

**Министерство образования Республики Беларусь**

**Учреждение образования  
«Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины»**

**Отделение физики, математики и информатики НАН Беларуси**

**Гомельский филиал НАН Беларуси**

**ГОМЕЛЬСКИЙ НАУЧНЫЙ СЕМИНАР  
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ,  
ПОСВЯЩЕННЫЙ 100-ЛЕТИЮ  
СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ Ф. И. ФЕДОРОВА**

**(Гомель, 20–22 июня 2011 года)**

**Материалы**

Гомель  
ГГУ им. Ф. Скорины  
2011

**УДК 530(063)\*Федоров (476.2–21 Гомель)**

**«Гомельский научный семинар по теоретической физике, посвященный 100-летию со дня рождения Ф. И. Федорова»,** Научный семинар по теоретической физике (2011, Гомель). Научный семинар по теоретической физике «Гомельский научный семинар по теоретической физике, посвященный 100-летию со дня рождения Ф. И. Федорова», 20–22 июня 2011 г.: [материалы] / редкол.: А. В. Рогачев (гл. ред.) [и др.]. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2011. – 272 с.

ISBN 978-985-439-554-8

В сборнике помещены материалы докладов «Гомельского научного семинара по теоретической физике, посвященного 100-летию со дня рождения Ф. И. Федорова», по следующим направлениям: нелинейная оптика, оптическая гиротропия, упругие волны, фотоакустика, акустооптика, электрослабые свойства микрочастиц, электродинамические и адронные процессы взаимодействия, гравитация, физика лазеров и лазерные технологии, ионно-лучевые и плазменные технологии, формирование структуры и свойства покрытий.

Адресуется научным работникам, аспирантам, магистрантам, студентам.

**Редакционная коллегия:**

А. В. Рогачев (главный редактор), А. Н. Сердюков, Н. В. Максименко, И. В. Семченко, С. А. Хахомов, Ю. В. Никитюк, О. М. Дерюжкова

**ISBN 978-985-439-554-8**

© УО «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины», 2011



**Федор Иванович Федоров  
(19.06.1911–13.10.1994)**

*Гомельский научный семинар  
по теоретической физике,  
посвященный 100-летию  
со дня рождения Ф.И. Федорова*

**20–22 июня 2011 г.,**

**Гомель, Беларусь**

Семинар посвящен 100-летию со дня рождения Ф.И. Федорова – выдающегося физика-теоретика, академика Национальной академии наук Беларуси (1966; чл.-корр. с 1956), доктора физико-математических наук (1955), профессора (1957), заслуженного деятеля науки БССР (1968), лауреата Государственных премий БССР (1972) и СССР (1976), Героя Социалистического Труда (1978), награжденного орденами Ленина (1971, 1978), Трудового Красного Знамени (1949), «Знак Почета» (1953), медалями, автора более 300 научных трудов, в т. ч. 6 монографий, а также научного открытия «сдвиг Федорова» (явление бокового смещения луча света при отражении; диплом на научное открытие выдан в 1980 г). Семинар работал по направлениям, в развитие которых Ф.И. Федоров внес существенный вклад: квантовая теория поля, физика элементарных частиц, кристаллооптика, теория упругих волн в кристаллах, теория гравитации.

## **ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ**

1. Сердюков Анатолий Николаевич, член-корреспондент (председатель)
2. Максименко Николай Васильевич, профессор (зам. председателя)
3. Афанасьев Анатолий Александрович, член-корреспондент
4. Белый Владимир Николаевич, профессор
5. Гиргель Сергей Сергеевич, профессор
6. Килин Сергей Яковлевич, член-корреспондент
7. Митюрин Георгий Семенович, профессор
8. Панков Александр Альбертович, профессор
9. Плескачевский Юрий Михайлович, член-корреспондент
10. Рогачев Александр Владимирович, член-корреспондент
11. Семченко Игорь Валентинович, профессор
12. Соловцова Ольга Павловна, доктор физ.-мат. наук
13. Тимошин Сергей Иванович, профессор
14. Хило Петр Анатольевич, профессор
15. Шепелевич Василий Васильевич, профессор

## **ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ**

1. Хахомов Сергей Анатольевич, проректор по учебной работе УО «ГГУ им. Ф.Скорины» (председатель)
2. Никитюк Юрий Валерьевич, декан физического факультета УО «ГГУ им. Ф.Скорины» (зам. председателя)
3. Дерюжкова Оксана Михайловна, заместитель декана физического факультета УО «ГГУ им. Ф. Скорины» по науке (ученый секретарь)
4. Годлевская Анна Николаевна, доцент кафедры оптики УО «ГГУ им. Ф.Скорины» (секретарь)
5. Алешкевич Николай Александрович, заведующий кафедрой оптики УО «ГГУ им. Ф.Скорины»
6. Андреев Виктор Васильевич, заведующий кафедрой теоретической физики УО «ГГУ им. Ф.Скорины»
7. Мышковец Виктор Николаевич, заведующий кафедрой радиофизики и электроники УО «ГГУ им. Ф.Скорины»
8. Шершнев Евгений Борисович, заведующий кафедрой общей физики УО «ГГУ им. Ф.Скорины»
9. Капшай Валерий Николаевич, доцент кафедры теоретической физики УО «ГГУ им. Ф.Скорины»

## **СЕКЦИИ СЕМИНАРА**

### **1. «Оптика кристаллов»**

(нелинейная оптика, оптическая гиротропия)

Председатель:

Семченко Игорь Валентинович, профессор

### **2. «Акустика кристаллов»**

(упругие волны, фотоакустика, акустооптика)

Председатель:

Хахомов Сергей Анатольевич, доцент

### **3. «Теория фундаментальных взаимодействий»**

(электрослабые свойства микрочастиц, электродинамические и адронные процессы взаимодействия, гравитация)

Председатель:

Максименко Николай Васильевич, профессор

### **4. «Новые материалы и технологии»**

(физика лазеров и лазерные технологии, ионно-лучевые и плазменные технологии, формирование структуры и свойства покрытий)

Председатель:

Рогачев Александр Владимирович, профессор

**WWW страница:** <http://gsu.by/Fedorov2011/>

## **ПОРЯДОК РАБОТЫ КОНФЕРЕНЦИИ**

**20 июня 2011 г.**

Возложение цветов на могилу Ф. И. Федорова

**21 июня 2011 г.**

**12<sup>00</sup> – 14<sup>00</sup>** – регистрация участников (ГГУ им. Ф.Скорины, ул. Советская, 104, корпус № 4, фойе читального зала)

**14<sup>00</sup> – 17<sup>30</sup>** – открытие конференции, пленарное заседание (ГГУ им. Ф.Скорины, ул. Советская, 104, корпус № 4, читальный зал)

**18<sup>30</sup>** – конференционный ужин

**22 июня 2011 г.**

**10<sup>00</sup> – 12<sup>00</sup>** – работа секций (корпус № 4 ГГУ им. Ф.Скорины)

**12<sup>00</sup> – 13<sup>00</sup>** – перерыв

**13<sup>00</sup> – 14<sup>00</sup>** – работа секции стендовых докладов (выставочный зал, корпус № 4 ГГУ им. Ф.Скорины)

### **Регламент**

Доклады на пленарном заседании	–	до 20 минут
Доклады и сообщения на секциях	–	до 10 минут
Участие в дискуссиях	–	до 5 минут

## **МЕСТА РАБОТЫ СЕКЦИЙ**

### **1. Оптика кристаллов**

22 июня 2011 г., корпус № 4, аудитория 3-1

### **2. Акустика кристаллов**

22 июня 2011 г., корпус № 4, аудитория 3-7

### **3. Теория фундаментальных взаимодействий**

22 июня 2011 г., корпус № 4, зал заседаний ГГУ (читальный зал)

### **4. Новые материалы и технологии**

22 июня 2011 г., корпус № 4, зал заседаний ГГУ (аудитория 1-20)

## ПЛЕНАРНОЕ ЗАСЕДАНИЕ

1. **Рогачев А.В.** ректор УО «Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины»

Открытие конференции.

2. **Плескачевский Ю.М.** председатель Президиума Гомельского филиала НАН Беларуси

Вступительное слово.

3. **Сердюков А.Н.** профессор кафедры оптики УО «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Классик физической науки.

4. **Tretyakov S.** Department of Radio Science and Engineering, School of Electrical Engineering, Aalto University, Finland

Bianisotropic materials optimized for strong interactions with electromagnetic fields.

5. **Константинова А.Ф., Евдищенко Е.А., Набатов Б.В., Головина Т.Г.** Институт кристаллографии РАН, г. Москва, Россия

Развитие исследований оптической активности кристаллов в Институте кристаллографии РАН.

6. **Belyi V.N., Kazak N.S., Ryzhevich A.A., Petrova E.V., Khilo N.A.** ГНУ «Институт физики имени Б.И.Степанова» НАН Беларуси

Propagation and nonlinear transformation of vortex quasi-nondiffractive light beams in crystals.

7. **Шепелевич В.В.** УО «Мозырский государственный педагогический университет имени И.П. Шамякина»

Ф.И. Федоров и развитие оптики фоторефрактивных кристаллов.



**Секция 1 «Оптика кристаллов»**  
(нелинейная оптика, оптическая гиротропия)

Председатель:  
Семченко Игорь Валентинович, профессор

**П.В. Астахов<sup>1</sup>, Н.А. Алешкевич<sup>2</sup>, В.В. Свиридова<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> УО «Гомельский инженерный институт»  
МЧС Республики Беларусь, Беларусь

<sup>2</sup> УО «Гомельский государственный университет  
имени Ф. Скорины», Беларусь

**ОСОБЕННОСТИ ПОГЛОЩЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ  
ВОЛН ТОНКОПЛЕНОЧНЫМИ ПОКРЫТИЯМИ**

Термоупругие, оптические и механические свойства защитных покрытий и пленок, выполненных на основе композитных материалов, сильно зависят от элементного состава компонентов и их структурных свойств. По этой причине существует возможность синтеза новых композитных материалов с заданными заранее физическими характеристиками. Исследование свойств сложных композитных соединений в последнее время вызывает большой интерес по ряду причин. Во-первых, некоторые физические параметры, скажем, теплопроводность [1], благодаря ее сильной зависимости от концентрации примесной дисперсной фазы имеют не совсем обычные температурные зависимости. Другой причиной является то, что композитные соединения могут оказываться значительно более дешевыми, чем однородные структуры, при условии, что композит по ряду физических показателей и в диапазоне заданных параметров идентичен однородным веществам.

Наличие у композитных материалов ряда специфических теплофизических, термоупругих свойств требует, наряду с классическими методами, разработки новых современных методик неразрушающего контроля. К таким методикам относится фототермическая спектроскопия. Одним из перспективных практических приложений метода фототермической спектроскопии является определение температурных напряжений [2], возникающих в слоистых системах под воздействием электромагнитного излучения. Причиной появления напряже-

ний в многослойном образце является пространственно неоднородный и нестационарный нагрев. С увеличением температуры элементарные фрагменты тела деформируются, а поскольку деформация слоистой системы не может происходить свободно, на границах раздела слоев возникают температурные напряжения, приводящие к генерации фототермического сигнала.

Механические свойства композитов зависят от структуры и свойств межфазной границы. Так, сильное межфазное взаимодействие между матрицей и волокном-наполнителем обеспечивает высокую прочность материала, а значительно более слабое – ударную прочность. В обычных композиционных материалах фазы имеют микронные и субмикронные размеры. Однако, в целом, физические свойства конечного композита не могут превосходить свойств чистых компонентов. Несколько по-другому ведут себя нанокompозиты – структурированные материалы со средним размером одной из фаз менее 100 нм. Основные структурные параметры наночастиц – их форма и размер. Физические, электронные и фотофизические свойства наночастиц и кластеров, определяемые их чрезвычайно высокой удельной поверхностью (отношением поверхности к объему), значительно отличаются от свойств как блочного материала, так и индивидуальных атомов [3]. Свойства конечного нанокompозиционного материала зависят от природы взаимодействия между фазами и строения межфазных областей, объемная доля которых чрезвычайно велика.

Нанокompозиты на основе полимеров и керамик сочетают в себе качества составляющих компонентов: гибкость, упругость, перерабатываемость полимеров и характерные для стекол твердость, устойчивость к износу, высокий показатель светопреломления. Благодаря такому сочетанию улучшаются многие свойства материала по сравнению с исходными компонентами. Очевидно, что в ближайшее время нанокompозиты на основе полимеров и керамик найдут применение в качестве специальных твердых защитных покрытий и для неорганических, и для полимерных материалов, а также как световоды и оптические волокна, адгезивы, адсорбенты и, наконец, как новые конструкционные и технологические материалы. Такие композиты могут применяться в целях защиты от определенного вида электромагнитного излучения из заданного частотного интервала.

Кроме линейных зависимостей характеристик, проявляющихся при относительно невысоких мощностях возбуждающих воздействий, композитная пленка может проявлять ряд нелинейных теплофизических свойств. Изучение нелинейных эффектов в композитах позволяет получить важную информацию о микроструктуре материала

лов [4]. Наиболее удобным методом изучения влияния нелинейных свойств композитной пленки на фототермический оклик в данной ситуации являются использование в качестве источника возбуждения второй или третьей гармоники.

Процесс поглощения энергии электромагнитной волны неоднородной композитной пленкой, как и ранее, можно описать следующим образом: однородное периодическое по времени магнитное поле волны вызывает появление в частице вихревого электрического поля напряженностью. Вихревое электрическое поле воздействует на электроны проводимости в частице и вызывает отклонение их функции распределения от равновесной фермиевской. В качестве аппарата, способного описывать отклик электронов на внешнее электромагнитное поле с учетом взаимодействия электронов с границей образца, может быть использована стандартная кинетическая теория электронов проводимости в металле [5]. Вычисленная диэлектрическая проницаемость двухфазных систем (например, композитной пленки, нанесенной на соответствующую подложку) позволяет предсказать ряд особенностей поглощения внешнего электромагнитного излучения подобными веществами.

Как показано в работе [6], поглощение электромагнитных излучений диэлектрическими композитами можно регулировать при помощи добавки в основную матрицу магнитных, металлических и других инородных веществ. Такие материалы обладают уникальными свойствами входящих в их состав кластеров, образованных разным количеством атомов металла или полупроводника – от десяти до нескольких тысяч. Типичные размеры такого агрегата – от 1 до 10 *нм*, что соответствует огромной удельной поверхности. Подобные наночастицы отличаются по свойствам (ширине полосы поглощения, спектральным характеристикам, электронному переносу) как от блочного материала, так и индивидуального атома или молекулы, причем полупроводниковые особенно сильно, даже если размер частицы достигает сотен нанометров. Здесь следует обратить особое внимание на то, что в случае металлических включений диапазон оптимального поглощения электромагнитных излучений и тангенс диэлектрических потерь должны смещаться в сторону меньших длин волн. Последнее определяется тем, что времена релаксаций в электронной подсистеме значительно короче, чем в магнонной и фононной (см., например, [6]), и, следовательно, происходит иерархическое смещение максимума поглощения в область больших частот. Наночастицы проявляют также суперпарамагнетизм и каталитические свойства. При использовании кластеров металлов в качестве катализаторов наночастицы ста-

билизируют, например, в растворе с помощью поверхностно-активных соединений или на подложке из полимерной пленки. Несмотря на сравнительно невысокую термическую стабильность, полимерные материалы довольно часто служат матрицей, фиксирующей нанокластеры.

Количество тепла  $Q$ , выделяющееся в единичном объеме композитной тонкой пленки в единицу времени, если пренебречь потерями в диэлектрической матрице, определяется формулой:

$$Q = \frac{\omega}{8\pi} \mu'' H^2, \quad \mu'' = I_m \mu^*, \quad (1)$$

где  $H$  – вещественная амплитуда напряженности магнитного поля в среде,  $\omega$  – частота возбуждающего излучения, как правило, выбирается в области, в которой материал пленки обладает хорошим поглощением,  $\mu''$  – мнимая часть магнитной проницаемости композитного материала, ответственная за поглощение возбуждающего излучения.

Величина диссипации энергии в композитной пленке, определенная в соответствии с выражением (1) и экспериментально, приведена на рисунке 1. Как следует из расчетов и представленных графиков, поглощение энергии проявляет линейный характер только в незначительном диапазоне длин волн и при поляризации возбуждающей световой волны, близкой к линейной. Таким образом, изменяя состояние поляризации падающей волны, можно управлять скоростью диссипации энергии в композитной пленке.

