $f(x)$ на $g(x)$.

1.1. $f(x) = \overline{2}x^4 + \overline{1}x^3 + \overline{3}x + \overline{2}$, $g(x) = \overline{1}x^2 + \overline{1}x + \overline{1}$.
1.2 $f(x) = \overline{1}x^4 + \overline{1}x^3 + \overline{3}x + \overline{3}$, $g(x) = \overline{1}x^2 + \overline{2}x + \overline{1}$.
1.3. $f(x) = \overline{1}x^4 + \overline{2}x^2 + \overline{1}x + \overline{3}$, $g(x) = \overline{1}x^2 + \overline{2}x + \overline{2}$.
1.4. $f(x) = \overline{3}x^4 + \overline{1}x^3 + \overline{3}x^2 + \overline{2}$, $g(x) = \overline{1}x^2 + \overline{3}x + \overline{2}$.
1.5. $f(x) = \overline{2}x^4 + \overline{1}x^2 + \overline{3}x + \overline{3}$, $g(x) = \overline{1}x^3 + \overline{2}x + \overline{1}$.
1.6. $f(x) = \overline{2}x^4 + \overline{1}x^2 + \overline{2}x + \overline{3}$, $g(x) = \overline{1}x^2 + \overline{2}$.
1.7. $f(x) = \overline{1}x^4 + \overline{2}x + \overline{1}$, $g(x) = \overline{1}x^3 + \overline{1}$.
1.8. $f(x) = \overline{2}x^5 + \overline{1}x^3 + \overline{1}x + \overline{1}$, $g(x) = \overline{1}x^3 + \overline{1}x + \overline{1}$.
1.9. $f(x) = \overline{1}x^5 + \overline{2}x^3 + \overline{3}x^2 + \overline{1}$, $g(x) = \overline{1}x^3 + \overline{2}x^2 + \overline{3}$.
1.10. $f(x) = \overline{2}x^5 + \overline{3}x^3 + \overline{2}x^2 + \overline{3}x$, $g(x) = \overline{1}x^3 + \overline{2}x + \overline{1}$.
1.11. $f(x) = \overline{2}x^4 + \overline{3}x^2 + \overline{2}x + \overline{3}$, $g(x) = \overline{1}x^3 + \overline{1}x + \overline{2}$.
1.12. $f(x) = \overline{3}x^4 + \overline{2}x^3 + \overline{1}x + \overline{3}$, $g(x) = \overline{1}x^2 + \overline{3}x + \overline{3}$.
1.13. $f(x) = \overline{2}x^4 + \overline{1}x^2 + \overline{2}x + \overline{3}$, $g(x) = \overline{1}x^3 + \overline{3}x^2 + \overline{3}$.
1.14. $f(x) = \overline{1}x^5 + \overline{1}x^3 + \overline{3}x + \overline{2}$, $g(x) = \overline{1}x^3 + \overline{1}x$.
1.15. $f(x) = \overline{1}x^5 + \overline{2}x^4 + \overline{1}x^3 + \overline{2}$, $g(x) = \overline{1}x^3 + \overline{3}$.

2. Используя алгоритм Евклида, найдите НОД$(f(x), g(x))$ и выразите его через исходные многочлены.

2.1. $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2$,

$g(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2.$
2.2. $f(x) = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1,$
$g(x) = x^4 + 2x^3 + x + 2.$
2.3. $f(x) = x^6 - 4x^5 + 11x^4 - 27x^3 + 37x^2 - 35x + 35,$
$g(x) = x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 20x^2 + 10x - 25.$
2.4. $f(x) = 3x^5 + 5x^4 - 16x^3 - 6x^2 - 5x - 6,$
$g(x) = 3x^4 - 4x^3 - x^2 - x - 2.$
2.5. $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2,$
$g(x) = x^2 - x + 1.$
2.6. $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1,$
$g(x) = x^2 - x - 1.$
2.7. $f(x) = 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9,$
$g(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4.$
2.8. $f(x) = x^5 - 5x^4 - 2x^3 + 12x^2 - 2x + 12,$
$g(x) = x^3 - 5x^2 - 3x + 17.$
2.9. $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 2x + 1,$
$g(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 1.$
2.10. $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 5x + 2,$
$g(x) = 2x^3 + x^2 - x - 1.$
2.11. $f(x) = x^6 - x^4 + 4x^3 - 3x + 2,$
$g(x) = x^3 + 2.$
2.12. $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 2,$
$g(x) = x^5 - 1.$
2.13. $f(x) = x^5 + 6x^4 - 3x^3 - 11x^2 + 7,$
$g(x) = x^4 - 2x^2 + 1.$
2.14. $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 5x + 2,$
$g(x) = 2x^3 + x^2 - x - 1.$
2.15. $f(x) = x^5 + 5x^4 + 9x^3 + 7x^2 + 5x + 3,$
$g(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1.$

3. Используя схему Горнера, вычислите $f(x_0)$.
3.1. $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8, \quad x_0 = 1 + i.$
3.2. $f(x) = 2x^5 - 5x^3 - 8x, \quad x_0 = -3 + i.$
3.3. $f(x) = 4x^3 + x^2, \quad x_0 = -1 - i.$
3.4. $f(x) = x^3 - x^2 - x, \quad x_0 = 1 - 2i.$
3.5. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16, \quad x_0 = i.$

3.6. $f(x) = 5x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 3x + 7, \quad x_0 = 3i.$
3.7. $f(x) = x^5 + (1 + 2i)x^4 - (1 + 3i)x^2 + 7, \quad x_0 = -2 - i.$
3.8. $f(x) = x^5 + (1 - 2i)x^4 - (3 + i)x^2 + 7, \quad x_0 = -1 + 2i.$
3.9. $f(x) = x^4 + 2ix^3 - (1 + i)x^2 - 3x + 7 + i, \quad x_0 = -i.$
3.10. $f(x) = x^4 - 3ix^3 - 4x^2 + 5ix - 1, \quad x_0 = 1 + 2i.$
3.11. $f(x) = 2x^5 + 4x^3 - 5x + 2, \quad x_0 = 2i.$
3.12. $f(x) = 4x^5 - 3x^4 + 2x^2 - 5x, \quad x_0 = 2 + i.$
3.13. $f(x) = 3x^4 - ix^3 + (1 - 2i)x^2 + 2x - 1, \quad x_0 = 3i.$
3.14. $f(x) = 5x^4 + 2ix^3 + 5x - i, \quad x_0 = 1 + i.$
3.15. $f(x) = 3x^4 - x^3 + 2x^2 - 4x + 1, \quad x_0 = i.$

4. Используя схему Горнера, разложите многочлен $f(x)$ из задания 2 по степеням $(x + 1)$.

5. Определите коэффициенты a, b, c так, чтобы многочлен $f(x)$ имел $x = 1$ корнем кратности три.
5.1. $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - 2x + 1.$
5.2. $f(x) = ax^3 + bx^2 - 2cx + 2.$
5.3. $f(x) = 2ax^3 - bx^2 + cx - 1.$
5.4. $f(x) = x^4 - ax^3 + 2bx + c.$
5.5. $f(x) = -ax^4 + 2bx^3 - cx^2 + 2x.$
5.6. $f(x) = ax^4 + 2bx^3 + 3cx - 3.$
5.7. $f(x) = 2ax^3 - bx^2 + cx - 4.$
5.8. $f(x) = -2ax^4 + 3bx^2 - 2cx + 3.$
5.9. $f(x) = ax^4 - 2bx^2 + cx - 2.$
5.10. $f(x) = ax^3 - 3bx^2 + 2cx - 4.$
5.11. $f(x) = 3ax^3 + 2bx^2 - 4cx - 1.$
5.12. $f(x) = -2ax^4 + bx^3 - 2cx - 6.$
5.13. $f(x) = ax^4 - 4bx^2 + cx - 2.$
5.14. $f(x) = 4ax^3 - 2bx^2 + 3cx - 4.$
5.15. $f(x) = -2ax^3 + 2bx^2 - 6cx + 1.$

6. Найдите все корни многочлена $f(x)$ в поле $\mathbb{C}$.
6.1. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x^2 - 9x + 9.$
6.2. $f(x) = x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 15x - 50.$
6.3. $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 10x - 12.$

6.4. $f(x) = x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 3x - 12$.
6.5. $f(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 16x - 24$.
6.6. $f(x) = 2x^4 + 7x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.
6.7. $f(x) = 3x^4 - 17x^3 + 19x^2 + 2x + 8$.
6.8. $f(x) = x^4 + 6x^3 + 14x^2 + 14x + 5$.
6.9. $f(x) = -2x^4 + x^3 - x + 2$.
6.10. $f(x) = -x^4 + 8x^3 - 19x^2 + 22x - 10$.
6.11. $f(x) = -3x^4 + 5x^3 + 33x^2 - 23x + 12$.
6.12. $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 3x - 18$.
6.13. $f(x) = 2x^4 - 13x^3 + 28x^2 - 37x + 20$.
6.14. $f(x) = -3x^4 + 5x^3 + 8x^2 - 20x + 16$.
6.15. $f(x) = -x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 15x + 25$.

7. Найдите все корни многочлена $f(x)$ в поле $\mathbb{C}$, если известен один из корней x_1.

7.1. $f(x) = x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 6x + 13, \quad x_1 = 3 - 2i$.
7.2. $f(x) = x^4 - 8x^3 + 29x^2 - 50x + 52, \quad x_1 = 1 + i\sqrt{3}$.
7.3. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 65, \quad x_1 = 3 + 2i$.
7.4. $f(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x + 5, \quad x_1 = i$.
7.5. $f(x) = x^4 + 2x^3 + 9x^2 + 8x + 20, \quad x_1 = -2i$.
7.6. $f(x) = x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 16x + 32, \quad x_1 = 2i$.
7.7. $f(x) = x^4 - 6x^3 + 23x^2 - 50x + 50, \quad x_1 = 2 - i$.
7.8. $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2, \quad x_1 = 1 + i$.
7.9. $f(x) = x^4 + 2x^3 + 7x^2 + 30x + 50, \quad x_1 = 1 + 3i$.
7.10. $f(x) = x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 16x + 20, \quad x_1 = -2 + i$.
7.11. $f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 10, \quad x_1 = -1 + i$.
7.12. $f(x) = x^4 + 4x^3 + 17x^2 + 16x + 52, \quad x_1 = -2 + 3i$.
7.13. $f(x) = x^4 + 11x^2 + 10x + 50, \quad x_1 = -1 + 2i$.
7.14. $f(x) = x^4 + 2x^3 + 10x^2 - 6x + 65, \quad x_1 = -2 + 3i$.
7.15. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5, \quad x_1 = 2 - i$.

8. Разложите многочлены $f(x)$ и $g(x)$ на неприводимые множители над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

8.1. $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$,
$g(x) = x^6 + 27$.
8.2. $f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 8x - 12$,
$g(x) = x^4 + 16$.

8.3. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 2$,
$g(x) = x^4 + 81$.
8.4. $f(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 1$,
$g(x) = x^4 - 2x^2 + 16$.
8.5. $f(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1$,
$g(x) = 16x^4 + 1$.
8.6. $f(x) = x^5 + 4x^4 + 4x^3 - x^2 - 4x - 4$,
$g(x) = x^6 - 27$.
8.7. $f(x) = x^5 - 6x^4 + 9x^3 - x^2 + 6x - 9$,
$g(x) = x^4 - 2x^2 + 4$.
8.8. $f(x) = x^4 - 5x^3 + 15x^2 - 45x + 54$,
$g(x) = x^6 - 1$.
8.9. $f(x) = x^4 - 7x^3 + 19x^2 - 23x + 10$,
$g(x) = x^4 + 4x^2 + 9$.
8.10. $f(x) = x^5 + 5x^4 - 6x^3 - x^2 - 5x + 6$,
$g(x) = 81x^4 + 1$.
8.11. $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x + 5$,
$g(x) = x^4 - x^2 + 1$.
8.12. $f(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 4x + 16$,
$g(x) = 16x^4 + 4x^2 + 1$.
8.13. $f(x) = x^5 - x^3 - x^2 + 1$,
$g(x) = x^4 + 1$.
8.14. $f(x) = x^5 + x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 6x - 6$,
$g(x) = x^4 - x^2 + 9$.
8.15. $f(x) = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 9$,
$g(x) = x^8 - 1$.

9.8. Дополнительные задачи

1. Найдите все такие значения a и p, чтобы многочлен $f(x) = x^3 + 2x^2 + ax - 3$ делился на многочлен $\varphi(x) = x^2 + 3x + p$.

2. С помощью производной определите кратные множители многочлена

$$f(x) = x^6 + 6x^5 + 9x^4 + 12x^3 - 48x^2 + 48x - 16.$$

3. При каком условии многочлен x^4+px^2+q делится на многочлен x^2+mx+1?

4. Докажите, что

$$(\overline{1}x-\overline{1})(\overline{1}x-\overline{2})\dots(\overline{1}x-\overline{p-1})=\overline{1}x^{p-1}-\overline{1}$$

в кольце $\mathbb{Z}_p[x]$ для любого простого числа p.

5. Найдите многочлен $f(x)$ из условия

$$xf(x-1)=(x-5)f(x).$$

6. Докажите, что многочлен x^4-2x+3 неприводим над полем $\mathbb{Q}$.

7. Докажите, что любой многочлен $f(x)\in\mathbb{R}[x]$, $\deg f(x)\geq 3$, приводим над полем $\mathbb{R}$.

8. Пусть $f(x)=x(x-1)(x-2)\dots(x-n)\in\mathbb{Q}[x]$. Сколько корней у многочлена $f'(x)$?

9. Докажите, что многочлен $f(x)=x^3-2x+a\in\mathbb{R}[x]$ при любом $a\in\mathbb{R}$ имеет на интервале $(1;\infty)$ не больше одного корня.

10. Докажите, что многочлен $f(x)=\overline{1}x^2+\overline{1}x+\overline{1}$ неприводим над полем $\mathbb{Z}_2$, но приводим над полем $\mathbb{Z}_3$.

11. Укажите число различных многочленов степени $n>0$ в кольце $\mathbb{Z}_2[x]$.

12. Перечислите все многочлены степени 2 из кольца $\mathbb{Z}_2[x]$. Укажите неприводимые над полем $\mathbb{Z}_2$.

13. Перечислите все многочлены степени 2 из кольца $\mathbb{Z}_3[x]$. Укажите неприводимые над полем $\mathbb{Z}_3$.

14. Перечислите все неприводимые многочлены степени 3 из кольца $\mathbb{Z}_2[x]$.

15. Укажите число различных многочленов степени $n>0$ в кольце $\mathbb{Z}_p[x]$, где p — простое число.

16. Найдите такие значения a и b из поля $\mathbb{R}$, чтобы многочлен $f(x)=ax^{n+1}+bx^n+1$ делился на $(x-1)^2$.

17. Докажите, что при $n\geq 2$ для многочлена $f(x)=x^{2n}-nx^{n+1}+nx^{n-1}-1$ число 1 является корнем кратности 3.

18. Разложите многочлен $h(x)=x^m+x^{m-1}+\ldots+$

$x+1$ по степеням $x-1$.

19. Докажите, что многочлен $f(x)=x^n-1$ не имеет кратных корней.

20. При каком значении a многочлен $g(x)=x^3-3x+a$ имеет кратные корни?

21. Пусть P — конечное поле. Докажите, что существует такое $m\neq 1$, что значения многочленов x и x^m равны при любом значении x из поля P.

22. Найдите многочлен наименьшей степени из кольца $\mathbb{C}[x]$, который имеет двойной корень 1 и простые корни 2, 3, $1+i$. Найдите многочлен наименьшей степени из кольца $\mathbb{R}[x]$, который имеет такие же корни.

23. Сумма двух корней уравнения $2x^3-x^2-7x+\lambda=0$ равна 1. Найдите λ и корни уравнения.

24. Пусть $f(x)$ — многочлен из кольца $\mathbb{R}[x]$. Докажите, что $f(x)$ имеет хотя бы один действительный корень, если старший коэффициент и свободный коэффициент имеют разные знаки.

25. Пусть $f(x)$ — многочлен из кольца $\mathbb{R}[x]$ и все корни этого многочлена являются чисто мнимыми, т.е. имеют вид ai, где $a\in\mathbb{R}$ и $a\neq 0$. Докажите, что все корни производной $f'(x)$, кроме одного, также являются чисто мнимыми.

26. Найдите все пары действительных чисел a и b, для которых многочлен $f(x)=x^4+ax^2+b$ имеет четыре действительных корня, образующих арифметическую прогрессию.

10. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И РАЦИОНАЛЬНЫЕ ДРОБИ

10.1. Интерполяционная формула Лагранжа

Интерполяция — это конструктивное восстановление функции определенного класса, в данном случае многочлена, по известным ее значениям. Задачу об интерполяции можно сформулировать так. Дана таблица, в которой значениям независимой переменной сопоставлены значения функции. Требуется найти функцию (многочлен) с такой таблицей значений.

Более точно. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ — попарно различные элементы, $b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$ — произвольные элементы поля $\mathbb{P}$. Требуется построить многочлен $f(x) \in \mathbb{P}[x]$ степени $\leq n$ такой, что $f(a_i) = b_i$ для всех i.

Положим

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n+1} b_j \varphi_j(x),$$

$$\varphi_j(x) = \frac{(x-a_1)\cdots(x-a_{j-1})}{(a_j-a_1)\cdots(a_j-a_{j-1})}\times$$

$$\times\frac{(x-a_{j+1})\cdots(x-a_{n+1})}{(a_j-a_{j+1})\cdots(a_j-a_{n+1})}. \qquad (10.1)$$

Несложно проверить, что многочлен $f(x)$ обладает нужными свойствами. Формула (10.1) носит название *интерполяционной формулы Лагранжа.*

Пример 10.1. В кольце $\mathbb{Q}[x]$ найти многочлен $f(x)$ степени ≤ 3, если $f(-1) = 1$, $f(0) = 5$, $f(1) = 3$, $f(2) = 2$.