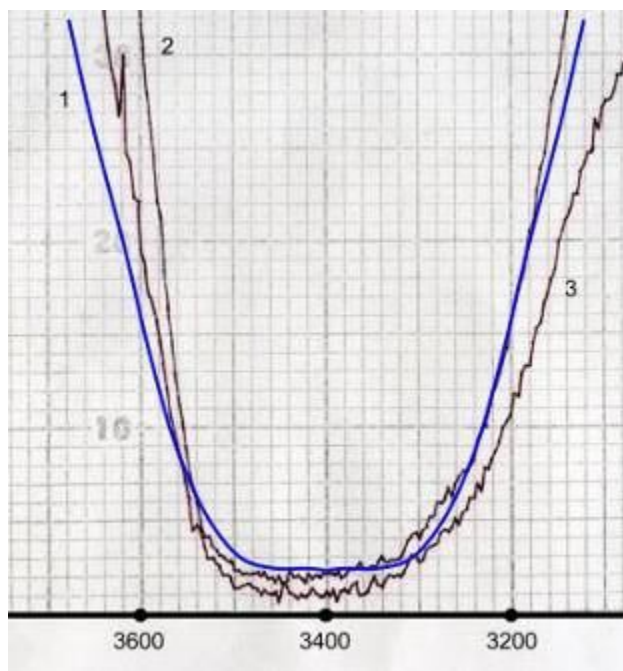


Рисунок 1 – Диссипация электромагнитной энергии в композитной пленке: 1 – расчетные кривые, 2,3 – экспериментальные данные

## Литература

1. Дльнев, Г.Н. Теплопроводность смесей и композиционных материалов / Г.Н. Дльнев, Ю.П. Заричняк. – Л., 1974. – 1 с.
2. Новацкий, В. Теория упругости / В. Новацкий. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
3. Ichinose, N. Superfine Particle Technology / N. Ichinose [et al.] // London. – 1992. – № 6.
4. Proc. of 3 Intern. Conf. on Electrical Transport and Optical Properties of Inhomogeneous Media. Physica. – 1994. – Vol. A207. – P. 8.
5. Займан, Дж. Электроны и фононы / Дж. Займан. – М.: ИЛ, 1962. – Гл. 11. – С. 17.
6. Гладков, С.О. К теории поглощения электромагнитного излучения сильно неоднородными двухкомпонентными системами / С.О. Гладков // Журнал технической физики. – 1999. – Т. 69. – В. 7. – С. 18.

V.N. Belyi<sup>1</sup>, N.S. Kazak<sup>1</sup>, A.A. Ryzhevich<sup>1</sup>, E.V. Petrova<sup>2</sup>, N.A. Khilo<sup>1</sup>

<sup>1</sup> B.I. Stepanov Institute of Physics, NAS of Belarus, Minsk, Belarus

<sup>2</sup> Gomel State Technical University, Gomel, Belarus

## PROPAGATION AND NONLINEAR TRANSFORMATION OF VORTEX QUASI-NONDIFFRACTIVE LIGHT BEAMS IN CRYSTALS

The transformation of polarization state of light fields while propagating in an anisotropic medium is an important topic in the development of classical crystal optics (see, for example, [1-3]), and has led to a multitude of practical polarization devices. However, despite the success in applying the theory, the underlying theoretical framework is based on the limiting case of propagation of plane or quasi-plane waves. The transition from plane waves to Bessel beams (BBs), which are also exact solutions of Maxwell equations, involves new peculiarities in the problem of the transformation of such beams during propagation in anisotropic crystals [4, 5]. It has been shown [6, 7] that uniaxial and biaxial crystals transform simultaneously the polarization state and the spatial structure of BBs, changing the order of a dislocation of the phase front, thus changing the order of the BB after the crystal. In other words, the polarization dynamics of BBs is associated with an energy exchange between circularly polarized components of the fields propagating along the optical axis (of uniaxial or biaxial crystals). For example it

has been shown that in an uniaxial crystal, a right circularly polarized BB of the order  $m$ , converts into a left circularly polarized BB of the order  $m+2$ , and similarly, a left circularly polarized BB of the order  $m$  changes into a right circularly polarized BB of order  $m-2$  [6, 7]. High-order BBs, which are sometimes termed Bessel vortex beams, are an important class of propagation invariant fields, with an amplitude proportional to  $J_m(q\rho)\exp(im\varphi)$ , where  $J_m$  is the  $m$ -th order Bessel function of the first kind,  $\rho$  and  $\varphi$  are the radial and azimuth coordinates, and  $q$  is the transverse wave number. Due to their non-diffractive nature and a very narrow dark central region, high-order Bessel beams can be used for atom guiding over extended distances, the focusing of cold atoms, and for optical trapping and tweezing. Single mode and super-positions of such beams have been created, and the non-diffracting and self-reconstruction properties investigated and applied to simultaneous manipulation and rotation of particles in spatially separated sample cells. Thus the problem of generation and transformation of BBs of various orders is of both scientific and practical importance.

We have studied theoretically and experimentally the dynamics of high-order vortex generation and transformation when Bessel beams propagate or nonlinearly interact in uniaxial crystals. The theoretical description in the linear regime of vortex generation and transformation has been carried out using exact solutions of Maxwell's equations. Without taking into account the processes of diffraction, that is justified when considering BBs used in real experiments with crystals, it is possible to simplify the final equations describing the BB transformation. As a result, a visual comparison can be made of the transformation of BBs and plane waves in uniaxial crystal, namely, the equation for the full transformation ( $\sin(\Delta k_z L/2)=1$ ) of BBs polarization coincides with the corresponding equation for a half-wave plate  $\sin(\Delta k L/2)=1$ . The distinction of these equations consists in the replacement:  $\Delta k_z \rightarrow \Delta k$ , as a consequence of the conical nature of Bessel beams. Here the novelty is in the fact that unlike plane waves, it is impossible to change the circular polarization of a BB into an orthogonal component while simultaneously preserving the spatial structure of the beam. Equations are obtained, which describe Bessel beams as a superposition of TE- and TH-modes of the same order. On the other hand, rigorous solutions of Maxwell's equations for TE- and TH- Bessel modes in uniaxial crystal contain combinations of Bessel functions the order of which differs by two units. Hence it follows that the passage of the Bessel beams through the half-wave plate can be accompanied by the change of the order of Bessel function only by two units. The advantage of using "pure" Bessel beams, but not their superpositions differing by transverse wave number, is the possibility of practically full energy transformation of Bessel beams, their order change

being from order  $m$  to order  $m \pm 2$  (also the order of screw dislocation or topological charge), similarly to the full transformation of the polarization state of plane waves using half-wave plates. It is clear that for superpositions of BBs, which differ by transverse wave number, the full transformation of polarization as well as the order of Bessel functions is unachievable, and only a periodical oscillation is possible of the field structure in the coordinate  $z$ . It is worth noting that the use of an analogous approach for biaxial crystals also allows one to transform effectively the order of Bessel functions by one unit [8].

Bessel beams hold considerable potential in non-linear (NL) optics namely, for second harmonic generation (SHG) [9], optical parametric generation [10], and Raman conversion [11] to name a few. Apart the practical importance, for example, to create optical tweezers, there are a number of physical problems related with generalization of the spin-orbital interaction within NL optical crystals. The problem of transforming the BB order in the process of non-linear interactions of BB is much more complex, with the majority of papers in this direction considering the case when the BB propagates in the same direction of phase-matching as for plane waves [9]. The complexities appear with the description of vector BBs, which in general, given that they may propagate in an arbitrary direction in an uniaxial crystal, are not eigen modes of the crystal. Here the exclusion is the case of the propagation along optical axis, and the SHG is realized for the condition of full-conical phase matching. We have outlined how to solve the problem of the generation and transformation of high order BBs in a rigorous manner [12]. Here, unlike the linear propagation, there appear many possibilities for the manipulation of Bessel vortex beams. It is shown theoretically and experimentally that when a circularly polarized zeroth-order BB propagates along the optical axis of uniaxial crystals, about hundred percent of its energy is converted, under certain conditions, into a second order BB. Due to transversal invariance of the proposed crystal-based scheme, it is possible to transform several Gaussian input beams into an array of vortex beams simultaneously. The high radiation damage threshold of crystals makes it possible to use them in the generation of powerful optical vortex fields.

We have considered the frequency doubling of BBs by making use of a new full conical phase matching condition [12]. This scheme allows putting into practice the nonlinear frequency transformation of Bessel beams having a cone angle of several tens of degrees. Peculiarities of frequency doubling of Bessel vortices under the conditions of the full conical phase matching have been investigated for uniaxial crystals of hexagonal and trigonal symmetry. This new type of frequency doubling of Bessel vortex beams has been experimentally realized in an uniaxial BBO crys-

tal where the incident zero-order Bessel light beam at the fundamental frequency was directed along the optical axis of the crystal and its cone angle set equal to the conical phase matching angle. The SHG by Bessel beams in the conditions of full-conical phase matching allows one to generate Bessel vortex beams of various orders, as well as their linear superpositions. The selection of the field structure of the SHG is realized by means of the mechanism of the transverse phase matching, while the longitudinal phase matching in the scheme under study did not depend on the azimuthal angle. The particular cases of hexagonal and trigonal symmetry crystals ( $C_6$  and  $3m$  point group) differ by axial symmetry of the effective nonlinear dielectric susceptibility ( $d_{eff}$  – coefficient). In general there is an azimuthal dependence of SHG efficiency when  $d_{eff} = d_{eff}(\varphi)$ . The result of this would be an additional azimuthal modulation of the second harmonic field and novel possibilities of transformation of Bessel vortices.

We would like to point out some advantages of the conical phase matching condition for BBs over traditional phase-matching: i) more effective components of the nonlinear susceptibility tensor can be involved in the nonlinear process, and ii) submicron spatial structure of the second harmonic field can be realized. In addition, the advantage of the axial-symmetric scheme is the absence of walk-off effect, and hence the distortion of the second harmonic intensity distribution. Consequently, such crystal-based transformers of the Bessel beam order, like linear analogues, would be characterized by a high quality of the output optical signal.

We should point out that the generated vector Bessel beams are characterized by a rather small-scale ring structure. For example, in the experiments described here, the diameter of the main maximum of BB of the zeroth order was  $\sim 0.58 \mu\text{m}$  and the diameter of the dark axial field for the 1<sup>st</sup> order BB was  $\sim 0.93 \mu\text{m}$ . Undoubtedly such beams would be interesting for applications in microscopy and for the creation of optical tweezers.

### References

1. Борн, М., Вольф, Э. Основы оптики / М.Борн, Э.Вольф. – М.: Наука, 1973.
2. Федоров, Ф.И. Оптика анизотропных сред / Ф.И. Федоров. – Мн.: Академия Наук БССР, 1957.
3. Yariv, A., Yeh, P. Optical Waves in Crystals / A.Yariv, P.Yeh. – New York: Wiley, 1984.
4. Хаткевич, А.Г. Внутренняя коническая рефракция пучков света / А.Г. Хаткевич // Опт. и спектр. – 1979. – Т. 46. – Вып. 3. – С. 505–509.
5. Хаткевич, А.Г. Коническая рефракция и преобразование излу-



чения вблизи оптических осей / А.Г. Хаткевич // ЖПС. – 1996. – Т. 63. – № 6. – С. 1017–1025.

6. Хило, Н.А. Преобразование порядка бесселевых световых пучков в одноосных кристаллах / Н. А. Хило, А.А. Рыжевич, Е.С. Петрова // Кв. эл. – 2001. – Т. 31. – № 1. – С. 85–89.

7. Казак, Н.С. Формирование бесселевых световых пучков в условиях внутренней конической рефракции / Н.С. Казак, Н.А. Хило, А.А. Рыжевич // Кв. эл. – 1999. – Т. 29. – № 2. – С. 184–188.

8. Formation of higher-order Bessel light beams in biaxial crystals / T.A. King, W. Hogervorst, N.S. Kazak [et al.] // Opt. Comm. – 2001. – Vol.187. – P. 407–414.

9. Belyi, V.N. Frequency conversion of Bessel light beams in nonlinear crystals / V.N. Belyi, N.S. Kazak, N.A. Khilo // Quantum electronics. – 2000. – Vol. 30. – № 9. – P. 753–766.

10. Belyi, V.N. Properties of parametric frequency conversion with Bessel light beams / V.N. Belyi, N.S. Kazak, N. A. Khilo // Opt. Comm. – 1999. – Vol. 162. – P. 169–176.

11. Beam quality improvement at Raman conversion of multimode conical beam. / R.V. Chulkov [et al.] // J. Opt. Soc. Am. B. – 2006. – Vol. 23. – № 6. – P. 1109–1116.

12. Generation and propagation of high-order Bessel vortices in linear and non-linear crystals / V. Belyi, N. Khilo, A. Forbes, A. Ryzhevich // Laser Beam Shaping X, 3 August 2009, San Diego, CA, USA: Proc. SPIE. Proceedings of SPIE / Andrew Forbes, Todd E. Lizotte eds. – 2009. – Washington: SPIE. – Vol. 7430. – P. 74300F-1–8.

**С.С. Гиргель**

**УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Беларусь**

## **БЕССЕЛЕВЫ СВЕТОВЫЕ ПОЛЯ В ОДНООСНЫХ КРИСТАЛЛАХ**

Бесселевы световые поля обладают многими интересными свойствами (например, бездифракционным распространением), поэтому широко изучаются в настоящее время [1, 2]. Авторы большинства работ ограничиваются только изотропными средами. Гораздо меньше работ для кристаллов, что обусловлено математическими трудностями. Обычно ограничиваются направлениями вдоль и перпендикуляр-

но оптической оси одноосных кристаллов (см., например, [4–8]) и отдельными направлениями двухосных кристаллов.

В настоящей работе инвариантным методом Ф.И. Федорова [9] изучаются монохроматические бесселевы световые поля вдоль произвольных направлений одноосных кристаллов. Одноосные кристаллы характеризуются тензором  $\varepsilon = \varepsilon_0 + (\varepsilon_e - \varepsilon_0)\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{c}$  – единичный вектор оптической оси ( $\mathbf{c}^2 = 1$ ). В последних возможны моды двух типов: обыкновенные и необыкновенные ( $o$ - и  $e$ -типа) [9].

Пусть в одноосном кристалле в произвольном направлении  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$  ( $\mathbf{n}^2 = 1$ ) распространяется некоторое световое поле. Введем ортонормированный базис  $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ , ( $\mathbf{e}_x = [\mathbf{n}, \mathbf{c}] / \sqrt{[\mathbf{n}, \mathbf{c}]^2}$ ), связанный с векторами  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{c}$ .

Для мод  $o$ -типа электрическое поле можно представить в виде [3, 4, 10–13]

$$\mathbf{E}_0 = [\nabla \psi, \mathbf{c}]; \quad \mathbf{D}_0 = \varepsilon_0 \mathbf{E}_0. \quad (1)$$

Здесь скалярная функция  $\psi$  должна удовлетворять уравнению Гельмгольца

$$(\nabla^2 + k^2)\psi = 0, \quad (2)$$

где, для краткости, введены обозначения  $k^2 = k_0^2 \varepsilon_0$ ,  $k_0 = \omega / c$ .

Одними из возможных решений (2) являются функции Бесселя целочисленного порядка  $m$  первого рода

$$\psi_m(x, y, z) = J_m(k_{\perp} \rho) \cdot \exp[i(k_{\parallel} z + m\varphi)], \quad (3)$$

которые описывают бегущие волны (моды  $o$ -типа) Бесселя вдоль оси  $\mathbf{e}_z$  [10–12]. Здесь  $k_{\parallel}$  – свободный параметр ( $k_{\parallel} \in (0 \div k)$ ), причем

$$k_{\perp}^2 = k^2 - k_{\parallel}^2; \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (4)$$

Как обычно, в (3) азимутальный угол  $\varphi = \arctg(y/x)$ , модовое число  $m$  принимает целочисленные значения  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .

Вычисляя, находим, что

$$\nabla \psi = k_{\perp} (\psi_{m-1} \mathbf{e}_+ - \psi_{m+1} \mathbf{e}_-) / \sqrt{2} + i k_{\parallel} \psi_m \mathbf{n}. \quad (5)$$

Здесь  $\mathbf{e}_{\pm} = (\mathbf{e}_x \pm i \mathbf{e}_y) / \sqrt{2}$  – нормированные циркулярные векторы. Подставляя (5) в (1) вычисляем электрический вектор  $\mathbf{E}_0$  бесселева поля  $o$ -типа при произвольном направлении распространения  $\mathbf{n}$  в одноосном кристалле. После некоторых выкладок  $\mathbf{E}_0$  можно также представить в форме

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_{0\parallel} \cos \theta + \mathbf{E}_{0\perp} \sin \theta. \quad (6)$$

Здесь  $\theta$  – угол между вектором нормали  $\mathbf{n}$  и оптической осью  $\mathbf{c}$ . Элек-

трические векторы  $\mathbf{E}_{0\parallel}$  и  $\mathbf{E}_{0\perp}$  бесселевой моды  $o$ -типа

$$\mathbf{E}_{0\parallel} = ik_{\perp}(\psi_{m-1}\mathbf{e}_+ + \psi_{m+1}\mathbf{e}_-)/\sqrt{2}; \quad (7)$$

$$\mathbf{E}_{0\perp} = ik_{\parallel}\mathbf{e}_x\psi_m + k_{\perp}(\psi_{m+1} - \psi_{m-1})\mathbf{n}/\sqrt{2} \quad (8)$$

соответствуют направлениям, параллельным и перпендикулярным оси  $\mathbf{c}$ .

Вектор магнитного поля  $\mathbf{H}_0 = -i[\nabla, [\nabla\psi, \mathbf{c}]]/k_0$  вычисляем из уравнений Максвелла и представляем также как сумму двух слагаемых [10–12]:

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_{0\parallel} \cos\theta + \mathbf{H}_{0\perp} \sin\theta. \quad (9)$$

Векторы  $\mathbf{H}_{0\parallel}$  и  $\mathbf{H}_{0\perp}$ , описывающие поляризацию бесселевых полей  $o$ -типа вдоль и перпендикулярно оптической оси, соответственно равны:

$$k_0\mathbf{H}_{0\parallel} = k_{\parallel}\nabla\psi_m - ik^2\psi_m\mathbf{n}; \quad k_0\mathbf{H}_{0\perp} = k_{\parallel}\nabla(\psi_{m-1} - \psi_{m+1})/\sqrt{2} + ik^2\psi_m\mathbf{e}_y. \quad (10)$$

Учитывая (5), нетрудно вычислить векторы  $\mathbf{H}_{0\parallel}$  и  $\mathbf{H}_{0\perp}$  явно:

$$k_0\mathbf{H}_e = k_{\perp}\left(k_{\parallel}(\psi_{m-1}\mathbf{e}_+ - \psi_{m+1}\mathbf{e}_-)/\sqrt{2} - ik_{\perp}\psi_m\mathbf{n}\right); \quad (11)$$

$$k_0\mathbf{H}_{0\perp} = \frac{k_{\perp}^2}{\sqrt{8}}(\psi_{m+2}\mathbf{e}_- - \psi_{m-2}\mathbf{e}_+) + i(k^2 - \frac{k_{\perp}^2}{2})\mathbf{e}_y\psi_m - i\frac{k_{\parallel}k_{\perp}}{2}(\psi_{m+1} + \psi_{m-1})\mathbf{n}. \quad (12)$$

Перейдем к модам  $e$ -типа. Для скалярного потенциала  $\psi$  необыкновенной монохроматической световой моды в одноосных кристаллах можно получить следующее анизотропное уравнение Гельмгольца

$$(\nabla\varepsilon\nabla + k_0^2\varepsilon_0\varepsilon_e)\psi = 0. \quad (13)$$

Тогда вектор магнитного поля  $\mathbf{H}_e$  моды  $e$ -типа равен [10–13]

$$\mathbf{H}_e = [\nabla\psi, \mathbf{c}]. \quad (14)$$

Чтобы решить (13), введем масштабированный оператор набла  $\nabla' = \varepsilon^{1/2}\nabla$  и перейдем тем самым к новым переменным ( $\mathbf{r}' = \varepsilon^{-1/2}\mathbf{r}$ ), которые будем отмечать штрихами. Это означает изменение масштаба вдоль оси  $\mathbf{c}$ . При этом поверхность оптической индикатрисы (эллипсоид вращения) превращается в сферу и поэтому анизотропное уравнение Гельмгольца (13) принимает вид

$$(\nabla'^2 + k^2)\psi = 0, \quad (15)$$

как для изотропных сред. В отличие от (2) здесь уже  $k^2 = k_0^2\varepsilon_0\varepsilon_e$ .

Пусть в одноосном кристалле в произвольном направлении  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$  ( $\mathbf{n}^2 = 1$ ) распространяется некоторая необыкновенная мода. Введем масштабированный ортонормированный базис  $\{\mathbf{e}_x', \mathbf{e}_y', \mathbf{e}_z'\}$ , связанный с векторами  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{c}$ :

$$\mathbf{e}_z' = \varepsilon^{-1/2} \mathbf{n} / \sqrt{\mathbf{n} \varepsilon^{-1} \mathbf{n}}; \quad \mathbf{e}_x' = [\mathbf{n}, \mathbf{c}] / \sqrt{[\mathbf{n}, \mathbf{c}]^2};$$

$$\mathbf{e}_y' = [\mathbf{e}_z', \mathbf{e}_x'] = \varepsilon^{1/2} \mathbf{e}_{y0} / \sqrt{\mathbf{e}_{y0} \varepsilon \mathbf{e}_{y0}}.$$

Заметим, что ортогональному базису  $\{\mathbf{e}_x', \mathbf{e}_y', \mathbf{e}_z'\}$  в масштабированной системе координат соответствует неортогональный базис  $\{\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_x', \mathbf{e}_y = \varepsilon \mathbf{e}_{y0} / \sqrt{\mathbf{e}_{y0} \varepsilon \mathbf{e}_{y0}}, \mathbf{e}_z = \mathbf{n}\}$  в реальном пространстве, где  $\mathbf{e}_{y0} = [\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_x]$ .

Одними из возможных решений (13) являются функции Бесселя первого рода, которые описывают бегущие волны (моды) Бесселя вдоль оси  $\mathbf{e}_z'$  [10-12]:

$$\psi_m(x', y', z') = J_m(k_{\perp} \rho') \cdot \exp[i(k_{\parallel} z' + m \varphi')]. \quad (16)$$

Здесь введены обозначения:

$$k_{\parallel} \in (0 \div k); \quad k_{\perp}^2 = k^2 - k_{\parallel}^2; \quad \rho' = \sqrt{x'^2 + y'^2}; \quad \varphi' = \arctg(y'/x'). \quad (17)$$

Масштабированные величины можно представить в инвариантной [8] форме:

$$\rho'^2 = \frac{[\mathbf{n}, \mathbf{r}] \varepsilon^{-1} [\mathbf{n}, \mathbf{r}]}{\mathbf{n} \varepsilon^{-1} \mathbf{n}}; \quad \operatorname{tg} \varphi' = \frac{\mathbf{r} \mathbf{e}_{y0}}{\mathbf{r} \mathbf{e}_x} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mathbf{e}_{y0} \varepsilon \mathbf{e}_{y0}}}; \quad z' = \frac{\mathbf{r} \varepsilon^{-1} \mathbf{n}}{\sqrt{\mathbf{e}_{y0} \varepsilon \mathbf{e}_{y0}}}.$$

Так как  $\nabla \psi = \varepsilon^{-1/2} \nabla' \psi$ , то для расчета  $\nabla \psi$  можно воспользоваться результатами для мод  $o$ -типа, заменяя соответствующие величины штрихованными. В итоге находим, что векторы поля необыкновенных бesselевых мод равны

$$\mathbf{H}_e = [\nabla \psi, \mathbf{c}] = [\nabla' \psi, \mathbf{c}] / \sqrt{\varepsilon_0}. \quad (18)$$

Остальные векторы необыкновенных мод бesselевых световых полей

$$\mathbf{E}_e = i \varepsilon^{-1/2} [\nabla', [\nabla' \psi, \mathbf{c}]] / (k_0 \varepsilon_0 \sqrt{\varepsilon_e}), \quad \mathbf{D}_e = \varepsilon \mathbf{E}_e \quad (19)$$

можно вычислить из уравнений Максвелла и уравнений связи. Для представления векторов поля в явном виде достаточно использовать (5) и заменить переменные величины на их масштабированные. Тогда; например, вектор

$$\mathbf{H}_e = [i k_{\perp} (\psi_{m-1} \mathbf{e}'_+ - \psi_{m+1} \mathbf{e}'_-) / \sqrt{2} + i k_{\parallel} \psi_m \mathbf{n}', \mathbf{c}] / \sqrt{\varepsilon_0}, \quad (20)$$

где  $\mathbf{e}'_{\pm} = (\mathbf{e}'_x \pm i \mathbf{e}'_y) / \sqrt{2}$  – масштабированные циркулярные векторы.

Выражения (18)–(20) эквивалентны соотношениям, ранее полученным нами в [10–12], но представлены здесь в инвариантной форме. Подчеркнем, что для мод  $e$ -типа функции  $\psi_m, \psi_{m\pm 1}, \psi_{m\pm 2}$  зависят от штрихованных координат. Мы показали, что переход от мод  $o$ -типа к полям  $e$ -типа можно осуществить простой заменой соответствующих величин  $o$ -типа на их масштабированные аналоги.

Итак, переход к масштабированному (штрихованному) базису позволил упростить расчеты и получить компактные инвариантные

выражения для бесселевых векторных полей  $o$ - и  $e$ -типов вдоль произвольных направлений в одноосных кристаллах.

### Литература

1. Girgel, S.S. Vectorial of Bessel light beams/ S.S. Girgel, S.N. Kurilkina // Proc. SPIE. – 2001. – Vol. 4358. – P. 258–264.
2. Казак, Н. Бесселевы световые пучки: свойства и перспективы применения // Н. Казак, В. Белый, Н. Хило // Наука и инновации. – 2003. – № 7–8. – С. 9–18.
3. Хило, Н.А. Бесселевы световые пучки в одноосных кристаллах/ Н.А.Хило, Е.С. Петрова // Известия Гомельского госуниверситета им. Ф. Скорины. – 2001. – № 6(9). – С. 103–107.
4. Belyi, V.N. Second Harmonic Generation with Elliptical Bessel beams / V.N. Belyi, N.A. Khilo, E.S. Petrova, A.G. Mashchenko, V.E.Leparskii // XVII International Conference on Coherent and Nonlinear Optics // Proc. SPIE. – 2001. – Vol. 4751. – P. 97–103.
5. Cincotti, G. Propagation-invariant beams in uniaxial crystals / G. Cincotti, A. Ciattoni and C. Palma // Journ. of Mod. Optics. – 2002. – Vol. 49, № 13. – P. 2267–2272.
6. Ciattoni, A. Nondiffracting beams in uniaxial media propagating orthogonally to the optical axis / A. Ciattoni, C. Palma // Opt. Commun. – 2003. – Vol. 224. – P. 175–183.
7. Hacyan, S. Evolution of optical phase and polarization vortices in birefringent media / S. Hacyan and R. Jáuregui // Journ. Optics A. – 2009. – Vol.11, № 8. – P. 085204–085300.
8. Новицкий, А.В. Ковариантные дисперсионные уравнения и тензорные эволюционные операторы для оптических волноводов/ А.В. Новицкий, Л.М. Барковский // Журн. Техн. Физ. – 2005. – № 75, № 5. – С. 101–106.
9. Федоров, Ф.И. Теория гиротропии / Ф.И. Федоров. – Мн. Наука и техника, 1976. – 456 с.
10. Гиргель, С.С. Световые пучки Бесселя в одноосных кристаллах. I. Моды  $o$ -типа / С.С. Гиргель // Материалы Международной конференции «Лазерная физика и применения лазеров», Беларусь, г. Минск, 14–16 мая 2003 г. – С. 78–79; Гиргель, С.С. Световые пучки Бесселя в одноосных кристаллах. II. Моды  $e$ -типа / С.С. Гиргель // Там же. – С. 80–81.
11. Гиргель, С.С. Бесселевы световые пучки в одноосных кристаллах / С.С. Гиргель // Ковариантные методы в физике. Оптика и акустика // Сб. научных трудов. – ИФ НАН Беларуси, 2005. – С. 172–176.
12. Гиргель, С.С. Бесселевы световые пучки/ С.С. Гиргель // Изве-

стия Гомельского госуниверситета им. Ф. Скорины. – 2005. – № 3(30). – С. 93–98.

13. Карпенко, В.А. Потенциальные функции электромагнитных волн в одноосных кристаллах / В.А. Карпенко // Ковариантные методы в теоретической физике. Оптика и акустика. – Мн., 1981. – С. 70–73.

**А.Ф. Константинова, Е.А. Евдищенко, Б.В. Набатов,  
Т.Г. Головина**

**Институт кристаллографии РАН, Москва, Россия**

## **РАЗВИТИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ ОПТИЧЕСКОЙ АКТИВНОСТИ КРИСТАЛЛОВ В ИНСТИТУТЕ КРИСТАЛЛОГРАФИИ РАН**

В 1958 г. на физическом факультете МГУ – студентам кафедры "Кристаллография и кристаллофизика" – читал курс лекций по кристаллооптике замечательный учёный Ф.И. Фёдоров. Именно с этого времени и по настоящее время в Институте кристаллографии (ИК) РАН развиваются методы исследования анизотропных оптически активных кристаллов, основанные на использовании различных физических явлений.

Первые совместные с Ф.И. Фёдоровым работы, в ИК РАН, состояли в исследовании оптической активности одноосных кристаллов с учетом многократных отражений и в определении параметров оптической активности для кристаллов планальных классов. Именно с этих работ начались экспериментальные исследования кристаллов, ориентированных не только в направлении оптической оси, но и произвольным образом относительно её.

После того, как Ф.И. Фёдоровым с учениками были получены точные выражения для азимута и эллиптичности света, прошедшего через пластинку из оптически активного двуосного поглощающего кристалла, стало возможно проводить экспериментальные исследования таких кристаллов. Для этого специально был создан дихрограф. Этот прибор отличается от серийных дихрографов наличием специального приспособления, в силу чего обеспечивается возможность проведения измерений не только для изотропных, но и для анизотропных сред. Благодаря вращению образца в особом держателе исключается влияние линейного двуупреломления, тем самым устраняется необхо-

димось его учёта.

Таким образом, в ИКРАН основные направления исследования оптической активности кристаллов разрабатывались на основе работ Ф.И. Федорова. Выполнение при его жизни и последующие исследования – как теоретические, так и экспериментальные осуществлялись благодаря его идеям. Они способствовали созданию в ИК РАН специальных приборов, таких как спектрополяриметр, дихрограф, комплексный автоматический прибор для одновременного измерения двупреломления, дихроизма и оптической активности кристаллов любой симметрии. На этой основе были предложены различные методы определения параметров света, включая эллиптичность и азимут поляризации собственных волн, степень поляризации и интенсивность прошедшего и отраженного света при его распространении в слоях оптически активных поглощающих кристаллов различных классов симметрии.

В настоящее время на основе научного наследия Ф.И. Федорова, его учеников и соратников исследования по кристаллооптике и развитие разработанных им методов продолжают с участием сотрудников и аспирантов ИК РАН, равно как и других учёных, являющихся последователями этого выдающегося физика-теоретика.

**И.В. Семченко, В.С. Асадчий**

**УО «Гомельский государственный университет  
имени Ф. Скорины», Беларусь**

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ СВОЙСТВ  
ДВУХВИТКОВОЙ СПИРАЛИ С ОПТИМАЛЬНЫМИ  
ПАРАМЕТРАМИ В РЕЖИМЕ ИЗЛУЧЕНИЯ  
ЦИРКУЛЯРНО ПОЛЯРИЗОВАННОЙ ВОЛНЫ**

В настоящее время материалы, представляющие собой диэлектрическую среду с металлическими включениями и обладающие принципиально новыми свойствами, вызывают интерес у исследователей. Такие периодические структуры с микрорезонаторами, называемые метаматериалами, позволяют создавать безотражательные поверхности, вещества с отрицательным показателем преломления, а это в свою очередь делает возможным создание суперлинз и объектов, невидимых на определённых частотах электромагнитного излучения. Потенциальные приложения метаматериалов обусловлены сочетани-

ем их диэлектрических и магнитных свойств, которые могут быть описаны следующими материальными уравнениями [1]:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} - j\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \kappa \mathbf{H}, \quad (1)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} + j\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \kappa \mathbf{E}, \quad (2)$$

где  $\varepsilon_r$  – относительная диэлектрическая проницаемость,  $\mu_r$  – относительная магнитная проницаемость,  $\kappa$  – параметр киральности среды.

В качестве внутренних включений в материалах используются металлические линейные и кольцевые антенны, которые проявляют свои свойства при определённой ориентации плоскости поляризации падающей волны. Однако исследуемые в данном докладе двухвитковые спиральные элементы не имеют этих недостатков и могут возбуждаться как магнитным, так и электрическим полем при любой ориентации плоскости поляризации падающей волны.

В данной работе было проведено компьютерное моделирование электромагнитных свойств двухвитковых спиралей, расположенных в массиве, с целью сравнения результатов с теоретически рассчитанными для данного случая в статье [2] и экспериментально полученными в лаборатории. Также была проведена оптимизация параметров спирали. Было показано, что двухвитковая спираль активируется независимо от направления падающей волны, излучает примерно одинаково во всех направлениях, что подтверждает теоретические расчёты. Данная особенность двухвитковых спиралей не проявляется у одновитковых, что делает двухвитковые спирали более предпочтительными в данном отношении. Однако у двухвитковых спиралей есть и недостатки: по сравнению с одновитковыми они излучают менее интенсивные волны.

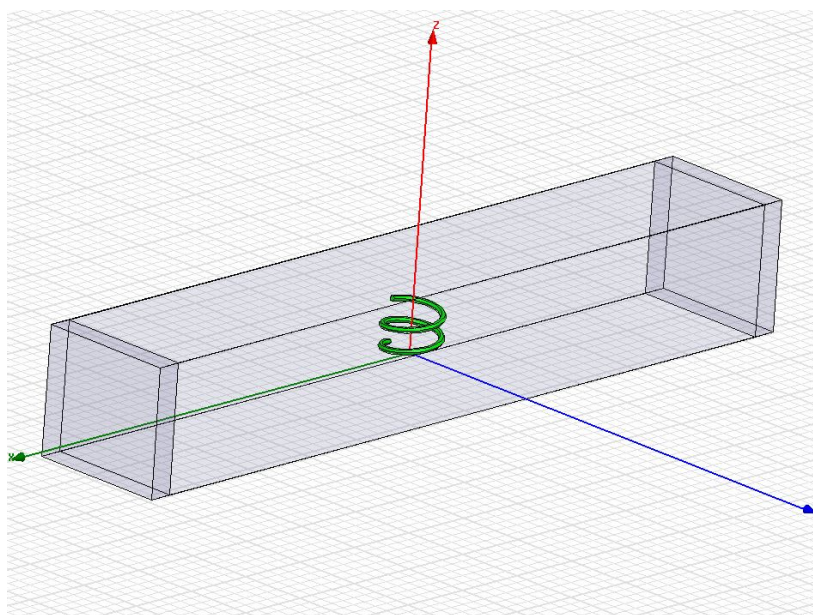


Рисунок 1 – Модель двухвитковой спирали в элементарной ячейке



В работе была смоделирована спираль с оптимальными параметрами, полученными теоретически:

$$\alpha = 7,1^\circ, L = 50\text{мм}, r = 3,95\text{мм}, h = 3,1\text{мм}, d = 0,4\text{мм},$$

где  $\alpha$  – угол подъёма спирали относительно плоскости, перпендикулярной оси спирали,  $L$  – длина проволоки, из которой изготовлена спираль,  $r$  – радиус витка,  $h$  – шаг спирали,  $d$  – диаметр проволоки.

Спираль с такими параметрами излучает циркулярно поляризованные волны, что позволяет применять её в качестве преобразователя поляризации. Был определён коэффициент эллиптичности излучённой волны на резонансной частоте, построена кривая зависимости коэффициента эллиптичности от частоты.

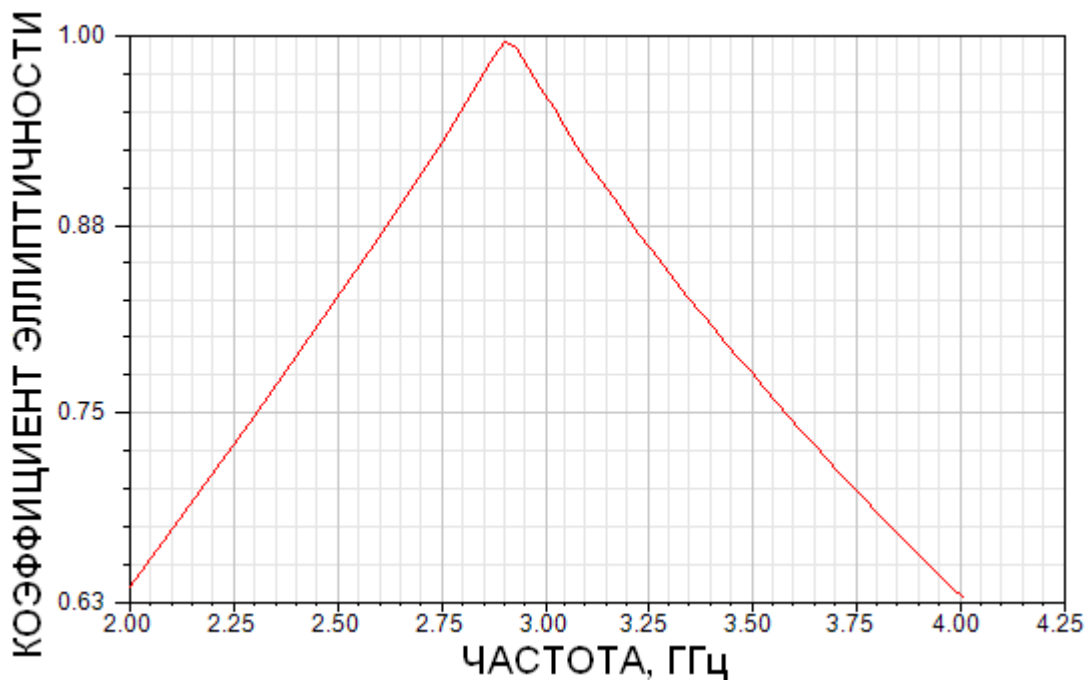


Рисунок 2 – Зависимость коэффициента эллиптичности излучённой волны от частоты.

На резонансной частоте 3 ГГц коэффициент эллиптичности близок к единице, что означает циркулярную поляризацию волны

Так как при моделировании спирали с оптимальными параметрами на резонансной частоте излучённая волна не оказалась точно циркулярной, была проведена компьютерная оптимизация параметров массива спиралей: периода массива (расстояния между соседними спиралями), угла подъёма спиралей. Полученные результаты позволяют спроектировать оптимальный массив спиралей с максимальной интенсивностью излучённой волны.

По аналогии с материальными уравнениями (1) и (2) можно записать уравнения связи для отдельной спирали

$$\vec{p} = \varepsilon_0 \alpha_{ee} \vec{E} - j \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \alpha_{em} \vec{H}, \quad (3)$$

$$\vec{m} = \alpha_{mm} \vec{H} + j \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \alpha_{me} \vec{E}, \quad (4)$$

где  $\vec{p}$  и  $\vec{m}$  – электрический дипольный момент и магнитный момент, возникающие в спирали,  $\alpha_{ee}$  – диэлектрическая,  $\alpha_{mm}$  – магнитная,  $\alpha_{em} = \alpha_{me}^T$  – киральная восприимчивости спирали, символ  $T$  означает транспонирование тензора.

В данной работе было подтверждено универсальное соотношение для восприимчивостей [3]:

$$\alpha_{ee}^{(33)} = \frac{2c}{\omega r^2 q} \alpha_{me}^{(33)}, \quad (5)$$

где индекс 3 означает ось  $z$ , направленную вдоль оси спирали,  $c$  – скорость света в вакууме,  $\omega$  – циклическая частота волны,  $q = \pm 2\pi/h$  – удельное кручение спирали, знаки плюс и минус соответствуют спиралям с правосторонним и левосторонним закручиванием.

Для тензоров диэлектрической, магнитной и киральной восприимчивости были учтены ограничения, обусловленные симметрией спирали и принципом симметрии кинетических коэффициентов Онзагера-Казимира. За счёт этого удалось сократить число независимых компонент в тензорах диэлектрической и магнитной восприимчивостей с девяти до четырёх (для каждого из тензоров) и в псевдотензоре, характеризующем киральные свойства, с девяти до пяти. Также были вычислены главные компоненты этих тензоров и построены для них графики частотной зависимости.

Результаты данной работы подтвердили теоретические расчёты для двухвитковой спирали, а также результаты, полученные экспериментальным путём. Проведенная виртуальная оптимизация параметров метаматериала позволяет усовершенствовать его в реальности и проводить другие подобные эксперименты, которые при отсутствии численного моделирования потребовали бы предварительных сложных теоретических расчётов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (БРФФИ) – проект № Ф10Р-230.

### Литература

1. Ландау, Л.Д. Электродинамика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1982. – Т. 8.
2. Семченко, И.В. Преобразование поляризации электромагнитных волн при помощи спиральных излучателей / И.В. Семченко,

С.А. Хахомов, А.Л. Самофалов // Радиотехника и электроника. – 2007. – Т. 52. – № 8. – С. 1–6.

3. Семченко, И.В. Исследование свойств искусственных анизотропных структур с большой киральностью / И.В. Семченко, С.А. Хахомов, Е.В. Наумова, В.Я. Принц, С.В. Голод, В.В. Кубарев // Кристаллография. – 2011. – Т. 56. – № 3. – С. 404–411.

**И.В. Семченко, С.А. Хахомов, А.Л. Самофалов**

**УО «Гомельский государственный университет  
имени Ф. Скорины», Беларусь**

### **ИССЛЕДОВАНИЕ СИЛЬНЫХ КИРАЛЬНЫХ СВОЙСТВ ИСКУССТВЕННЫХ АНИЗОТРОПНЫХ СТРУКТУР В СВЧ ДИАПАЗОНЕ**

В работе [1] на примере образца, разработанного авторским коллективом из Института физики полупроводников Сибирского отделения РАН, проведено численное моделирование киральных свойств искусственной анизотропной структуры, образованной микроспиралями. Показано, что такая искусственная периодическая структура может проявлять значительные киральные свойства в ТГц-диапазоне. Получены аналитические выражения для диэлектрической, магнитной и киральной восприимчивостей структуры при условии сильных гиротропных свойств. Проведено сравнение теоретических и экспериментальных результатов. В итоге сделан вывод, что предложенная модель удовлетворительно описывает свойства искусственной структуры с большой киральностью.

Используя аналитическое выражение для киральной восприимчивости из статьи [1], проведем моделирование в СВЧ-диапазоне киральных свойств образца искусственной среды, состоящей из медных спиралей с параметрами:

$N_b = 1$ ,  $r = 6,5 \cdot 10^{-3}$  м,  $\alpha = 35^\circ$ ,  $L = 0,05$  м,  $H = 0,0288$  м,  $d = 9 \cdot 10^{-4}$  м; где  $N_b$  – число витков спирали;  $r$  – радиус витка;  $\alpha$  – угол подъема спирали относительно плоскости, перпендикулярной оси спирали;  $L$  – длина медной проволоки (соответствует условию главного частотного резонанса, при котором длина спирали равна половине длины волны электромагнитного поля);  $H$  – высота спирали (в данном случае, для одновитковой спирали, она равна шагу спирали);  $d$  – диаметр медной проволоки.

Зависимость параметра киральности  $\kappa'$  от частоты для среды с сильными киральными свойствами, с учетом его частотной дисперсии имеет вид [1]:

$$\kappa' = \frac{1}{A} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} B \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - j\omega \tilde{A}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \tilde{A}^2} \left( 1 + \frac{q\omega r^2}{2} \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \kappa} \right),$$

где

$$\frac{1}{A} = \frac{2Ne^2}{\pi m_e} \frac{\tau}{r^2 q^2 + 1}, \quad B = \frac{r^2 q}{2} \omega, \quad \tilde{A} = \frac{\rho N_0 N_s e^2}{m_e},$$

$$N = N_0 N_s N_h V_h, \quad V_h = \pi r_0^2 L.$$

$$\tau = j \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\rho}{\pi r^2 S_{np} \sin \alpha} \alpha_{me}, \quad N_s = \frac{2\Delta}{r_0}, \quad \Delta = \sqrt{\frac{2\rho}{\mu_0 \omega}}.$$

$e$  – заряд электрона,  $m_e$  – масса электрона,  $r$  – радиус спирали,  $q$  – удельное кручение спирали,  $\omega$  – частота падающего излучения,  $\rho$  – удельное сопротивление металла,  $N_0$  – объемная концентрация электронов проводимости в металле,  $N_s$  – доля скин-слоя в объеме спирали,  $r_0$  – радиус проволоки,  $N_h$  – концентрация спиралей,  $V_h$  – объем проволоки, из которого изготовлена одна спираль,  $\tau$  – коэффициент ослабления поля внутри металла,  $S_{np}$  – площадь сечения проводника,  $\alpha$  – угол подъема спирали.  $\alpha_{me}$  – магнитоэлектрическая восприимчивость, используемая в материальных уравнениях для отдельной спирали:

$$\mathbf{p} = \varepsilon_0 \alpha_{ee} \mathbf{E} - j \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \alpha_{em} \mathbf{H},$$

$$\mathbf{m} = \alpha_{mm} \mathbf{H} + j \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \alpha_{me} \mathbf{E}.$$

Здесь  $\alpha_{ee}$  и  $\alpha_{mm}$  – тензоры диэлектрической и магнитной восприимчивости,  $\alpha_{em} = \alpha_{me}^T$  – псевдотензор, характеризующий киральные свойства спирали, символ  $T$  означает транспонирование,  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$  – электрическая и магнитная постоянные. При записи этих выражений полагается, что электрическое и магнитное поле являются монохроматическими, и их зависимость от времени описывается функцией  $\exp(j\omega t)$ , как принято в радиофизике [1].

В нашем случае удельное сопротивление меди  $\rho = 1.673 \cdot 10^{-8}$  Ом·м [2], объемная концентрация электронов проводимости в меди определялась как  $N_0 = \rho_m N_A / M$ , где  $\rho_m = 8920$  кг/м<sup>3</sup> – плотность меди [2],  $N_A$  – число Авогадро,  $M$  – молярная масса меди.

Как следует из дисперсионных соотношений Крамерса–Кронига

[3], в окрестности резонансной частоты действительная и мнимая части магнитоэлектрической восприимчивости спирали  $\alpha_{me}$  являются величинами одного порядка. Следовательно, коэффициент ослабления электромагнитного поля внутри металлической спирали  $\tau$  имеет одинаково значимые действительную и мнимую части. Одной из задач данного исследования является определение коэффициента  $\tau$ , который связан с входным сопротивлением спирали. Сравнение экспериментальных данных и результатов расчётов позволяет найти значение комплексной величины  $\tau$ :

$$\tau = \tau' + j \cdot \tau'' = 1.508 \cdot 10^{-5} + j \cdot 1.508 \cdot 10^{-5}.$$

Используя значение комплексного параметра киральности  $\kappa'$ , можно определить частотную зависимость угла поворота плоскости поляризации волны, прошедшей через структуру, для наблюдателя, смотрящего навстречу волне:

$$\varphi = \frac{\omega}{c} \operatorname{Re}(\kappa') z_0,$$

где  $z_0$  – толщина структуры (в нашем случае  $z_0=2r$ ),  $\operatorname{Re}(\kappa')$  – действительная часть комплексного параметра киральности.

Полученная аналитически частотная зависимость угла поворота плоскости поляризации волны, прошедшей через искусственную структуру, показана на рисунке 1 сплошной кривой.