☐ Составим таблицу.

	a_1	a_2	a_3	a_4
x	-1	0	1	2
$f(x)$	1	5	3	2
	b_1	b_2	b_3	b_4

Вначале найдем $\varphi_j(x)$ по формуле (10.1).

$$\varphi_1(x) = \frac{(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)} =$$

$$= \frac{x(x-1)(x-2)}{(-1)(-2)(-3)} = \frac{x(x^2-3x+2)}{-6} =$$

$$= \frac{x^3-3x^2+2x}{-6};$$

$$\varphi_2(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_3)(x-a_4)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)} =$$

$$= \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{1(-1)(-2)} = \frac{(x^2-1)(x-2)}{2} =$$

$$= \frac{x^3-2x^2-x+2}{2};$$

$$\varphi_3(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_4)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)} =$$

$$= \frac{(x+1)x(x-2)}{2\cdot 1\cdot(-1)} = \frac{x^3-x^2-2x}{-2};$$

$$\varphi_4(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}{(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)} =$$

$$= \frac{(x+1)x(x-1)}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{x^3-x}{6}.$$

Теперь по формуле (10.1) получаем

$$f(x) = b_1\varphi_1(x) + b_2\varphi_2(x) + b_3\varphi_3(x) + b_4\varphi_4(x) =$$
$$= 1\cdot\frac{x^3-3x^2+2x}{-6} + 5\frac{x^3-2x^2-x+2}{2} +$$
$$+3\frac{x^3-x^2-2x}{-2} + 2\frac{x^3-x}{6} =$$
$$= x^3(-\frac{1}{6}+\frac{5}{2}-\frac{3}{2}+\frac{1}{3})+x^2(\frac{1}{2}-5+\frac{3}{2})+x(-\frac{1}{3}-\frac{5}{2}+3-\frac{1}{3})+5 =$$
$$= \frac{7}{6}x^3 - 3x^2 - \frac{1}{6}x + 5.$$

Проверка: $f(-1) = 1$, $f(0) = 5$, $f(1) = 3$, $f(2) = 2$.

Ответ: $f(x) = \frac{7}{6}x^3 - 3x^2 - \frac{1}{6}x + 5$. ⊠

Пример 10.2. В кольце $\mathbb{C}[x]$ найдите многочлен $f(x)$ степени меньшей или равной 3, для которого $f(-1) = 1+2i$, $f(0) = 1$, $f(i) = 2-3i$, $f(1) = 1$.

□ Запишем таблицу значений многочлена

k	1	2	3	4
a_k	-1	0	i	1
$b_k = f(a_k)$	$1+2i$	1	$2-3i$	1

Воспользуемся интерполяционной формулой Лагранжа (10.1). Находим

$$\varphi_1(x) = \frac{x(x-i)(x-1)}{(-1)(-1-i)(-2)} = \frac{x^3-(1+i)x^2+ix}{2(-1-i)},$$
$$\varphi_2(x) = \frac{(x+1)(x-i)(x-1)}{1(-i)(-1)} = \frac{x^3-ix^2-x+i}{i},$$
$$\varphi_3(x) = \frac{(x+1)x(x-1)}{(i+1)i(i-1)} = \frac{x^3-x}{-2i},$$
$$\varphi_4(x) = \frac{(x+1)x(x-i)}{2(1-i)1} = \frac{x^3+(1-i)x^2-ix}{2(1-i)}.$$

Теперь

$$f(x) = b_1\varphi_1(x) + b_2\varphi_2(x) + b_3\varphi_3(x) + b_4\varphi_4(x) =$$
$$= (1+2i)\frac{x^3-(1+i)x^2+ix}{2(-1-i)} + 1\cdot\frac{x^3-ix^2-x+i}{i} +$$
$$+(2-3i)\frac{x^3-x}{-2i} + 1\cdot\frac{x^3+(1-i)x^2-ix}{2(1-i)} =$$
$$= \frac{(-3-i)}{4}(x^3-(1+i)x^2+ix) - i(x^3-ix^2-x+i) +$$
$$+\frac{(3+2i)}{2}(x^3-x) + \frac{(1+i)}{4}(x^3+(1-i)x^2-ix) =$$
$$= x^3(\frac{-3-i}{4} - i + \frac{3+2i}{2} + \frac{1+i}{4}) + x^2(\frac{2+4i}{4} - 1 + \frac{1}{2}) +$$
$$+x(\frac{1-3i}{4} + i - \frac{3+2i}{2} + \frac{1-i}{4}) + 1 =$$
$$= x^3 + ix^2 - (1+i)x + 1.$$

Итак, $f(x) = x^3 + ix^2 - (1+i)x + 1$.

Проверка. $f(-1) = -1+i+1+i+1 = 1+2i$, $f(0) = 1$, $f(i) = -i-i-i+1+1 = 2-3i$, $f(1) = 1+i-1-i+1 = 1$.

Ответ: $f(x) = x^3 + ix^2 - (1+i)x + 1$. ⊠

В гл. 9 введены многогочлены над полем $\mathbb{P}$ как бесконечные последовательности с конечным числом ненулевых элементов. Эти последовательности складываются и умножаются по формулам (9.2), с. 227, и (9.3), с. 227. Это *формально-алгебраический* взгляд на многочлен.

Но любой многочлен $f(x) \in \mathbb{P}[x]$ определяет функцию

$$\tilde{f} : a \longmapsto f(a),$$

ставящую в соответствие каждому элементу $a \in \mathbb{P}$ элемент $f(a) \in \mathbb{P}$. Поэтому многочлен $f(x)$ можно рассматривать как функцию $\tilde{f}$. Это *функциональный взгляд* на многочлен. Следующая теорема показывает, что над бесконечным полем формально-алгебраический и функциональный взгляды на многочлен совпадают.

Теорема 10.1. *Многочлены f и g над бесконечным полем равны тогда и только тогда, когда равны определяемые ими функции $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$.*

Над конечными полями ситуация иная. Различные многочлены могут определять одну и туже функцию. Приведем пример. Пусть $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ — конечное поле из двух элементов и $f(x) = \bar{1}x + \bar{1}$, $g(x) = \bar{1}x^2 + \bar{1}$ — два различных многочлена над полем $\mathbb{Z}_2$. Так как $f(\bar{0}) = \bar{1}$, $f(\bar{1}) = \bar{0}$, $g(\bar{0}) = \bar{1}$, $g(\bar{1}) = \bar{0}$, то как функции $f(x)$ и $g(x)$ совпадают.

10.2. Рациональные дроби

Рациональная дробь над полем $\mathbb{P}$ — это функция
$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$
где $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены над полем $\mathbb{P}$ и $g(x) \neq 0$. Дробь $\varphi(x)$ имеет своей областью определения все те элементы $x_0 \in \mathbb{P}$, для которых $g(x_0) \neq 0$. Таким образом, область определения $\varphi(x)$ получается в результате удаления из поля $\mathbb{P}$ всех корней многочлена $g(x)$.

Две рациональные дроби
$$\varphi_1(x) = \frac{f_1(x)}{g_1(x)}, \quad \varphi_2(x) = \frac{f_2(x)}{g_2(x)}$$
считаются *равными*, если их области определения совпадают и
$$\frac{f_1(x_0)}{g_1(x_0)} = \frac{f_2(x_0)}{g_2(x_0)}$$

для любого x_0 из области определения. Последнее равенство перепишем в виде
$$f_1(x_0)g_2(x_0) = f_2(x_0)g_1(x_0). \tag{10.2}$$
В бесконечном поле $\mathbb{P}$ элемент x_0 может принимать бесконечно много значений из области определения $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, поэтому условие (10.2) ввиду теоремы 10.1 равносильно равенству многочленов
$$f_1(x)g_2(x) = f_2(x)g_1(x). \tag{10.3}$$

Обратно, если выполняется равенство (10.3), то для любого $x_0 \in \mathbb{P}$ имеет место равенство (10.2). Это означает, что рациональные дроби $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ принимают одинаковые значения в общей области определения. Поэтому рациональные дроби $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ можно считать равными, если выполняется равенство (10.3).

Через $\mathbb{P}(x)$ обозначим совокупность всех рациональных дробей над полем $\mathbb{P}$. Сложение и умножение рациональных дробей определим следующими равенствами
$$\frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2} = \frac{f_1g_2 + f_2g_1}{g_1g_2}, \tag{10.4}$$
$$\frac{f_1}{g_1} \cdot \frac{f_2}{g_2} = \frac{f_1f_2}{g_1g_2}. \tag{10.5}$$
Несложно проверить, что результат сложения и умножения дробей не изменится при замене дробей на равные. Следовательно, равенства (10.4) и (10.5) определяют бинарные алгебраические операции на $\mathbb{P}(x)$.

Теорема 10.2. *Множество $\mathbb{P}(x)$ всех рациональных дробей над полем $\mathbb{P}$ с операциями сложения (10.4) и умножения (10.5) является полем.*

Нулевым элементом в поле $\mathbb{P}(x)$ будет $0/1 = 0$, где 0 и 1 — нулевой и единичный элементы поля

$\mathbb{P}$, противоположным к f/g элементом будет элемент $(-f)/g = -(f/g)$. Элемент $1/1 = 1$ является единичным в $\mathbb{P}(x)$. Если f/g — ненулевой элемент, то $f \neq 0$ и дробь g/f будет обратным элементом к f/g.

Рациональная дробь называется *правильной*, если степень ее числителя меньше степени знаменателя. Из теоремы о делении с остатком, следует, что *любая рациональная дробь есть сумма многочлена и правильной дроби.*

Теорема 10.3. *Совокупность всех правильных дробей является подкольцом поля $\mathbb{P}(x)$.*

Правильная рациональная дробь f/g называется *простейшей* над полем $\mathbb{P}$, если ее знаменатель g является степенью неприводимого над $\mathbb{P}$ многочлена p, т.е. $g = p^k$, $k \geq 1$, и степень числителя f меньше степени p.

Например, над полем $\mathbb{C}$ неприводимыми являются только многочлены 1-й степени. Поэтому над полем $\mathbb{C}$ простейшими будут дроби

$$\frac{A}{(x-c)^k}, \quad k \geq 1, \quad A \in \mathbb{C}, \quad c \in \mathbb{C}.$$

Над полем $\mathbb{R}$ неприводимым являются многочлены первой и второй степени с отрицательным дискриминантом. Поэтому простейшими над полем $\mathbb{R}$ будут дроби

$$\frac{A}{(x-c)^k}, \ \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}, \ p^2-4q<0,$$

$$A, B \in \mathbb{R}, \ p, q, c \in \mathbb{R}.$$

Теорема 10.4. *Всякая рациональная дробь представима в виде суммы многочлена и простейших дробей.*

10.3. Разложение рациональной дроби над $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$

Над полем $\mathbb{C}$ неприводимыми будут только многочлены первой степени, поэтому каждый многочлен $g(x)$ над $\mathbb{C}$ разложим в произведение

$$g(x) = a(x-c_1)^{k_1}(x-c_2)^{k_2}\cdots(x-c_m)^{k_m}.$$

Простейшими будут дроби $A/((x-c)^k)$, $k \geq 1$, $A, c \in \mathbb{C}$. Следовательно,

$$\frac{f}{g} = \frac{A_{11}}{a(x-c_1)} + \frac{A_{12}}{(x-c_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1k_1}}{(x-c_1)^{k_1}} +$$

$$+\frac{A_{21}}{x-c_2} + \frac{A_{22}}{(x-c_2)^2} + \ldots + \frac{A_{2k_2}}{(x-c_2)^{k_2}} + \ldots +$$

$$+\frac{A_{m1}}{x-c_m} + \frac{A_{m2}}{(x-c_m)^2} + \ldots + \frac{A_{mk_m}}{(x-c_m)^{k_m}}.$$

Над $\mathbb{R}$ неприводимыми являются многочлены первой степени и многочлены второй степени с отрицательным дискриминантом. Поэтому каждый многочлен $g(x)$ над полем $\mathbb{R}$ разложим в произведение

$$g(x) = a(x-c_1)^{k_1}\cdots(x-c_m)^{k_m}\times$$
$$\times(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdots(x^2+p_tx+q_t)^{l_t}.$$

Простейшими над $\mathbb{R}$ будут дроби

$$\frac{A}{(x-c)^k}, \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^l},$$

где $p^2-4q<0$, $c, p, q \in \mathbb{R}$, $A, B, C \in \mathbb{R}$. Следовательно,

$$\frac{f}{g} = \frac{A_{11}}{a(x-c_1)} + \frac{A_{12}}{(x-c_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1k_1}}{(x-c_1)^{k_1}} + \ldots +$$

$$+\frac{A_{m1}}{x-c_m} + \frac{A_{m2}}{(x-c_m)^2} + \ldots + \frac{A_{mk_m}}{(x-c_m)^{k_m}} + \ldots +$$

$$+\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{B_{12}x+C_{12}}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\ldots+\frac{B_{1l_1}x+C_{1l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}}+\ldots+$$
$$+\frac{B_{t1}x+C_{t1}}{x^2+p_tx+q_t}+\frac{B_{t2}x+C_{t2}}{(x^2+p_tx+q_t)^2}+\ldots+\frac{B_{tl_t}x+C_{tl_t}}{(x^2+p_tx+q_t)^{l_t}}.$$

Пример 10.3. Разложить над $\mathbb{R}$ рациональную дробь

$$\frac{x^3+x+1}{x^2+2x+1}.$$

$\square$ Исходная рациональная дробь неправильная. Разложим ее в сумму многочлена и правильной дроби.

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & & +x & +1 & x^2+2x+1 \\ \cline{5-5}
x^3 & +2x^2 & +x & & x-2 \\ \cline{1-4}
 & -2x^2 & & +1 & \\
 & -2x^2 & -4x & -2 & \\ \cline{2-4}
 & & 4x & +3 &
\end{array}$$

Итак,

$$\frac{x^3+x+1}{x^2+2x+1}=x-2+\frac{4x+3}{x^2+2x+1}.$$

Правильную рациональную дробь

$$\frac{4x+3}{(x+1)^2}$$

разложим в сумму простейших:

$$\frac{4x+3}{(x+1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}=$$
$$=\frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2}=\frac{Ax+(A+B)}{(x+1)^2}.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях неизвестного:

$$\begin{cases}4=A\\ 3=A+B,\end{cases}$$

откуда $A=4, \quad B=-1$.

Ответ:

$$\frac{x^3+x+1}{x^2+2x+1}=(x-2)+\frac{4}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}.$$

$\boxtimes$

Пример 10.4. Разложить над $\mathbb{R}$ рациональную дробь

$$\frac{2x-1}{(x+1)^2(x^2+x+1)}.$$

$\square$ Многочлен x^2+x+1 имеет отрицательный дискриминант, поэтому неприводим над $\mathbb{R}$. Имеем:

$$\frac{2x-1}{(x+1)^2(x^2+x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}=$$
$$=\frac{A(x+1)(x^2+x+1)+B(x^2+x+1)+(Cx+D)(x+1)^2}{(x+1)^2(x^2+x+1)}.$$

Приравниваем числители

$2x-1=A(x+1)(x^2+x+1)+B(x^2+x+1)+(Cx+D)(x+1)^2$.

Пусть $x=-1$. Тогда $-3=B$, т.е. $B=-3$. Пусть $x=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Тогда

$$2(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})-1=(C(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})+D)(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2});$$
$$-2+i\sqrt{3}=C(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})^2+D(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})=$$
$$=C(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})+D(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}).$$

Приравнивая действительные и мнимые части, получаем

$$\begin{cases}-2=-\frac{1}{2}(C+D)\\ \sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}(-C+D),\end{cases}$$

$$\begin{cases} C+D=4 \\ -C+D=2, \end{cases}$$

$D=3$, $C=1$. Пусть $x=0$. Тогда $-1=A-3+3$ и $A=-1$.

Ответ:

$$\frac{2x-1}{(x+1)^2(x^2+x+1)} == \frac{-1}{x+1}+\frac{-3}{(x+1)^2}+\frac{x+3}{x^2+x+1}.$$

⊠

Пример 10.5. Разложите рациональную дробь

$$F(x)=\frac{x^4+x^3-3x^2-2x}{x^3-3x-2}$$

в сумму многочлена и простейших дробей над полем $\mathbb{R}$.

□ Представим дробь $F(x)$ в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби. Для этого разделим числитель на знаменатель.

$$\begin{array}{rrrr|l} x^4 & +x^3 & -3x^2 & -2x & x^3-3x-2 \\ \cline{5-5} x^4 & & -3x^2 & -2x & \qquad x+1 \\ \cline{1-4} & x^3 & & & \\ - & x^3 & -3x & -2 & \\ \cline{2-4} & & & 3x+2 & \end{array}$$

Следовательно,

$$F(x)=x+1+\frac{3x+2}{x^3-3x-2}.$$

Разложим над полем $\mathbb{R}$ многочлен x^3-3x-2 на неприводимые множители: $x^3-3x-2=(x+1)^2(x-2)$. Представим правильную рациональную дробь в виде суммы простейших дробей

$$\frac{3x+2}{(x+1)^2(x-2)}=\frac{A}{(x+1)^2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-2}=$$

$$=\frac{A(x-2)+B(x+1)(x-2)+C(x+1)^2}{(x+1)^2(x-2)}.$$

Тогда

$$3x+2=A(x-2)+B(x+1)(x-2)+C(x+1)^2.$$

Придавая значения $x=1$, $x=2$, $x=0$, получаем: $A=\frac{1}{3}$, $C=\frac{8}{9}$, $B=-\frac{8}{9}$.