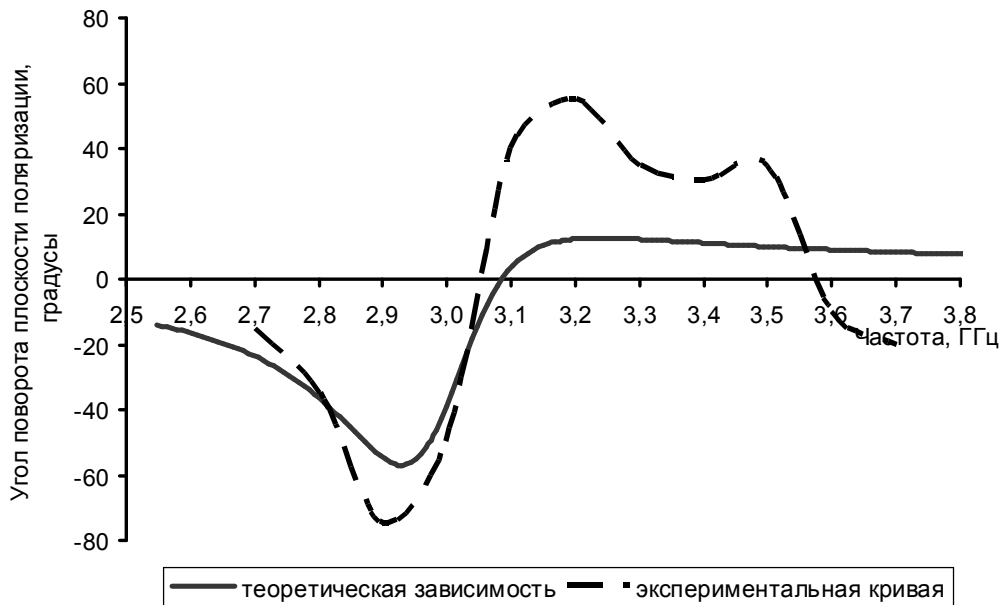


Рисунок 1 – График частотной зависимости угла поворота плоскости поляризации электромагнитной волны, прошедшей через образец двумерной решетки, состоящей из одновитковых левосторонних спиральных элементов с углом подъема  $35^{\circ}$

Если структура образована спиралями с левосторонним кручением ( $q < 0$ ), то для частот, более низких по отношению к резонансной, получаем  $Re(\kappa') < 0$  и  $\varphi < 0$ . Таким образом, для этих частот имеет место поворот плоскости поляризации волны против часовой стрелки, если смотреть навстречу волне.

Аналитическую зависимость угла поворота плоскости поляризации СВЧ волны сравним с результатами экспериментальных исследований, проведенных с образцом искусственной анизотропной двумерной решетки (рисунок 2), состоящей из одновитковых металлических спиральных элементов с углом подъема  $35^\circ$  (экспериментальная кривая приведена на рисунке 1 – штриховая линия) [4].

Сравнение экспериментальных графиков и результата моделирования позволяет сделать вывод, что предложенная модель качественно описывает свойства искусственной структуры с большой киральностью в СВЧ-диапазоне. Направление поворота плоскости поляризации волны, рассчитанное на основании предложенной модели, соответствует направлению поворота, наблюдаемому на эксперименте. Полученное теоретически значение частоты, соответствующей изменению направления вращения плоскости поляризации на противоположное, совпадает, в пределах погрешности измерения, с экспериментальным результатом.

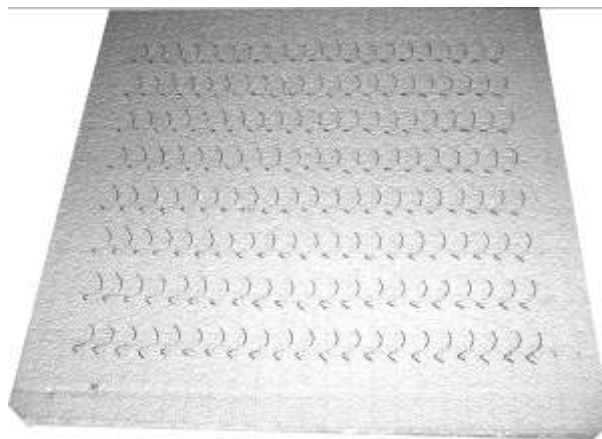


Рисунок 2 – Искусственный образец, содержащий левосторонние одновитковые спирали с углом подъема  $35^\circ$

Целью данного исследования является демонстрация того, что искусственные киральные анизотропные структуры, состоящие из спиралей, могут использоваться для преобразования поляризации электромагнитных волн СВЧ диапазона, например, для получения циркулярно-поляризованной волны, а также вращения главной оси эллипса поляризации

СВЧ волны.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (БРФФИ) – проект № Ф11МС-005.

### **Литература**

1. Исследование свойств искусственных анизотропных структур с большой киральностью / И. В. Семченко [и др.] // Кристаллография. – 2011. – Т. 56. – № 3. – С. 404–411.
2. Таблицы физических величин. Справочник / под ред. И.К. Кикоина. – М.: Атомиздат, 1976. – 1008 с.
3. Ландау, Л.Д. Электродинамика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1982. – 620 с.
4. Самофалов, А.Л. Использование спиральных излучателей для преобразования поляризации электромагнитных волн / А.Л. Самофалов // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2009. – № 4 (55). – Ч. 2. – С. 176–183.

**И.В. Семченко, С.А. Хахомов, И.А. Фаняев**

**УО «Гомельский государственный университет  
имени Ф. Скорины», Беларусь**

### **МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ СВОЙСТВ ОДНОВИТКОВОЙ СПИРАЛИ С ОПТИМАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩИМИ ИЗЛУЧЕНИЕ ЦИР- КУЛЯРНО ПОЛЯРИЗОВАННОЙ ВОЛНЫ**

В настоящее время в теоретической и прикладной электродинамике, а также в смежных областях науки наблюдается значительный рост интереса к исследованию искусственных метаматериалов, обладающих киральными свойствами, в том числе и в СВЧ-диапазоне.

В качестве киральных элементов могут использоваться право- и левовинтовые металлические спирали, сферические частицы со спиральной проводимостью, разомкнутые кольца с выступающими концами, полосковые элементы в виде буквы S и ее зеркального эквивалента и другие.

В данной статье рассматривается массив одновитковых спиралей. Теоретический расчет параметров отдельной спирали был произведён

в [1]. Спираль имеет следующие оптимальные параметры:

$$N_B=1, \alpha=13,6^{\circ}, L=0,05 \text{ м}, r=7,75 \cdot 10^{-3} \text{ м}, h=0,012 \text{ м}, d=0,001 \text{ м},$$

где  $N_B$  – число витков спирали,  $\alpha$  – угол подъема спирали относительно плоскости, перпендикулярной оси спирали,  $L$  – длина проволоки, из которой изготовлена спираль,  $r$  – радиус витка,  $h$  – шаг спирали,  $d$  – диаметр проволоки.

При помощи компьютерного моделирования, на основании метода конечных элементов, был смоделирован массив одновитковых медных спиралей. Вся структура рассматривается в вакууме. Спираль возбуждается падающей линейно поляризованной электромагнитной волной (рисунок 1), вектор напряженности электрического поля параллелен оси одновитковой спирали. Волновой вектор падающей волны ориентирован в плоскости, образованной концами спирали и ее осью.

В дипольном приближении напряженность электрического поля излучаемой волны имеет вид [2]:

$$\vec{E}(\vec{R}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi R} \left( [[\dot{p}, \vec{n}] \vec{n}] + \frac{1}{c} [\dot{n}, \vec{m}] \right), \quad (1)$$

где  $\vec{R}$  – радиус-вектор, проведенный от спирали в точку наблюдения,  $\mu_0$  – магнитная постоянная,  $R$  – расстояние от спирали до точки наблюдения,  $\vec{n}$  – единичный вектор волновой нормали,  $c$  – скорость света в вакууме, точки над векторами обозначают дифференцирование по времени.

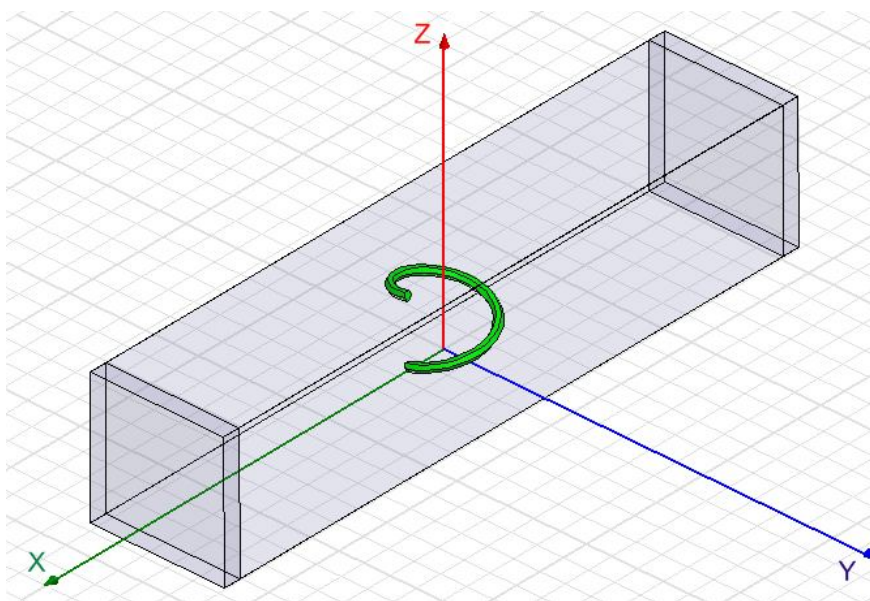


Рисунок 1 – Модель элементарной ячейки с одновитковой спиралью

Расчет компьютерной модели позволяет исследовать интересую-



щие нас электромагнитные свойства одновитковой спирали.

В рассматриваемом диапазоне частот от 2 до 4 ГГц наблюдается главный частотный резонанс токов. В соответствии с законом Ома эффективная сила тока пропорциональна напряженности электрического поля (рисунок 2).

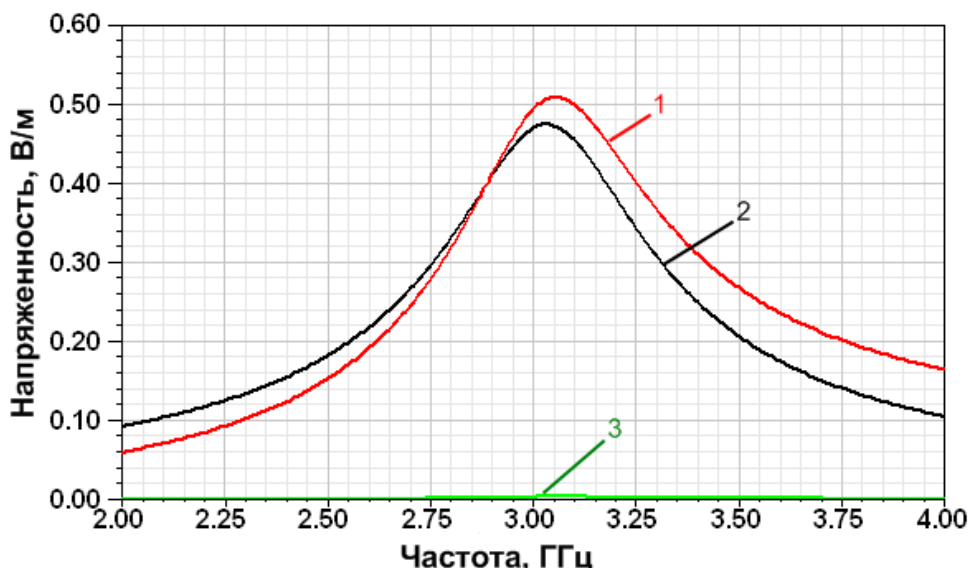


Рисунок 2 – График зависимости компонентов напряженности электрического поля от частоты. 1 – компонента вектора  $E_y$ ; 2 – компонента вектора  $E_z$ ; 3 – компонента вектора  $E_x$

Из полученного графика можно численно определить резонансную частоту, для которой компоненты напряженности электрического поля по осям  $y$  и  $z$  максимальны. Компонента вектора  $E_x$  стремится к нулю, что и должно выполняться для волны в вакууме ввиду поперечности волны.

Так как диаметр спирали мал в сравнении с длиной волны, то есть выполняется неравенство  $d \ll \lambda$ , то токи в диаметрально противоположных точках спирали имеют в пространстве противоположное направление. Это приводит к тому, что в спирали устанавливается режим стоячей волны, излучение вдоль оси спирали равно нулю, и максимум энергии излучается в плоскости, ортогональной оси спирали [3].

Условие излучения циркулярной волны имеет вид [1,4]:

$$|p_z| = \frac{1}{c} |m_z|, \tag{2}$$

где  $c$  – скорость света в вакууме,  $p_z$  и  $m_z$  – компоненты электрического дипольного момента и магнитного момента, направленные вдоль оси спирали.

Параметры спирали рассчитаны таким образом, чтобы формирование циркулярно-поляризованной волны происходило только благодаря излучению компонент  $p_z$  и  $m_z$ . При этом компоненты электрического дипольного момента  $p_x, p_y$  и магнитного момента  $m_x, m_y$ , ортогональны оси спирали, не должны давать вклад в излучённую волну. При условии главного резонанса  $p_x = 0, m_x = 0$  вследствие симметрии распределения тока вдоль спирали. Компоненты  $p_y$  и  $m_y$  не обращаются в нуль, однако в направлении оси  $ou$  эти компоненты электрического дипольного и магнитного моментов не излучают и, следовательно, не искажают циркулярно-поляризованную волну.

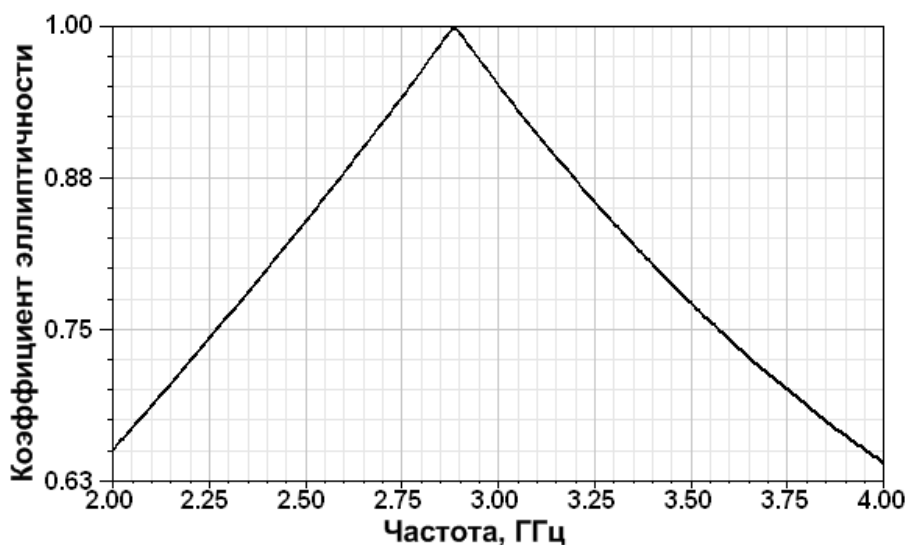
Определение оптимальных параметров спиралей основано на использовании универсального соотношения [1,4]:

$$p_z = -\frac{2j}{\omega r^2 q} m_z, \quad (3)$$

где  $r$  – радиус витка спирали,  $q$  – удельное кручение спирали, связанное с шагом спирали соотношением  $h = \frac{2\pi}{|q|}$ , при этом для спирали с правым закручиванием  $q > 0$ ,  $\omega$  – циклическая частота излучаемой волны,  $i$  – мнимая единица.

Формула (3) является верной для любого распределения тока вдоль спирали, при этом ток может быть индуцирован как падающей волной, так и полями, созданными другими спиралями. Следовательно, оптимальные свойства проявляются не только для отдельных спиралей, но и для искусственных структур, то есть для массива спиралей.

Основным показателем циркулярно поляризованной волны является коэффициент эллиптичности. На рисунке 3 представлен коэффициент эллиптичности в частотном диапазоне.



### Рисунок 3 – График зависимости коэффициента эллиптичности отраженной волны от частоты

Из полученного графика видно, что при резонансной частоте коэффициент эллиптичности приближен к единице. Это свидетельствует о том, что волна, отражённая массивом спиралей, близка к циркулярно-поляризованной.

На основе проделанного моделирования из построенных графиков зависимостей можно судить о поляризации волны, излучаемой массивом одновитковых спиралей с оптимальными параметрами в направлении, перпендикулярном оси спиралей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (БРФФИ) – проект № Ф10Р-230.

### Литература

1. Semchenko, I.V. Optimal Shape of Spiral: Equality of Dielectric, Magnetic and Chiral Properties / I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov, A.L. Samofalov // Proceedings of META'08, NATO Advanced Research Workshop, Metamaterials for Secure Information and Communication Technologies 7–10 May, 2008, Marrakesh – Morocco. – P. 71–80.

2. Ландау, Л.Д. Теория поля / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1988. – Т. 2. – 512 с.

3. Марков, Г.Т. Антенны: учебник для студентов радиотехнических специальностей вузов. Изд. 2-е, перераб. и доп. / Г.Т. Марков, Д.М. Сазонов. – М.: Энергия, 1975. – 528 с.

4. Семченко, И.В. Преобразование поляризации электромагнитных волн при помощи спиральных излучателей / И.В. Семченко, С.А. Хакхомов, А.Л. Самофалов // Радиотехника и электроника. – 2007. – Т. 52. – №8. – С. 1–6.

### В.В. Филиппов

Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси, Беларусь

### ТЕМПЕРАТУРНО-НЕЗАВИСИМЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ КРИСТАЛЛА $\text{KGd}(\text{WO}_4)_2$

#### Введение

Кристаллы калий-гадолиниевого вольфрамата  $\text{KGd}(\text{WO}_4)_2$

(КГВ) находят широкое применение в лазерной технике. Легирование их ионами эрбия, иттербия, неодима, диспрозия, празеодима, гольмия позволяет получать высокоэффективную генерацию света видимого и ближнего ИК диапазонов [1–6]. Немаловажно и то, что концентрации вводимых ионов могут быть гораздо выше по сравнению с обычно используемыми для этих целей кристаллами YAG или YVO<sub>4</sub>. Кроме того, эти кристаллы обладают ярко выраженными нелинейными свойствами, что предопределяет их потенциальное использование во многих устройствах нелинейной оптики, в частности, для получения перестраиваемой генерации в лазерах на основе вынужденного комбинационного рассеяния света [7, 8].

Кристаллы КГВ относятся к centrosymmetric классу  $2/m$  моноклинной сингонии. Ввиду невысокой симметрии их диэлектрические, тепловые и термооптические свойства описываются тензорами второго ранга с тремя различными собственными значениями [9]. Дисперсия главных показателей преломления кристаллов КГВ, допированных ионами Er и Nd, измерена соответственно в работах [10, 11], главные показатели преломления для ряда длин волн чистых кристаллов приведены в работе [12]. Кристаллы отличаются довольно большим двулучепреломлением и сильной анизотропией теплового расширения [13-16].

Одна из особенностей кристалла КГВ состоит в том, что термооптические коэффициенты его главных показателей преломления отрицательны, а компоненты тензора коэффициентов теплового линейного расширения  $\alpha_{ik}$  положительны и сравнимы по величине с ТК. Благодаря этому в кристалле возможны такие направления распространения волн, для которых фаза волны не будет изменяться с температурой. Несколько таких направлений были экспериментально обнаружены в работе [13]. Очевидно, эти температурно-независимые (атермальные) направления представляют практический интерес. В силу низкой симметрии кристалла только одна из главных осей оптической индикатрисы и тензора  $\alpha_{ik}$  совпадают, две другие развернуты (на угол 33.°55 [13]) Поэтому температурно-независимые направления могут быть найдены только численно.

### **Численный расчет и обсуждение результатов**

Для описания оптических свойств кристалла введем тензор диэлектрической проницаемости с компонентами  $\varepsilon_j = n_j^2$ , где  $n_j$  ( $j = p, m, g$ ) – главные показателя преломления кристалла и  $\varepsilon_p < \varepsilon_m < \varepsilon_g$ . Он принимает диагональный вид в системе главных осей с единичными векторами  $\mathbf{u}_p, \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_g$ , которые совпадают с осями оптической индикатрисы кристалла  $p, m, g$  соответственно. В кристаллах

КГВ вектор  $\mathbf{u}_p$  совпадает с направлением оси второго порядка, которая параллельна кристаллографической оси  $b$ . Две другие оси индикатрисы и, соответственно, векторы  $\mathbf{u}_m$ ,  $\mathbf{u}_g$  не совпадают с кристаллографическими осями  $a$  и  $c$ , которые составляют между собой угол  $130.8^\circ$  [10]. Вектор  $\mathbf{u}_m$  лежит между ними и составляет с кристаллографической осью  $c$  угол  $68.5^\circ$ , тогда как  $\mathbf{u}_g$  расположен по другую сторону оси  $c$  и составляет с ней угол  $21.5^\circ$  [10]. Оптические оси кристалла (бинормали) лежат в плоскости, ортогональной оси со средним значением диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_m$  [17].

Тензор коэффициентов линейного расширения кристалла КГВ  $\alpha$  имеет диагональный вид в системе иных главных осей, в которой только одна ось с наименьшим значением (обозначим его  $\alpha_p$ ) совпадает с вектором  $\mathbf{u}_p$ . Две другие лежат в плоскости векторов  $\mathbf{u}_m$ ,  $\mathbf{u}_g$ , причем ось с максимальным значением коэффициента теплового расширения составляет с вектором  $\mathbf{u}_g$  в нашей системе осей угол, равный  $33,5^\circ$  [15]. В системе главных осей тензора диэлектрической проницаемости (оптической индикатрисы) в ковариантном представлении тензор  $\alpha$  имеет вид

$$\alpha = \alpha_p \mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}_p + \alpha_{mm} \mathbf{u}_m \cdot \mathbf{u}_m + \alpha_{gg} \mathbf{u}_g \cdot \mathbf{u}_g - \alpha_{mg} (\mathbf{u}_m \cdot \mathbf{u}_g + \mathbf{u}_g \cdot \mathbf{u}_m). \quad (1)$$

Здесь точка означает прямое произведение векторов; в координатном представлении  $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})_{ik} = u_i \cdot u_k$ . При нагреве кристалла происходит его расширение, поскольку все диагональные коэффициенты в представлении (1) положительны.

Из условия независимости фазы от температуры следует:  $\Delta n/n + \Delta l/l = 0$ , где  $\Delta l/l$  относительное удлинение кристалла,  $\Delta n/n$  – относительное изменение показателя преломления волны в кристалле. Относительное удлинение кристалла описывается тензором коэффициентов линейного теплового расширения  $\alpha$ . В направлении  $\mathbf{n}$  при изменении температуры на 1К оно равно [9]  $\mathbf{n}\alpha\mathbf{n}$ , а условие независимости фазы от температуры принимает вид:

$$\alpha\mathbf{n} + n^{-1} dn/dT = 0, \quad (2)$$

Для краткости будем называть эти направления атермальными направлениями кристалла (АНК). Если кристалл помещен в резонатор, то кроме температурного изменения фазового набег в кристалле происходит дополнительное изменение оптического пути за счет расширения кристалла. С учетом этого атермальными направлениями кристалла в резонаторе (АНКР) будут определяются из уравнения

$$\mathbf{n}\alpha\mathbf{n} + (n - 1)^{-1} dn/dT = 0 \quad (3)$$

Показатели преломления изонормальных волн в двуосном кристалле довольно сложным образом выражаются через компоненты тензора диэлектрической проницаемости кристалла  $\varepsilon$  [17, 18]. Темпе-

ратурное изменение показателя преломления волны  $dn/dT$  зависит от направления распространения волны и выражается через термооптические коэффициенты для главных показателей преломления кристалла,  $i = p, m, g$ . Задавая в общем случае ориентацию фазовой нормали в кристалле  $\mathbf{n}$  с помощью углов  $\theta$  и  $\psi$  ( $\mathbf{n} = \sin\theta \cdot \cos\psi \cdot \mathbf{u}_p + \sin\theta \cdot \sin\psi \cdot \mathbf{u}_m + \cos\theta \cdot \mathbf{u}_g$ ), и решая уравнения (2, 3), можно найти все АНК и АНКР.

Результаты численных расчетов температурно-стабильных фазовых направлений для главных плоскостей оптической индикатрисы кристалла КГВ представлены в таблицах 1 и 2. Значения главных показателей преломления и термооптические постоянные для излучения с длиной волны 633 нм были взяты из работ [13], [15].

Таблица 1 – АНК в кристалле КГВ

Главная плоскость	Температурно-независимые направления	
	Известные	Новые
$m-g$ ( $\psi = \pi/2$ )	$\theta=107,7^\circ$ $\theta=139,5^\circ$ обыкновенная волна	$\theta=130,1^\circ$ $\theta=108,1^\circ$ необыкновенная волна
$g-p$ ( $\psi = 0$ )	$\theta = 114,4^\circ$ $\theta = 65,6^\circ$ обыкновенная волна	$\theta = 126,6^\circ$ $\theta = 53,5^\circ$ необыкновенная волна
$p-m$ ( $\theta = \pi/2$ )		$\psi = 51,4^\circ$ обыкновенная волна $\psi = 40,1^\circ$ необыкновенная волна
АНК для обеих волн одновременно		$\psi = 34,0^\circ$ , $\theta = 131,8^\circ$ $\psi = 83,4^\circ$ , $\theta = 107,4^\circ$

Как следует из таблицы 1 в главных плоскостях кристалла КГВ имеется десять АНК. По два атермальных направления для обеих изонормальных волн существует в плоскостях с главными показателями преломления  $n_m, n_g$  и  $n_p, n_g$  и по одному направлению для каждой из изонормальных волн – в плоскости  $n_p, n_m$ . Кроме того, в кристалле существуют такие направления, для которых обе волны в будут температурно-стабильными.

Таблица 2 – АНКР в кристалле КГВ

Главная плоскость	Температурно-независимые направления	
	Для обыкновенной волны (известные)	Для необыкновенной волны (новые)
$p - m$	Нет	Нет
$p - g$	45,50° 134,50°	22,90° 157,10°
$m - g$	8,50° 104,45°	25,10° 103,20°
АНКР для обеих волн одновременно	$\psi = 16,25^\circ$ , $\psi = 71,60^\circ$ ,	$\theta = 136,03^\circ$ $\theta = 106,32^\circ$ .

Для АНКР как видно из таблицы 2, в главных плоскостях оптической индикатрисы  $p - g$  и  $m - g$  существует по два АНКР. Впервые они были указаны в работе [13]. Однако кроме этих известных направлений существует в каждой из отмеченных выше плоскостей по два АНКР для необыкновенной волны. В плоскости  $p - m$  ни для какой из волн в кристалле таких направлений нет. Таким образом, в главных плоскостях имеется всего восемь, а не четыре температурно-стабильных (атермальных) направлений распространения видимого излучения.

Здесь также существуют направления, для которых обе волны для кристалла в резонаторе будут температурно-независимые.

В общем случае в кристалле КГВ имеется совокупность направлений распространения, для которых фаза одной из изонормальных волн свободного кристалла или кристалла, помещенного в резонатор, остается постоянной при изменении температуры кристалла. Таких совокупностей направлений четыре, по две для каждой из изонормальных волн. Их сечения главными плоскостями оптической индикатрисы  $p-g$  и  $m-g$  дает четыре направления в этих плоскостях, по два для каждой из изонормальных волн, указанные в таблицах 1 и 2. Кроме них в плоскости  $p-m$  только свободного кристалла имеются две совокупности температурно-независимых направлений.

Для направлений распространения генерируемого излучения, соответствующих АНКР, минимальны фазовые искажения, что обуславливает более высокую температурную стабильность генерации с вырезанными соответствующим образом кристаллами КГВ.

## Литература

1. Kaminskii, A.A. Laser Crystals. Their Physics and Properties / A.A. Kaminskii // Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag. – 1981. – P. 720
2. A.A. Kaminskii [et al.] // J. Appl. Phys. Part 2. – 1997. – Vol. 36. – P. L107.
3. Kuleshov, N.V [et al.] // Opt Lett. – 1997. – Vol. 22. – P.1317.
4. А.А. Каминский, А.А. Павлюк, И.Ф. Балашов [ и др.] // Изв. АН СССР, сер. Неорган. Мат. –1978. – Vol.14. – P.2256.
5. A.A. Kaminskii, J.B. Gruber, S.N. Bagaev [et al.] // Phys. Rev. – 2002. – Vol. 65. – P. 125108.
6. V.G. Savitski, A.M. Malyarevich, K.V. Yumashev [et al.] // Appl. Phys. –2003.– Vol. B76. – P. 253.
7. A.S. Grabchikov, A.P. Shkadarevich, M.V. Danailov [et al.] // Appl. Phys. Lett. –1999. – Vol.75. – P. 3742.
8. A.G. Selivanov, I.A. Denisov, N.V. Kuleshov [et al.] // Appl. Phys. B. – 2006. – Vol. 83. – P. 61.
9. Най, Дж. Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц / Дж. Най.
10. Pujol, M.C. / M.C. Pujol, M. Rico, C. Zaldo [et.al.] // Appl. Phys. B. – 1999. – Vol. 68. – P. 187.
11. Filippov, V.V. / V.V. Filippov, N.V. Kuleshov, I.T. Vodnar // Appl. Phys. B. – 2007. – Vol.8 . – № 4. – P. 611.
12. А.Ф. Константинова, В.В. Филиппов, С.П. Палто [и др.] // Кристаллография. – 2007. – Т. 52. – Вып. 6. – С. 1125.
13. Biswal, S. / S. Biswal, S.P. O'Connor, S.R. Bowman // Appl. Opt. – 2005. – Vol. 44. – P. 3093.
14. Мочалов, И.В. / И.В. Мочалов // Опт. ж. – 1995. – № 11. – С. 4.
15. M.C. Pujol, R. Solé, J. Massons [et.al.] // J. Appl. Crystallogr. – 2001. – Vol. 34. – P. 1.
16. Филиппов, В.В. / В.В. Филиппов // Кристаллография. – 2010. – Т. 55. – № 6. – С. 975–978.
17. Федоров, Ф.И. Теория гиротропии / Ф.И. Федоров. – Минск: Наука и техника, 1976. – 456 с.
18. Федоров, Ф.И. Отражение и преломление света прозрачными кристаллами / Ф.И. Федоров, В.В. Филиппов. – Минск: Наука и техника, 1976. – 219 с.



Л.А. Фомичева<sup>1</sup>, Е.Б. Дунина<sup>2</sup>, А.А. Корниенко<sup>2</sup>

<sup>1</sup>УО «Государственная гимназия № 2 г. Витебска», Беларусь,  
<sup>2</sup>УО «Витебский государственный технологический университет»,  
Беларусь

**МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ  
ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ  
ЭЛЕКТРОННОЙ ПЛОТНОСТИ ДЛЯ ИОНА U<sup>4+</sup>  
В Cs<sub>2</sub>ZrBr<sub>6</sub> И Cs<sub>2</sub>UBr<sub>6</sub> ПО ОПТИЧЕСКИМ СПЕКТРАМ**

В работе выполнено описание экспериментальных [1,2] штарковских уровней кристаллической системы UBr<sub>6</sub><sup>2-</sup>:U<sup>4+</sup> с помощью модифицированной теории кристаллического поля [3]. Ранее модифицированная теория была успешно применена для описания штарковской структуры ионов Pr<sup>3+</sup> и Tm<sup>3+</sup> в различных кристаллических системах [4–7]. На основе анализа штарковских уровней получены параметры ковалентности.

Для описания штарковской структуры мультиплетов в приближении слабого конфигурационного взаимодействия используют гамильтониан [8]:

$$H_{cf} = \sum_{k,q} B_q^k C_q^k, \quad (1)$$

где  $B_q^k$  – параметры кристаллического поля;  $C_q^k = \sum_{i=1}^N c_q^k(\vartheta_i, \varphi_i)$  – сферический тензор ранга  $k$ , действующий на угловые переменные  $f$ -электронов.

Для учета влияния возбужденных конфигураций на штарковскую структуру кристаллических систем, активированных  $f$ -элементами, расчеты выполняются в приближении промежуточного и сильного конфигурационного взаимодействия [9]. Но для некоторых систем влияние возбужденных конфигураций настолько сильное, что для его учета необходимо использовать гамильтониан, полученный в приближении аномально сильного конфигурационного взаимодействия [3]:

$$H_{cf} = \sum_{k,q} \left\{ B_q^k + \left( \frac{\Delta_d^2}{\Delta_d - E_J} + \frac{\Delta_d^2}{\Delta_d - E_{J'}} \right) \tilde{G}_q^k(d) + \right. \\ \left. + \sum_i \left( \frac{\Delta_{ci}^2}{\Delta_{ci} - E_J} + \frac{\Delta_{ci}^2}{\Delta_{ci} - E_{J'}} \right) \tilde{G}_q^k(c) \right\} C_q^k. \quad (2)$$

Обычно определяющий вклад в параметры  $\tilde{G}_q^k$  обуславливается

конфигурацией противоположной четности  $5f^{N-1}6d$  и конфигурацией с переносом заряда. Но поскольку ион  $U^{4+}$  в кристаллах  $Cs_2ZrBr_6$  и  $Cs_2UBr_6$  занимает центрально-симметричные позиции, то слагаемое  $\left(\frac{\Delta_d^2}{\Delta_d - E_J} + \frac{\Delta_d^2}{\Delta_d - E_{J'}}\right)\tilde{G}_q^k(d)$ , соответствующее конфигурации противоположной четности, равно нулю, и в этом случае гамильтониан (2) можно записать в следующем виде [6]:

$$H_{cf} = \sum_{k,q} \left\{ B_q^k + \sum_i \left( \frac{\Delta_{ci}^2}{\Delta_{ci} - E_J} + \frac{\Delta_{ci}^2}{\Delta_{ci} - E_{J'}} \right) \tilde{G}_q^k(c) \right\} C_q^k. \quad (3)$$

Таким образом, в гамильтониане (3) в расчет принимается только вклад от процессов с переносом заряда.