Ответ:

$$F(x)=x+1+\frac{(\frac{1}{3})}{(x+1)^2}+\frac{(-\frac{8}{9})}{x+1}+\frac{(\frac{8}{9})}{x-2}.$$

⊠

Пример 10.6. Разложите рациональную дробь

$$G(x)=\frac{x^2-2x}{(x^2+1)^2(x-1)}$$

в сумму простейших дробей над полем $\mathbb{R}$.

□ Представим исходную дробь в следуюшем виде:

$$\frac{x^2-2x}{(x^2+1)^2(x-1)}=\frac{Ax+B}{(x^2+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}+\frac{E}{x-1}=$$

$$=\frac{(Ax+B)(x-1)+(Cx+D)(x^2+1)(x-1)+E(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2(x-1)}.$$

Тогда

$$x^2-2x=Ax^2-Ax+Bx-B+(Cx+D)(x^3-x^2+x-1)+Ex^4+$$
$$+2Ex^2+E=(C+E)x^4+(-C+D)x^3+(A+C-D+2E)x^2+$$
$$+(-A+B-C+D)x+(-B-D+E).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему

$$\begin{cases} C+E=0 \\ -C+D=0 \\ A+C-D+2E=1 \\ -A+B-C+D=-2 \\ -B-D+E=0. \end{cases}$$

Решая систему, получим $A = \frac{3}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{4}$, $D = \frac{1}{4}$, $E = -\frac{1}{4}$.

Ответ:
$$G(x) = \frac{3x-1}{2(x^2+1)^2} + \frac{x+1}{4(x^2+1)} - \frac{1}{4(x-1)}.$$
⊠

Пример 10.7. Разложите рациональную дробь
$$F(x) = \frac{3x-1}{(x^2+1)^2}$$
в сумму простейших дробей над полем $\mathbb{C}$.

□ Разложим знаменатель дроби в произведение неприводимых многочленов над полем $\mathbb{C}$:
$$(x^2+1)^2 = ((x+i)(x-i))^2 = (x+i)^2(x-i)^2.$$
Тогда
$$\frac{3x-1}{(x+i)^2(x-i)^2} = \frac{A}{(x+i)^2} + \frac{B}{x+i} + \frac{C}{(x-i)^2} + \frac{D}{(x-i)} =$$
$$= \frac{A(x-i)^2 + B(x+i)(x-i)^2 + C(x+i)^2 + D(x-i)(x+i)^2}{(x+i)^2(x-i)^2},$$
откуда
$3x-1 = A(x-i)^2 + B(x+i)(x-i)^2 + C(x+i)^2 + D(x-i)(x+i)^2$.
Полагая $x = i$, $x = -i$, $x = 0$, $x = 1$, получим:
$$3i - 1 = -4C, \quad C = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}i,$$
$$-3i - 1 = -4A, \quad A = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}i,$$
$$-1 = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4}i - Bi - \frac{1}{4} + \frac{3}{4}i + Di, \quad B - D = -\frac{1}{2}i,$$
$$2 = (\frac{1}{4} + \frac{3}{4}i)(-2i) + 2B(1-i) + (\frac{1}{4} - \frac{3}{4}i)2i + 2D(1+i),$$
$$B(1-i) + D(1+i) = -\frac{1}{2}.$$

Решая систему
$$\begin{cases} B - D = -\frac{1}{2}i \\ B(1-i) + D(1+i) = -\frac{1}{2}, \end{cases}$$
находим $B = -\frac{1}{4}i, D = \frac{1}{4}i$.

Ответ:
$$F(x) = \frac{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}i}{(x+i)^2} + \frac{(-\frac{1}{4}i)}{x+i} + \frac{\frac{1}{4} - \frac{3}{4}i}{(x-i)^2} + \frac{(\frac{1}{4}i)}{x-i}.$$
⊠

10.4. Индивидуальные задания

1. В кольце $\mathbb{R}[x]$ найдите многочлен $f(x)$ наименьшей степени по данной таблице его значений.

1.1.

x	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	5	7	15

1.2.

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	5	25	79

1.3.

x	-2	1	2	4
$f(x)$	-6	3	8	48

1.4.

x	-1	1	2	4
$f(x)$	10	6	4	-30

1.5.

x	-3	-1	1	2
$f(x)$	-30	0	2	-5

1.6.

x	-4	-3	-1	1
$f(x)$	-3	7	3	7

1.7.

x	-2	0	1	2
$f(x)$	4	1	1	6

1.8.

x	-1	1	2	4
$f(x)$	2	0	$\frac{1}{2}$	27

1.9.

x	-1	0	1	4
$f(x)$	3	4	5	13

1.10.

x	-1	0	1	5
$f(x)$	1	2	3	31

1.11.

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	-8	9	14	13

1.12.

x	-3	-1	0	1
$f(x)$	34	0	-4	-2

1.13.

x	-2	0	1	2
$f(x)$	-18	3	0	-8

1.14.

x	-1	0	1	2
$f(x)$	4	1	2	8

1.15.

x	-2	-1	1	2
$f(x)$	-7	2	2	5

2. В кольце $\mathbb{C}[x]$ найдите многочлен $g(x)$ наименьшей степени по данной таблице его значений.

2.1.

x	1	i	-1
$f(x)$	$3i$	$-2+i$	$2+i$

2.2.

x	-2	-1	i
$f(x)$	$-6-i$	$-2-i$	1

2.3.

x	-1	$-i$	1
$f(x)$	$3+i$	$1+i$	$-1+i$

2.4.

x	$-i$	i	0
$f(x)$	2	0	-1

2.5.

x	-2	-1	i
$f(x)$	$-8-2i$	$-i$	$4-i$

2.6.

x	-1	$2i$	1
$f(x)$	$3-3i$	$-6-i$	$5-3i$

2.7.

x	0	1	i
$f(x)$	$-1+i$	-2	$1+i$

2.8.

x	$-i$	0	i
$f(x)$	3	2	$1+2i$

2.9.

x	-1	i	$-i$
$f(x)$	$-4+i$	i	$-3i$

2.10.

x	-2	0	i
$f(x)$	$-1-2i$	1	$1-i$

2.11.

x	0	1	2
$f(x)$	$-2i$	$-2-i$	-8

2.12.

x	1	i	2
$f(x)$	$-1+i$	$-3+i$	-1

2.13.

x	-1	0	i
$f(x)$	$-2i$	$-1-2i$	$-2-2i$

2.14.

x	$-i$	0	1
$f(x)$	$4+2i$	2	$-1+i$

2.15.

x	-1	1	i
$f(x)$	$1+2i$	1	$-2+i$

3. Разложите рациональную дробь $F(x)$ в сумму простейших дробей над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

3.1. $F(x) = \dfrac{2x-3}{(x-1)^2(x+2)^2}$. 3.2. $F(x) = \dfrac{3x-1}{(x+2)^2(x-3)^2}$.

3.3. $F(x) = \dfrac{x-1}{(x-2)^3(x+2)}$. 3.4. $F(x) = \dfrac{3x-2}{(x+3)^3(x-1)}$.

3.5. $F(x) = \dfrac{x-5}{(x-3)^2(x+2)^2}$. 3.6. $F(x) = \dfrac{-3x+2}{(x-5)^2(x+1)^2}$.

3.7. $F(x) = \dfrac{5x-4}{(x-4)^3(x-1)}$. 3.8. $F(x) = \dfrac{-4x+3}{(x+4)(x+1)^3}$.

3.9. $F(x) = \dfrac{x-1}{(x-3)^2(x+4)^2}$. 3.10. $F(x) = \dfrac{3x-5}{(x-2)^2(x+1)^2}$.

3.11. $F(x) = \dfrac{2x-4}{(x+5)(x-1)^3}$. 3.12. $F(x) = \dfrac{-3x+5}{(x-5)^2x^2}$.

3.13. $F(x)=\dfrac{2x-4}{(x+2)^3x}$. 3.14. $F(x)=\dfrac{-x+3}{(x-1)^2(x+2)^2}$.

3.15. $F(x)=\frac{x+1}{x^3(x-2)}$.

4. Разложите рациональную дробь $K(x)$ в сумму простейших дробей над полем $\mathbb{R}$.

4.1. $K(x)=\dfrac{2x^2-x}{(x^2-x+2)^2}$. 4.2. $K(x)=\dfrac{2x^2-1}{(x^2+x+2)^2}$.

4.3. $K(x)=\dfrac{x^2-2x-1}{(x^2+2)^2}$. 4.4. $K(x)=\dfrac{x^2-1}{(x^2+3x+4)^2}$.

4.5. $K(x)=\dfrac{4x^2-5x+2}{(x^2+1)^2}$. 4.6. $K(x)=\dfrac{3x^2-x}{(x^2+4)^2}$.

4.7. $K(x)=\dfrac{2x^2-2}{(x^2+3)^2}$. 4.8. $K(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{(x^2-x+3)^2}$.

4.9. $K(x)=\dfrac{5x^2-6x+1}{(x^2+3)^2}$. 4.10. $K(x)=\dfrac{x^2-2x}{(x^2+5)^2}$.

4.11. $K(x)=\dfrac{5x^2-4x}{(x^2+3x+5)^2}$. 4.12. $K(x)=\dfrac{6x^2-1}{(x^2+2x+2)^2}$.

4.13. $K(x)=\dfrac{x^2-2}{(x^2+2)^2}$. 4.14. $K(x)=\dfrac{2x^2+1}{(x^2-x+2)^2}$.

4.15. $K(x)=\frac{-x^2+3}{(x^2+1)^2}$.

5. Разложите рациональные дроби $F(x)$ и $G(x)$ в сумму многочлена и простейших дробей над полем $\mathbb{R}$, над полем $\mathbb{C}$.

5.1. $F(x)=\frac{2x^4-3x^3-2x^2+4x-5}{x^3-2x^2-x+2}$,
$G(x)=\frac{2x^4+11x^2-x+1}{x^4+4x^2}$.

5.2. $F(x)=\frac{3x^4+4x^3-x^2-35x-6}{x^3+x^2-x-10}$,
$G(x)=\frac{x^4+3x^3-2x^2-2x+3}{x^4-2x^2+1}$.

5.3. $F(x)=\frac{-x^4-2x^3+2x^2+7x+6}{x^3+2x^2-x-2}$,

$G(x)=\frac{-2x^4+x^3-x^2+2x+3}{x^4+x^3-x-1}$.

5.4. $F(x)=\frac{-2x^4-x^3+6x^2-2x-1}{x^3+x^2-x-1}$,
$G(x)=\frac{x^4+4x^3-7x^2-25x-21}{x^4+3x^3-x^2-13x-10}$.

5.5. $F(x)=\frac{-3x^4-2x^2-23x-3}{x^3+x+10}$,
$G(x)=\frac{-3x^4-x^3+9x^2+3x+2}{x^4+x^3-3x^2-5x-2}$.

5.6. $F(x)=\frac{-x^4+8x^3-24x^2+42x-31}{x^3-2x^2+2x-1}$,
$G(x)=\frac{2x^4-x^3+2x^2+x}{x^4-2x^3+2x-1}$.

5.7. $F(x)=\frac{-2x^4+8x^3-7x^2+1}{x^3-4x^2+6x-3}$,
$G(x)=\frac{x^4-x^3+x^2-4}{x^4-4x^3+3x^2+4x-4}$.

5.8. $F(x)=\frac{3x^4+13x^3+2x^2-11x-12}{x^3+4x^2-x-4}$,
$G(x)=\frac{x^4-5x^3+2x^2-x-1}{x^4-5x^3+10x^2-9x+3}$.

5.9. $F(x)=\frac{3x^4-11x^3+16x^2-9x+1}{x^3-3x^2+3x-1}$,
$G(x)=\frac{-2x^4+2x^3-x+5}{x^4-x^3-x^2-x-2}$.

5.10. $F(x)=\frac{-x^4+2x^3+2x-4}{x^3-2x^2+x-2}$,
$G(x)=\frac{x^4-x^3+x^2-2x+2}{x^4-7x^3+18x^2-20x+8}$.

5.11. $F(x)=\frac{-x^4+2x^3+x^2+5x+1}{x^3-1}$,
$G(x)=\frac{2x^4+x^3-x^2-x-2}{x^4+2x^3-2x-1}$.

5.12. $F(x)=\frac{x^4+4x^3+8x^2+9x+2}{x^3+3x^2+4x+4}$,
$G(x)=\frac{-2x^4-x^3-6x^2-4x-8}{x^4+6x^3+13x^2+12x+4}$.

5.13. $F(x)=\frac{2x^4-9x^3+14x^2-x-3}{x^3-5x^2+8x-4}$,
$G(x)=\frac{x^4-x^2+x-4}{x^4+2x^3+x^2-4}$.

5.14. $F(x)=\frac{x^4+5x^3+11x^2+4x+1}{x^3+5x^2+9x+5}$,
$G(x)=\frac{x^4+x^2-4x+1}{x^4+2x^3-3x^2-4x+4}$.

5.15. $F(x)=\frac{2x^4-3x^3+10x^2-12x+3}{x^3-x^2+4x-4}$,
$G(x)=\frac{2x^4+3x^3-3x^2-2x}{x^4+x^3-3x^2-x+2}$.

10.5. Дополнительные задачи

1. Выведите интерполяционную формулу Лагранжа посредством решения системы уравнений:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_{n-1} x_1^{n-1} = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + \ldots + a_{n-1} x_2^{n-1} = y_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_0 + a_1 x_n + \ldots + a_{n-1} x_n^{n-1} = y_n \end{cases}.$$

2. В кольце $\mathbb{Z}_5[x]$ найдите многочлен $f(x)$ наименьшей степени по данной таблице его значений

2.1.

x	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$f(x)$	$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$

2.2.

x	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$f(x)$	$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{4}$

3. В кольце $\mathbb{R}[x]$ найдите многочлен $f(x)$ наименьшей степени по данной таблице его значений.

3.1.

x	0	1	2	$\ldots$	n
$f(x)$	1	2	4	$\ldots$	2^n

3.2.

x	0	1	2	$\ldots$	n
$f(x)$	1	a	a^2	$\ldots$	a^n

, $a \in \mathbb{R}$.

3.3.

x	0	1	2	$\ldots$	n
$f(x)$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\ldots$	$\frac{1}{n}$

4. Найдите $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ по таблице значений

x	1	ϵ_1	ϵ_2	$\ldots$	ϵ_{n-1}
$f(x)$	1	2	3	$\ldots$	n

,

$$\epsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}.$$

5. Пусть $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\deg f(x) = n \in \mathbb{N}$. Предположим, что $f(a+i) \in \mathbb{Z}$ при фиксированном $a \in \mathbb{Z}$ и любом $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Докажите, что $f(b) \in \mathbb{Z}$ при любом $b \in \mathbb{Z}$.

6. Пусть $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\deg f(x) = n \in \mathbb{N}$. Предположим, что $f(0), f(1), f(4), f(9), \ldots, f(n^2) \in \mathbb{Z}$. Докажите, что $f(m^2) \in \mathbb{Z}$ при любом $m \in \mathbb{Z}$.

7. Вычислите следующие суммы, зная, что α, β, γ — корни многочлена $\varphi(x)$:

7.1.
$$\frac{1}{2-\alpha} + \frac{1}{2-\beta} + \frac{1}{2-\gamma},$$
$$\varphi(x) = x^3 - 3x - 1,$$

7.2.
$$\frac{1}{\alpha^2 - 3\alpha + 2} + \frac{1}{\beta^2 - 3\beta + 2} + \frac{1}{\gamma^2 - 3\gamma + 2},$$
$$\varphi(x) = x^3 + x^2 - 4x + 1,$$

7.3.
$$\frac{1}{\alpha^2 - 2\alpha + 1} + \frac{1}{\beta^2 - 2\beta + 1} + \frac{1}{\gamma^2 - 2\gamma + 1},$$
$$\varphi(x) = x^3 + x^2 - 1.$$

8. Разложите рациональную дробь $F(x)$ в сумму многочлена и простейших дробей над полем $\mathbb{Z}_5$.

$$8.1.\quad F(x) = \frac{\overline{1}x^3 + \overline{4}x^2 + \overline{2}x + \overline{3}}{\overline{2}x^2 + \overline{3}x + \overline{1}}.$$

$$8.2.\quad F(x) = \frac{\overline{4}x^3 + \overline{3}x^2 + \overline{2}x}{\overline{2}x^2 + \overline{3}x + \overline{4}}.$$

9. Разложите $\frac{\overline{1}}{\overline{1}x^p - \overline{1}x}$ на простейшие дроби на полем $\mathbb{Z}_p$.

10. Разложите на простейшие дроби на полем $\mathbb{C}$:

10.1. $\frac{1}{x^3-1}$, 10.2. $\frac{1}{x^4-1}$, 10.3. $\frac{1}{x^4-4}$,

10.4. $\frac{1}{x^4+4}$, 10.5. $\frac{1}{x^5-1}$.

11. Пусть $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами и пусть $f(0)f(1)$

— нечетное число. Докажите, что уравнение $f(x) = 0$ не имеет целых решений.

12. Решите в кольце $\mathbb{R}[x]$ уравнение

$$a\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+c\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x.$$

13. Докажите в кольце $\mathbb{R}[x]$ тождество

$$a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x^2.$$

14. Пусть α, β и γ — остатки отделения многочлена $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ на $x-a$, $x-b$, и $x-c$ соответственно. Найдите остаток от деления $f(x)$ на $(x-a)(x-b)(x-c)$.