Величина наиболее существенных вкладов в  $\tilde{G}_q^k$  от процессов с переносом заряда задается выражением [9]:

$$\tilde{G}_q^k(c) = \sum_b \tilde{J}^k(b) C_q^{k*}(\Theta_b, \Phi_b), \quad (4)$$

где суммирование осуществляется по лигандам ближайшего окружения;  $\Theta_b, \Phi_b$  – сферические углы, фиксирующие направление на лиганд  $b$ . Для параметров  $\tilde{J}^k(b)$  удобно использовать приближенные выражения, приведенные в работе [9]:

$$\begin{aligned} \tilde{J}^2(b) &\approx \frac{5}{28} [2\gamma_{\sigma f}^2 + 3\gamma_{\pi f}^2]; \\ \tilde{J}^4(b) &\approx \frac{3}{14} [3\gamma_{\sigma f}^2 + \gamma_{\pi f}^2]; \\ \tilde{J}^6(b) &\approx \frac{13}{28} [2\gamma_{\sigma f}^2 - 3\gamma_{\pi f}^2]. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $\gamma_{if}$  ( $i = \sigma, \pi$ ) – параметры ковалентности.

В приближении слабого конфигурационного взаимодействия в результате среднеквадратичной подгонки получены значения параметров кристаллического поля:  $B_0^4 = 8023 \text{ см}^{-1}$ ,  $B_0^6 = 1110 \text{ см}^{-1}$ . При расчетах, выполненных с помощью гамильтониана (3), получены следующие значения варьируемых параметров:  $B_0^4 = 7071 \text{ см}^{-1}$ ,  $B_0^6 = 899 \text{ см}^{-1}$ ,  $\gamma_{\sigma f} = -0,0518$ ,  $\gamma_{\pi f} = 0,0200$ ,  $\Delta_{c1} = 8462 \text{ см}^{-1}$ ,  $\Delta_{c2} = 11859 \text{ см}^{-1}$  и  $\Delta_{c3} = 13315 \text{ см}^{-1}$ . Среднеквадратичное отклонение теоретических значений от экспериментальных в приближении слабого и аномально сильного конфигурационного взаимодействия составляет  $131,2 \text{ см}^{-1}$  и  $46,2 \text{ см}^{-1}$  соответственно, т. е. результат описания улучшается на 65 %.

Выполненные расчеты позволяют утверждать, что с помощью гамильтониана (3) можно описывать штарковскую структуру мультиплетов иона  $U^{4+}$  в  $Cs_2ZrBr_6$  и  $Cs_2UBr_6$ . В пользу применения гамильтониана (3) свидетельствует заметное уменьшение среднеквадратичного отклонения теоретических данных от экспериментальных при описании штарковской структуры мультиплетов.

Важной особенностью применения рассматриваемой модифицированной теории является следующее: при описании штарковских уровней одновременно вычисляются значения параметров ковалентности. Посредством параметров ковалентности описывается степень смещения электронной плотности от одного иона к другому. Обычно расчет параметров ковалентности выполняют на основе волновых функций, но для этого необходим набор соответствующих функций для конкретной системы. Кроме того, подобные расчеты очень громоздки и трудоемки и представляют собой трудную задачу.

Существенным является тот факт, что значения варьируемых энергий  $\Delta_{ci}$  близки к значениям энергии тех мультиплетов, описание расщепления которых в приближении слабого конфигурационного взаимодействия было неудовлетворительным (таблица 1).

Таблица 1 – Сравнение экспериментальных [1,2] и вычисленных уровней энергии в приближении слабого (1) и аномально сильного конфигурационного взаимодействия (3) для  $UBr_6^{2-}:U^{4+}$ . Все величины даны в  $cm^{-1}$

$^sL_J$	$E_{exp}[1,2]$	$E_{calc1}(1)$	$E_{calc2}(3)$	$E_{exp}-E_{calc1}$	$E_{exp}-E_{calc2}$
	6908,0	6983,8	6974,4	-75,8	-66,4
	7221,0	7108,7	7313,9	112,3	-92,9
	8003,0	8079,8	7991,6	-76,8	11,4
$^3F_3$	8484,0	8501,2	8480,7	-17,2	3,3
	9019,0	8751,6	8924,9	267,4	94,1
	9163,0	9145,8	9166,3	17,2	-3,3
$^3F_4$	9182,0	9154,1	9216,7	27,9	-34,7
	9912,0	9977,1	9841,7	-65,1	70,3
	10178,0	10007,3	10104,1	170,7	73,9
	10810,0	10837,9	10775,3	-27,9	34,7
$^3H_6$	10887,0	11175,0	10918,5	-288,0	-31,5
	10939,0	11319,0	10978,2	-380,0	-39,2
	11800,0	11890,9	11793,6	-90,9	6,4
	12613,0	12684,1	12644,9	-71,1	-31,9
	–	13084,3	12841,6	–	–
	13457,0	13169,0	13425,5	288,0	31,5

$^1D_2$	14693,0	14811,6	14749,0	-118,6	-56,0
	14982,0	14863,4	14926,0	118,6	56,0

Таким образом, в результате исследования установлено, что наилучшее описание штарковского расщепления мультиплетов иона  $U^{4+}$  в  $Cs_2ZrBr_6$  и  $Cs_2UBr_6$  достигается в приближении аномально сильного конфигурационного взаимодействия (3), в котором учитывается влияние возбужденных конфигураций с переносом заряда. При таком подходе удастся также получить значения параметров ковалентности.

### Литература

1. Flint, C.D. Vibronic spectra of  $U^4$  in octahedral crystal fields. IV. Absorption spectra and crystal field calculations / C.D. Flint, P.A. Tanner // *Mol. Phys.* – 1987. – Vol. 61, № 2. – P. 389–407.
2. Evidence for strong interaction between the  $5f^2$  and  $5f^17p^1$  configurations of  $U^{4+}$  in the octahedral sites of  $Cs_2UBr_6$  and  $Cs_2ZrBr_6$  / M.D. Faucher [et al.] // *Phys. Rev. B.* – 1996. – Vol. 53, № 15. – P. 9501–9504.
3. Dunina, E.B. Modified theory of f-f transition intensities and crystal field for systems with anomalously strong configuration interaction / E.B. Dunina, A.A. Kornienko, L.A. Fomicheva // *Cent. Eur. J. Phys.* – 2008. – Vol. 6, № 3. – P. 407–414.
4. Фомичева, Л.А. Влияние возбужденных конфигураций на расщепление мультиплетов иона  $Pr^{3+}$  в GaN / Л.А. Фомичева, А.А. Корниенко, Е.Б. Дунина // *Молодежь в науке – 2007: Приложение к журналу «Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі»*. Серия физико-математических наук; серия физико-технических наук; серия химических наук. В 4 Ч. – Минск: «Белорусская наука», 2008. – Ч. 3. – С. 60–65.
5. Фомичева, Л.А. Взаимосогласованное описание штарковской структуры мультиплетов и интенсивностей абсорбционных переходов иона  $Pr^{3+}$  в  $Y_3Al_5O_{12}$  / Л.А. Фомичева, А.А. Корниенко, Е.Б. Дунина // *Оптика и спектроскопия.* – 2008. – Т. 105, № 3. – С. 364–369.
6. Фомичева Л.А., Корниенко А.А., Дунина Е.Б. // *ЖПС.* – 2010. – Т. 77. – № 2. – С. 173.
7. Фомичева, Л.А. Моделирование оптических свойств иона  $U^{4+}$  в кристалле  $ZrSiO_4$  / Л.А. Фомичева, А.А. Корниенко, Е.Б. Дунина // *ЖТФ.* – 2007. – Т. 77, № 10. – С. 6–10.
8. Wybourne, B.G. *Spectroscopic Properties of Rare Earths* / B.G. Wybourne. – New York: J. Wiley and Sons Inc, 1965. – 236 p.
9. Корниенко, А.А. Теория спектров редкоземельных ионов в кристаллах. Курс лекций. / А.А. Корниенко. – Витебск: Издательство УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2003. – 128 с.

**П.С. Шаповалов**

**УО «Гомельский государственный технический университет  
им. П.О. Сухого», Беларусь**

## **СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЕРМАКОВА В НЕЛИНЕЙНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ ГАУССОВЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ**

Для описания физических нелинейных систем используются системы нелинейных дифференциальных уравнений. Случаи интегрируемых нелинейных систем крайне редки [1]. Часто для таких систем отсутствуют интегралы движения, что указывает на наличие в динамике сложных (в том числе и хаотических) режимов. Задачи исследования нелинейных осцилляторов часто сводятся к системам Ермакова, для которой существует Ермаков-Левис-Рей-Рейд инвариант [2].

В данной работе рассматривается задача взаимодействия некогерентных гауссовых пучков в средах с кубической нелинейностью. Решая исходные уравнения для взаимодействующих круговых пучков, вариационным методом в классе гауссовых функций получим систему уравнений Ермакова. Для данной системы найден второй инвариант – гамильтониан, и показано что данная система уравнений является полностью интегрированной. Распространение взаимодействующих эллиптических пучков сводится к системе четырех нелинейных уравнений, имеющих форму и интеграл движения, аналогичный обычной системе Ермакова из двух уравнений. Поэтому данную систему можно рассматривать как обобщение систем Ермакова на многомерный случай.

Для описания взаимодействия световых пучков в среде с кубической нелинейностью и квадратичной неоднородностью будем исходить из системы нелинейных параболических уравнений, записанных в декартовой системе координат  $(x, y, z)$  [3]. В данной системе уравнений интерференционное взаимодействие пучков не учитывается.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} - 2ik_1 \frac{\partial U_1}{\partial z} - k_1^2 \alpha (x^2 + y^2) U_1 + k_1^2 \beta (|U_1|^2 + 2|U_2|^2) U_1 &= 0 \\ \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} - 2ik_2 \frac{\partial U_2}{\partial z} - k_2^2 \alpha (x^2 + y^2) U_2 + k_2^2 \beta (|U_2|^2 + 2|U_1|^2) U_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь для  $j$ -го пучка ( $j=1, 2$ )  $U_j$  – комплексная амплитуда электро-

магнитного поля на круговой частоте колебаний  $\omega_j$ ,  $k_j = \sqrt{\varepsilon_j} \omega_j$  – волновое число,  $\varepsilon_j$  – линейная диэлектрическая проницаемость среды,  $\alpha$  и  $\beta$  – ее коэффициент квадратичной неоднородности и коэффициент нелинейности. Система (1) описывает взаимодействие лазерных пучков в диапазоне частот, где временная дисперсия среды пренебрежимо мала.

Решая систему (1) вариационным методом в классе круговых гауссовых пучков для их радиусов, получим систему уравнений [4]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w_1}{dz^2} + \alpha w_1 &= \left[ \frac{4(1 - k_1^2 \mu_1) w_2}{k_1^2 w_1} - \frac{32 \mu_2 w_1 / w_2}{(w_1 / w_2 + w_2 / w_1)^2} \right] \frac{1}{w_1^2 w_2}, \\ \frac{d^2 w_2}{dz^2} + \alpha w_2 &= \left[ \frac{4(1 - k_2^2 \mu_2) w_1}{k_2^2 w_2} - \frac{32 \mu_1 w_2 / w_1}{(w_1 / w_2 + w_2 / w_1)^2} \right] \frac{1}{w_1 w_2^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $i = 1, 2$ ,  $\mu_i = \beta P_i / 4\pi$ ,  $P_i$  – мощность  $i$ -го пучка,  $w_i$  – радиус светового пятна кругового пучка. Система (2) представляет собой систему уравнений для двух связанных нелинейных осцилляторов и записана в стандартной ермаковской форме [5]:

$$\ddot{a} + \omega^2 a = f(b/a) / a^2 b, \quad \ddot{b} + \omega^2 b = g(a/b) / ab^2. \quad (3)$$

В случае, когда мощности взаимодействующих пучков совпадают ( $P_1 = P_2$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ ), система (2) относится к классу гамильтоновых систем. Гамильтониан для нее будет равен:

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{dw_1}{dz} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{dw_2}{dz} \right)^2 + \frac{\alpha(w_1^2 + w_2^2)}{2} + \frac{2(1 - k_1^2 \mu)}{w_1^2} + \frac{2(1 - k_2^2 \mu)}{w_2^2} + \frac{16\mu}{w_1^2 + w_2^2}. \quad (4)$$

Данное утверждение легко проверить, подставляя (4) в систему:

$$\frac{d^2 w_1}{dz^2} = - \frac{\partial H}{\partial w_1}, \quad \frac{d^2 w_2}{dz^2} = - \frac{\partial H}{\partial w_2}. \quad (5)$$

Так как система (2) является Ермаковой, то для нее существует второй инвариант Ермаков-Левис-Рей-Рейд. Его находим из выражения [5]

$$I = \frac{1}{2} \left( w_1 \frac{dw_2}{dz} + w_2 \frac{dw_1}{dz} \right)^2 + \int_{w_2/w_1}^{w_2/w_1} f(\lambda) d\lambda + \int_{w_1/w_2}^{w_1/w_2} g(\lambda) d\lambda. \quad (6)$$

Подставляя значения для функций  $f$  и  $g$ , получим значение второго инварианта системы уравнений (2)

$$I = \frac{1}{2} \left( w_1 \frac{dw_2}{dz} + w_2 \frac{dw_1}{dz} \right)^2 + \frac{2(1 - k_1^2 \mu) w_2^2}{k_1^2 w_1^2} + \frac{2(1 - k_2^2 \mu) w_1^2}{k_2^2 w_2^2} + 32\mu. \quad (7)$$

Для инвариантов (4) и (7) скобки Пуассона равны нулю, следовательно эти инварианты находятся в инволюции, а система уравнений

(2) полностью интегрируема.

При взаимодействии двух эллиптических гауссовых пучков система уравнений для полуосей светового пятна  $(w_{xi}, w_{yi})$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w_{x1}}{dz^2} + \alpha w_{x1} &= \left[ \frac{4w_{y1}}{k_1^2 w_{x1}} - 4\mu_1 - \frac{32\mu_2}{\sqrt{(1+w_{x2}^2/w_{x1}^2)^3(1+w_{y2}^2/w_{y1}^2)}} \right] \frac{1}{w_{x1}^2 w_{y1}}, \\ \frac{d^2 w_{y1}}{dz^2} + \alpha w_{y1} &= \left[ \frac{4w_{x1}}{k_1^2 w_{y1}} - 4\mu_1 - \frac{32\mu_2}{\sqrt{(1+w_{y2}^2/w_{y1}^2)^3(1+w_{x2}^2/w_{x1}^2)}} \right] \frac{1}{w_{x1} w_{y1}^2}, \\ \frac{d^2 w_{x2}}{dz^2} + \alpha w_{x2} &= \left[ \frac{4w_{y2}}{k_2^2 w_{x2}} - 4\mu_2 - \frac{32\mu_1}{\sqrt{(1+w_{x1}^2/w_{x2}^2)^3(1+w_{y1}^2/w_{y2}^2)}} \right] \frac{1}{w_{x2}^2 w_{y2}}, \\ \frac{d^2 w_{y2}}{dz^2} + \alpha w_{y2} &= \left[ \frac{4w_{x2}}{k_2^2 w_{y2}} - 4\mu_2 - \frac{32\mu_1}{\sqrt{(1+w_{y1}^2/w_{y2}^2)^3(1+w_{x1}^2/w_{x2}^2)}} \right] \frac{1}{w_{x2} w_{y2}^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Для системы уравнений (5), аналогично как и для системы уравнений (2), при одинаковых мощностях пучков  $(\mu_1 = \mu_2 = \mu)$  получим инвариант по форме близкой гамильтониану (4).