15. Для многочлена

$$f(x) = x^{10} + a_9x^9 + \ldots + a_0 \in \mathbb{R}[x]$$

известно, что

$$f(1) = f(-1),\ f(2) = f(-2),\ \ldots, f(5) = f(-5).$$

Докажите, что $f(x) = f(-x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

ОТВЕТЫ

1.

1.1. $\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 1 & 4 & 8 & 5 & 7 & 6 & 2 & 9 \end{pmatrix}$,

$\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 3 & 8 & 2 & 4 & 5 & 1 & 9 & 7 \end{pmatrix}$,

$\beta\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 9 & 7 & 2 & 8 & 3 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$,

$(\alpha\beta)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 8 & 9 & 3 & 2 & 4 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$,

$(\beta\alpha)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 4 & 6 & 1 & 7 & 9 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$,

$\beta^{-2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 7 & 1 & 3 & 9 & 8 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

2.2. $\alpha = (137289)(46)(5) = (19)(18)(12)(17)(13)(46)$.

Перестановка α четная.

$\beta = (16892)(374)(5) = (12)(19)(18)(16)(34)(37)$.

Перестановка β четная.

3.3. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 5 & 7 & 2 & 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$,

$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 7 & 5 & 1 & 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}$,

$\sigma^{-1} = (86)(741)(532)$, $\tau^{-1} = (463)(51)(7653)$,

$\sigma\tau = (18675423)$, $\tau\sigma = (15276843)$.

Перестановка $\sigma^2\tau$ четная.

Перестановка $(\tau\sigma)^2\tau(\tau\sigma)^{-1}$ нечетная.

4.4. Перестановка γ четная в трех случаях:

$i = 1, j = 2, k = 6$; $i = 2, j = 6, k = 1$;

$i = 6, j = 1, k = 2$.

Перестановка χ нечетная при $i = 3, j = 5, k = 6$.

5.5. $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 9 & 3 & 8 & 5 & 2 & 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$.

6.6. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}$.

2.

1.7. Операция $a * b = 3(a + b)$ не ассоциативна, поэтому множество $\mathbb{Q}$ с этой операцией не является полугруппой.

2.8. Множество $\mathbb{Q}^*$ с операцией $a * b = 3ab, \forall a, b \in \mathbb{Q}^*$ является абелевой группой с нейтральным элементом $\frac{1}{3}$ и симметричным к a элементом $\frac{1}{9a}$.

3.9. Множество M не будет аддитивной группой, так как в M нет нулевого элемента.

Множество M не будет мультипликативной группой, так как в M не для всех элементов существуют обратные элементы. Например, элемент $\frac{4}{3} \in M$, но он не имеет обратного.

4.10. Множество

$$K = \Big\{ -\frac{a}{4^{k-1}} \mid a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \Big\}$$

с операциями сложения и умножения действительных чисел является кольцом.

5.11. Множество

$$P = \Big\{ \frac{a}{3^{k-1}} \mid a \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N} \Big\}$$

с операциями сложения и умножения действительных чисел полем не является.

3.

2.12. При $a = 478, b = 26$ неполное частное $q = 18$, остаток $r = 10$.

При $a = 478$, $b = -26$ неполное частное $q = -18$, остаток $r = 10$.

Если $a = -478, b = 26$, то $q = -19$, $r = 16$.

Если же $a = -478$, $b = -26$, то $q = 19$, $r = 16$.

3.13. Делитель равен (-94), остаток 9, т. е.

$$40053 = (-94) \cdot (-426) + 9.$$

4.14. $\text{НОД}(1716, 1540) = 44 = 9 \cdot 1716 - 10 \cdot 1540$, $\text{НОК}(1716, 1540) = 60060$.

5.15. $\text{НОД}(44352, 30576) = 336$.

6.1. Либо $a = 16$, $b = 1584$, либо $a = 144$, $b = 176$.

7.2. $\text{НОД}(4704, 96, -154) = 2$, $\text{НОК}(b, c) = 7392$.

4.

1.3. 10.

2.4. 9.

4.5. $\varphi(105840) = 24192$.

5.6. Обратимые элементы: $\overline{1}$, $\overline{5}$, $\overline{7}$, $\overline{11}$, $\overline{13}$, $\overline{17}$.

Делители нуля: $\overline{2}$ и $\overline{9}$, $\overline{3}$ и $\overline{6}$.

Обратные элементы: для $\overline{1}$ — элемент $\overline{1}$, для $\overline{5}$ — элемент $\overline{11}$, для $\overline{7}$ — элемент $\overline{13}$, для $\overline{11}$ — элемент $\overline{5}$, для $\overline{13}$ — элемент $\overline{7}$, для $\overline{17}$ — элемент $\overline{17}$.

6.7. Обратимые элементы: $\overline{1}$, $\overline{3}$.

$\cdot$	$\overline{1}$	$\overline{3}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$

7.8. $x = 1 + 3t,\ t \in \mathbb{Z}$.

8.9. $x = 3 + 4t,\ y = 8 + 9t,\ t \in \mathbb{Z}$.

5.

1.10. $z_1 + z_2 = 2 + i$, $z_1 - z_2 = -8 + 3i$, $z_1 \cdot z_2 = -13 + 13i$,

$$\frac{z_1}{z_2} = -\frac{17}{26} + \frac{7}{26} i.$$

2.11. $x = \frac{3}{7}$, $y = -\frac{20}{7}$.

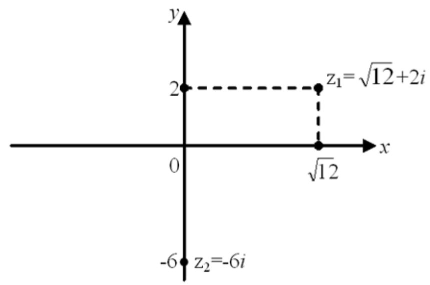
3.12. $\sqrt{-4+3i} = \pm(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i)$,

$$\sqrt{6-i} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{37}-6}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{37}+6}{2}}i\right).$$

4.13. Решения первого уравнения:
$x_1 = 1+i,\ x_2 = 2-4i$.

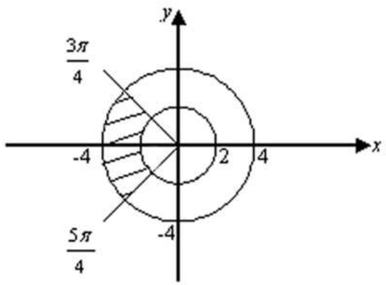
Решения второго уравнения: $x_1 = 1-2i,\ x_2 = 1+2i$.

5.14. $z_1 = 4(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$, $z_2 = 6(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$.



6.15. $\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$.

7.1.



8.2. $(-1-i\sqrt{3})^{30} = 2^{30}$.

$\sqrt[5]{-\sqrt{12}+2i} = \sqrt[5]{4}(\cos\frac{\frac{5\pi}{6}+2\pi k}{5} + i\sin\frac{\frac{5\pi}{6}+2\pi k}{5}), k = 0, 1, 2, 3, 4$.

$z_0 = \sqrt[5]{4}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$, $z_1 = \sqrt[5]{4}(\cos\frac{17\pi}{30} + i\sin\frac{17\pi}{30})$,
$z_2 = \sqrt[5]{4}(\cos\frac{29\pi}{30} + i\sin\frac{29\pi}{30})$,
$z_3 = \sqrt[5]{4}(\cos\frac{41\pi}{30} + i\sin\frac{41\pi}{30})$,
$z_4 = \sqrt[5]{4}(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)$.
$\sqrt[3]{-8} = 2(\cos\frac{\pi+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{3}), k = 0, 1, 2$.
$z_0 = 1+i\sqrt{3},\ z_1 = -2,\ z_2 = 1-i\sqrt{3}$.

6.

1.3. $AB = \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ -12 & -2 \\ -10 & 10 \end{pmatrix}$.

$B^TA = \begin{pmatrix} -6 & 3 & -4 \\ -6 & 8 & -14 \end{pmatrix}$.

$ABC = \begin{pmatrix} -14i & 17-2i \\ -24i & 32-2i \\ -20i & 50+10i \end{pmatrix}$.

Произведения BA, CAB и B^TC — не определены.

2.4. $C^3 - 5C^2 + 2C + 4E_2 = \begin{pmatrix} -2 & -2-10i \\ 6+4i & 14+2i \end{pmatrix}$.

3.5. $X = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -3-2i \\ 7+i & -7 \end{pmatrix}$.

4.6. $X = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{47}{6} \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{7}{6} \end{pmatrix}$.

5.7. $A_1 = \begin{pmatrix} \frac{-3+i\sqrt{33}}{10} & 0 \\ 0 & \frac{-3+i\sqrt{33}}{10} \end{pmatrix}$,

$A_2 = \begin{pmatrix} \frac{-3-i\sqrt{33}}{10} & 0 \\ 0 & \frac{-3-i\sqrt{33}}{10} \end{pmatrix}$,

$A_3 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{10} & \frac{i\sqrt{31}}{10} \\ \frac{i\sqrt{31}}{10} & -\frac{3}{10} \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{10} & -\frac{i\sqrt{31}}{10} \\ -\frac{i\sqrt{31}}{10} & -\frac{3}{10} \end{pmatrix}$.

6.8. $A \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$. $B \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$C \to \begin{pmatrix} -1 & i \\ 0 & 6i \end{pmatrix}$.

7.9. $F^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & \frac{5}{2} & 4 & -3 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -7 & -4 & -5 & 4 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

8.10. $C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i & \frac{3}{4} - \frac{3}{4}i \\ -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i & \frac{3}{4} - \frac{1}{4}i \end{pmatrix}$.

7.

1.11. $i = 2$, $j = 5$, $k = 5$.

2.12. $\det A = 22 - 57i$. $\det B = 32864000$. $\det C = 141$.

3.13. $\det F = 1$. $\det H = 831$.

4.14. -8398080.

5.15. $\det C = 3$. $\det F = 1$.

6.1. $5x^4 - 4x^3 - 37x^2 + 45x - 3$.

7.2. При $x = 0$ ранг матрицы равен 4. При $x = 1$ ранг матрицы равен 4.

8.3. $A^{-1} = \frac{1}{-3+3i} \begin{pmatrix} -1 & -2i \\ 1 & 3 - i \end{pmatrix}$.

$C^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

8.

1.4. Система совместна и имеет единственное решение: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = -1$.

2.5. 1) Система совместна и имеет единственное решение: $x_1 = i$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

2) Система несовместна.

3.6. Система совместна и имеет бесконечно много решений в поле $\mathbb{R}$:

$$x_1 = \frac{17}{2} - 3\alpha + 5\beta, x_2 = -\frac{9}{2} + \alpha - 2\beta, x_3 = \alpha, x_4 = \beta,$$

где α, β — любые действительные числа.

4.7. Система совместна и имеет бесконечно много действительных решений:

$$x_1 = \frac{39}{2} + 11\alpha, x_2 = 11 + 6\alpha, x_3 = \alpha,$$

где α — любое действительное число.

5.8. Если $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$, то система несовместна.

Если $\alpha \notin \{0; 1\}$, то система совместна и имеет единственное решение:

$$x_1 = \frac{\alpha + 1}{\alpha}, x_2 = -\frac{2}{\alpha - 1}, x_3 = \frac{\alpha + 1}{\alpha(\alpha - 1)}.$$

6.9. $B = \begin{pmatrix} 3\alpha + \beta & -\alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$, где α, β — любые действительные числа.

9.

1.10. $q(x) = \overline{2}x^2 + \overline{3}$ — неполное частное, $r(x) = \overline{1}x + \overline{1}$ — остаток.

2.11. НОД$(f(x), g(x)) \ni -6 = f(x)(x^2 - 2x + 4) + g(x)(-x^5 + 2x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 8x - 7)$.

3.12. $f(2 + i) = -135 + 95i$.

4.13. $f(x) = (x+1)^5 + (x+1)^4 - 17(x+1)^3 + 24(x+1)^2 - 6(x+1) + 4$.

5.14. $a = 1$, $b = 6$, $c = 4$.

6.15. $x_1 = -1$, $x_2 = 5$, $x_3 = \frac{-1-i\sqrt{19}}{2}$, $x_4 = \frac{-1+i\sqrt{19}}{2}$.

7.1. $x_1 = 3 - 2i$, $x_2 = 3 + 2i$, $x_3 = -i$, $x_4 = i$.

8.2. Разложение на неприводимые множители над полем $\mathbb{R}$:

$f(x) = (x-1)(x+3)(x^2+4)$,
$g(x) = (x^2 - 2\sqrt{2}x + 4)(x^2 + 2\sqrt{2}x + 4)$.

Разложение на неприводимые множители над полем $\mathbb{C}$:
$f(x) = (x-1)(x+3)(x-2i)(x+2i)$,

$$g(x) = (x-\sqrt{2}-i\sqrt{2})(x-\sqrt{2}+i\sqrt{2})(x+\sqrt{2}-i\sqrt{2})(x+\sqrt{2}+i\sqrt{2}).$$

10.

1.3. $f(x) = \frac{3}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2$.
2.4. $f(x) = -2x^2 + ix - 1$.
3.5. Разложение над полем $\mathbb{R}$ и над полем $\mathbb{C}$:
$F(x) = -\frac{2}{25(x-3)^2} + \frac{9}{125(x-3)} - \frac{7}{25(x+2)^2} - \frac{9}{125(x+2)}$.
4.6. $K(x) = \frac{3}{x^2+4} - \frac{x+12}{(x^2+4)^2}$.
5.7. Разложение над полем $\mathbb{R}$:
$F(X) = -2x + \frac{5x-1}{x^2-3x+3}$,
$G(x) = 1 - \frac{3}{2(x-1)} + \frac{1}{18(x+1)} + \frac{8}{3(x-2)^2} + \frac{40}{9(x-2)}$.
Разложение над полем $\mathbb{C}$:
$F(X) = -2x + \frac{\frac{5}{2}-\frac{13\sqrt{3}}{6}i}{x-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i} + \frac{\frac{5}{2}+\frac{13\sqrt{3}}{6}i}{x-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$,
$G(x) = 1 - \frac{3}{2(x-1)} + \frac{1}{18(x+1)} + \frac{8}{3(x-2)^2} + \frac{40}{9(x-2)}$.

Использованная литература

1. Бокуть Б.В., Сокорева С.И., Шеметков Л.А., Харламов И.Ф. Вузовское обучение: проблемы активизации. Мн.: Университетское. 1989. – 110 с.
2. Боревич З.И. Определители и матрицы. М.: Наука. 1988.
3. Бузланов А.В., Монахов В.С. Лабораторные работы по курсу "Алгебра и теория чисел". Гомель. 1991. – 96 с.
4. Бурдун А.А., Мурашко Е.А., Толкачев М.М., Феденко А.С. Сборник задач по алгебре и геометрии. Мн.: Университетское. 1999. – 301 с.
5. Виноградов И.М. Основы теории чисел. М.: Наука. 1972.
6. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч. 1. Основы алгебры. М.: Физматлит. 2000.
7. Лельчук М.П., Полевченко И.И., Радьков А.М., Чеботаревский Б.Д. Практические занятия по алгебре и теории чисел. Мн.: Выш. шк. 1986. – 302 с.
8. Милованов М.В., Тышкевич Р.И., Феденко А.С. Алгебра и аналитическая геометрия. Мн.: Аламфея. 2001. – 401 с.
9. Монахов В.С. Определители и системы линейных уравнений. Тексты лекций по курсу "Алгебра и теория чисел". Гомель. 1991. – 56 с.
10. Монахов В.С. Числа и многочлены. Тексты лекций по курсу "Алгебра и теория чисел". Гомель. 1992. – 82 с.
11. Монахов В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов. Мн.: Выш. шк. 2006.
12. Радьков А.М., Чеботаревский Б.Д. Алгебра и теория чисел. Мн.: Выш. шк. 1992. – 236 с.
13. Сборник задач по алгебре/ Под ред. Кострикина А.И. М.: Физматлит. 2001.

Рекомендуемая литература

14. Бэйкер А. Введение в теорию чисел. Мн.: Вышэйш. шк. 1995.
15. Винберг Э.Б. Курс алгебры. М.: Факториал Пресс. 2002. — 544 с.

16. Глухов М.М. Алгебра и аналитическая геометрия. М.: Гелиос АРВ. 2005. – 392 с.
17. Глухов М.М., Елизаров В.П., Нечаев А.А. Алгебра. Том I. М.: Гелиос АРВ. 2003. – 336 с.; Том II. – 414 с.
18. Михалев А.В., Михалев А.А. Начала алгебры, часть 1. М.: Интернет-университет информационных технологий. 2005– 258 с.
19. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. М.: Высшая школа. 1979. – 560 с.
20. Куликов Л.Я., Москаленко А.И., Фомин А.А. Сборник задач по алгебре и теории чисел. М.: Просвещение. 1993.
21. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука. 1975.
22. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. М.: Наука. 1984.
23. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. М.: Наука. 1977.
24. Шнеперман Л.Б. Сборник задач по алгебре и теории чисел. Мн. Выш. шк. 1982. – 224 с.
25. Шнеперман Л.Б. Курс алгебры и теории чисел в задачах и упражнениях. В 2 ч.: Ч 1. Мн. Выш. шк. 1986; Ч. 2. Мн. Выш. шк. 1987. – 256 с.

Предметный указатель

Содержание

Монахов Виктор Степанович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и геометрии Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины. Научные работы по теории конечных групп и теории графов. Автор ряда методических пособий по вопросам преподавания математики в вузах.

Бузланов Александр Васильевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и геометрии Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины. Научные работы по теории конечных групп. Автор ряда методических пособий по вопросам преподавания математики в вузах.