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \left( \frac{dw_{x1}}{dz} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{dw_{y1}}{dz} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{dw_{x2}}{dz} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{dw_{y2}}{dz} \right)^2 + \frac{\alpha(w_{x1}^2 + w_{y1}^2)}{2} + \frac{\alpha(w_{x2}^2 + w_{y2}^2)}{2} + \\ &+ \frac{2}{k_1^2} \left( \frac{1}{w_{x1}^2} + \frac{1}{w_{y1}^2} \right) + \frac{2}{k_2^2} \left( \frac{1}{w_{x2}^2} + \frac{1}{w_{y2}^2} \right) - \frac{4\mu}{w_{x1} w_{y1}} - \frac{4\mu}{w_{x2} w_{y2}} + \frac{16\mu}{\sqrt{(w_{x1}^2 + w_{x2}^2)(w_{y1}^2 + w_{y2}^2)}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Систему уравнений (8) можно рассматривать как обобщение систем Ермакова на случай многомерных нелинейных осцилляторов.

### Литература

1. Лихтенберг, А. Регулярная и стохастическая динамика / А. Лихтенберг, М. Либман – М.: Мир. – 528 с.
2. Haas, F. Dynamical symmetries and the Ermakov invariant / F. Haas, J. Goedert // Physics Letters. – 2001. – Vol. A 279. – P. 181–188.
3. Гончаренко, А.М. О взаимодействии круговых гауссовых пучков света в нелинейных средах / А.М. Гончаренко, П.С. Шаповалов // Доклады НАНБ. – 2003. – Т. 47. – № 2. – С. 66–68.
4. Шаповалов, П.С. О нелинейном взаимодействии соосных гауссовых пучков света в неоднородной среде / П.С. Шаповалов, Е.А. Ермаков // Известия НАНБ Сер. Физ.-мат. наук. – 2006. – № 1 – С. 81–

5. Беркович, Л.М. Факторизация и преобразования дифференциальных уравнений / Л.М. Беркович. – М.: R&C Dynamics. – 463 с.

**В.Ф. Шолох, Т.П. Желонкина, Д.М. Сазонов**

**УО «Гомельский государственный университет  
им. Ф. Скорины», Беларусь**

### **ЭФФЕКТ ФАРАДЕЯ В ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЕ**

Ковариантные методы, разработанные Ф.И. Федоровым и доказавшие свою высокую эффективность при решении широкого круга задач оптики и акустики покоящихся анизотропных сред [1,2], могут весьма успешно применяться и при изучении распространения электромагнитных волн в движущихся средах [3–5]. В данной работе рассматривается распространение плоских электромагнитных волн в движущейся среде с индуцированной гиротропией.

Будем считать, что в системе  $S'$  покоя среды материальные уравнения, описывающие изотропную среду, помещенную во внешнее магнитное поле  $\mathbf{h}$ , имеют вид [6]:

$$\mathbf{D}' = (\varepsilon + i\mathbf{G}^\times) \mathbf{E}' \quad (1)$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{H}', \quad (2)$$

где  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость среды,  $\mathbf{G}^\times$ -тензор дуальный вектору гирации  $\mathbf{G} = \eta \mathbf{h}$ . В дальнейшем считается, что эти величины всегда заданы в системе  $S'$ , поэтому штрихи при записи этих величин опускаются.

В лабораторной системе отсчета  $S$ , относительно которой среда движется с постоянной скоростью  $\mathbf{v}$ , используя преобразования Лоренца для векторов поля, вместо (1) и (2) получаем

$$\mathbf{D} = \Lambda(\gamma^{-1}) \varepsilon^\circ \Lambda(\gamma) \mathbf{E} + \beta \gamma \Lambda(\gamma^{-1}) \varepsilon^\circ \boldsymbol{\tau}^\times \mathbf{B} - \beta \boldsymbol{\tau}^\times \mathbf{H}; \quad (3)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + \beta \boldsymbol{\tau}^\times \mathbf{E} - \beta \boldsymbol{\tau}^\times \mathbf{D}. \quad (4)$$

Здесь  $\boldsymbol{\tau}$  – единичный вектор, задающий направление движения среды так, что  $\mathbf{v} = v\boldsymbol{\tau}$ ;  $\beta = v/c$ ;  $\Lambda(\gamma) = \gamma + (1-\gamma)\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau}$ , где  $\gamma^{-2} = 1 - \beta^2$  и  $\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau}$  – диада;  $\varepsilon^\circ = \varepsilon + i\mathbf{G}^\times$  – тензор второго ранга описывающий свойства среды в системе ее покоя. Полученные материальные уравнения (3) и (4) являются обобщением известных материальных уравнений Минковского на случай рассматриваемого типа сред.

Используя тождество



$$(1 + \beta^2 \boldsymbol{\tau}^\times \boldsymbol{\tau}^\times)^{-1} = \gamma^2 (1 - \beta^2 \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau}),$$

которое нетрудно доказать с помощью ковариантного метода, материальные уравнения (3) и (4) можно переписать в иной, более удобной, форме [5]

$$\mathbf{D} = P\mathbf{E} + L\mathbf{B}, \quad (5)$$

$$\mathbf{H} = M\mathbf{E} + Q\mathbf{B},$$

(6)

где тензоры  $P$ ,  $L$ ,  $M$  и  $Q$  равны:

$$P = \Lambda(\gamma)\varepsilon^\circ\Lambda(\gamma) + \gamma^2\beta^2\boldsymbol{\tau}^\times\boldsymbol{\tau}^\times; \quad L = \gamma\beta\Lambda(\gamma)\varepsilon^\circ\boldsymbol{\tau}^\times - \gamma^2\beta\boldsymbol{\tau}^\times; \quad (7)$$

$$M = \gamma\beta\boldsymbol{\tau}^\times\varepsilon^\circ\Lambda(\gamma) - \gamma^2\beta\boldsymbol{\tau}^\times; \quad Q = \Lambda^2(\gamma) + \gamma^2\beta^2\boldsymbol{\tau}^\times\varepsilon^\circ\boldsymbol{\tau}^\times. \quad (8)$$

Исключив из (5) и (6) с помощью уравнений Максвелла  $\mathbf{B} = \mathbf{m}^\times\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D} = -\mathbf{m}^\times\mathbf{H}$  ( $\mathbf{m} = n\mathbf{n}$  – вектор рефракции) векторы  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$ , получаем

$$(P + L\mathbf{m}^\times + \mathbf{m}^\times M + \mathbf{m}^\times Q\mathbf{m}^\times)\mathbf{E} = 0, \quad (9)$$

откуда следует уравнение нормалей в форме определителя

$$\left| P + L\mathbf{m}^\times + \mathbf{m}^\times M + \mathbf{m}^\times Q\mathbf{m}^\times \right| = 0. \quad (10)$$

Раскрытие определителя приводит к полному уравнению четвертой степени относительно показателя преломления  $n$ , решение которого даже в частных случаях весьма затруднительно. В связи с этим получим уравнение нормалей в  $S$  системе исходя из его известного выражения в системе покоя среды и используя преобразования Лоренца для вектора рефракции

$$\mathbf{m}' = \frac{\mathbf{m} + ((\gamma - 1)\mathbf{m}\boldsymbol{\tau} - \beta\gamma)\boldsymbol{\tau}}{\gamma(1 - \beta\mathbf{m}\boldsymbol{\tau})}. \quad (11)$$

Правомочность такого подхода была обоснована в [3].

Уравнение нормалей в покоящейся изотропной среде помещенной в магнитное поле [6]

$$(\mathbf{m}'^2 - \varepsilon)^2 = \mathbf{G}^2 - \varepsilon^{-1}[\mathbf{m}'\mathbf{G}]^2$$

с точностью до членов первого порядка по параметру магнитной гиротропии принимает вид

$$\mathbf{m}'^2 \mp \mathbf{m}'\mathbf{G}^\circ - \varepsilon = 0. \quad (12)$$

где вектор магнитной гирации  $\mathbf{G}^\circ = \mathbf{G} / \sqrt{\varepsilon}$ .

Используя (11) и (12), в лабораторной системе отсчета имеем

$$\frac{[\mathbf{m}\boldsymbol{\tau}]^2 + \gamma^2(\mathbf{m}\boldsymbol{\tau} - \beta)^2}{\gamma^2(1 - \beta\mathbf{m}\boldsymbol{\tau})^2} \mp \frac{[\boldsymbol{\tau}[\mathbf{m}\boldsymbol{\tau}]]\mathbf{G}^\circ + \gamma(\mathbf{m}\boldsymbol{\tau} - \beta)\boldsymbol{\tau}\mathbf{G}^\circ}{\gamma(1 - \beta\mathbf{m}\boldsymbol{\tau})} - \varepsilon = 0. \quad (13)$$

Отсюда, в случае когда в (13) взят знак « $\leftarrow$ », находим выражения для показателей преломления, справедливые при произвольной вза-

имной ориентации векторов  $\mathbf{n}$ ,  $\boldsymbol{\tau}$  и  $\mathbf{G}^\circ$ ,

$$n_{\pm}^{(-)} = \frac{\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 4(\beta^2 - \varepsilon + \beta\boldsymbol{\tau}\mathbf{G}^\circ)\gamma^2\Theta(1 - \varepsilon\beta^2\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} + \beta\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{G}^\circ)\Theta}}{2\Theta(1 - \varepsilon\beta^2\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} + \beta\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{G}^\circ)\Theta}.$$

(14)

Здесь введены обозначения  $\xi = 2(1 - \varepsilon)\gamma\beta\boldsymbol{\tau}\Theta + \gamma\Theta(1 + \beta^2\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau})\mathbf{G}^\circ$  и  $\Theta = \mathbf{n} + (\gamma - 1)\mathbf{n}\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau}$

Решения (14) не являются независимыми. Вводя углы  $\psi_1 = \mathbf{n} \hat{\boldsymbol{\tau}}$ ,  $\psi_2 = \mathbf{n} \hat{\mathbf{G}^\circ}$  и  $\psi_3 = \boldsymbol{\tau} \hat{\mathbf{G}^\circ}$ , нетрудно убедиться, что  $n_{+}^{(-)}(\pi - \psi_1; \pi - \psi_2; \psi_3) = -n_{-}^{(-)}(\psi_1; \psi_2; \psi_3)$ . Следовательно два решения (14) описывают одну поверхность показателей преломления. Аналогичный вывод имеет место и для второй пары решений  $n_{\pm}^{(+)}$ , отвечающей случаю, когда в (13) берется знак «+», которая получается из (14) путем замены знака у вектора гирации  $\mathbf{G}^\circ$ .

Тогда, сохраняя знаки «+» перед радикалами, что следует из требований предельного перехода к случаю покоящейся среды, для показателей преломления двух изонормальных волн получаем

$$n_{\pm} = \frac{\xi_{\pm} + \sqrt{\xi_{\pm}^2 - 4(\beta^2 - \varepsilon \pm \beta\boldsymbol{\tau}\mathbf{G}^\circ)\gamma^2\Theta(1 - \varepsilon\beta^2\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} \pm \beta\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{G}^\circ)\Theta}}{2\Theta(1 - \varepsilon\beta^2\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} \pm \beta\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{G}^\circ)\Theta}.$$

(15)

Общее выражение (15) достаточно громоздко и может быть упрощено в различных частных случаях. Прежде всего, отметим, что в отсутствии внешнего магнитного поля ( $\mathbf{G}^\circ = 0$ ) выражение (15) совпадает с известными значениями показателей преломления для волн, распространяющихся в движущейся изотропной среде [5].

При малых скоростях движения среды, ограничиваясь членами первого порядка по параметру  $\beta \ll 1$ , с принятой в работе степенью точности получаем

$$n_{\pm} = \sqrt{\varepsilon} + (1 - \varepsilon)\beta\boldsymbol{\tau}\mathbf{n} \pm \frac{\mathbf{n}\mathbf{G}^\circ}{2}. \quad (16)$$

Различие показателей преломления приводит к повороту плоскости поляризации с удельным углом вращения

$$\varphi = \frac{\omega}{2c}(n_{+} - n_{-}) = \frac{\omega}{2c}\mathbf{n}\mathbf{G}^\circ \quad (17)$$

не зависящем от параметров движения среды.

В случае когда  $1 - \beta \ll 1$ , для волн распространяющихся перпен-

дикулярно скорости движения среды из (15) следует

$$n_{\pm} = \gamma \sqrt{\varepsilon - \beta^2} \mp \frac{\gamma\beta}{2\sqrt{\varepsilon - \beta^2}} \tau \mathbf{G}^{\circ} \pm \frac{\gamma}{2} \mathbf{nG}^{\circ} \quad (18)$$

и для удельного вращения плоскости поляризации имеем

$$\varphi = \frac{\omega}{2c} (n_+ - n_-) = \frac{\omega}{2c} \left( \gamma \mathbf{nG}^{\circ} - \frac{\gamma\beta}{\sqrt{\varepsilon - \beta^2}} \tau \mathbf{G}^{\circ} \right). \quad (19)$$

Из (19) видно, что при определенных условиях эффект вращения плоскости поляризации распространяющихся волн, обусловленный внешним магнитным полем, может подавляться за счет движения среды.

В заключение отметим, что принципиальное отличие влияния движения среды на вращение плоскости поляризации в случаях малых и больших скоростей, по-видимому, связано с разрывом поверхности показателей преломления на границе черенковской области, что будет рассмотрено в дальнейшем.

### Литература

1. Федоров, Ф.И. Оптика анизотропных сред / Ф.И. Федоров. – Минск: Изд-во АН БССР, 1958. – С. 380.
2. Федоров, Ф.И. Теория упругих волн в кристаллах / Ф.И. Федоров. – Москва: «Наука», 1965. – С. 386.
3. Шолох, В.Ф. Плоские электромагнитные волны в движущейся одноосной среде / В.Ф. Шолох, В.В. Вергун. – Москва: Деп. в ВИНТИ, 4.03.1981. – № 100481. – С. 12.
4. Бокуть, Б.В. Отражение и преломление электромагнитных волн на границе движущейся и неподвижной сред / Б.В. Бокуть // Докл. АН БССР. – 1985. – № 5. – Т. 29. – С. 409–411.
5. Шолох, В.Ф. Электромагнитные волны в движущейся оптически активной среде / В.Ф. Шолох // Изв. АН БССР. – 1981. – № 1. – С. 123–127.
6. Гиргель, С.С. Эффект Фарадея в одноосных кристаллах в  $\varepsilon$  – изотропной точке / С.С. Гиргель, Ф.А. Лопашин, А.Н. Сердюков // Кристаллография. – 1976. – Вып. 3. – Т. 21. – С. 450–453.

**Секция 2 «Акустика кристаллов»**  
(упругие волны, фотоакустика, акустооптика)

Председатель:  
Хахомов Сергей Анатольевич, доцент

**В.П. Велещук<sup>1</sup>, А.И. Власенко<sup>1</sup>, В.А. Гнатюк<sup>1</sup>,  
Б.К. Даулетмуратов<sup>1</sup>, О.В. Ляшенко<sup>2</sup>, С.Н. Левицкий<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Институт физики полупроводников имени В.Е. Лашкарева  
НАН Украины, Украина,

<sup>2</sup>Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко,  
Украина

**ПОРОГ ПЛАВЛЕНИЯ CdTe ПРИ ИМПУЛЬСНОМ  
ЛАЗЕРНОМ ОБЛУЧЕНИИ, ОПРЕДЕЛЕННЫЙ  
ПО АКУСТИЧЕСКОМУ ОТКЛИКУ**

В связи с широким использованием полупроводниковых соединений на основе CdTe для детектирования ионизирующего и ИК-излучения, активно ведутся исследования в области контролируемого лазерного управления их параметрами. Для оптимального управления электрофизическими свойствами CdTe в настоящее время одной из актуальных проблем является точное определение их лазерно-индуцированного порога плавления и абляции.

В данной работе рассмотрено влияние процесса плавления на формирование индуцированного акустического отклика (АО) при импульсном лазерном облучении (ИЛО) поверхности CdTe, а также предложен метод контроля плавления поверхности монокристаллов по измерению параметров акустического отклика.

**1. Эксперимент**

Образец на кварцевой подложке находился в акустическом кон-

также с пьезопреобразователем, расположенным вне зоны облучения. Кристаллы CdTe ориентации (111) при комнатной температуре облучались импульсами рубинового ( $\lambda = 0.694$  мкм,  $\tau = 20$  нс) и неодимового ( $\lambda = 1.06$  мкм,  $\tau = 15$  нс) лазеров, работавших в режиме модулированной добротности. Суммарный коэффициент усиления регистрируемых электрических сигналов акустического отклика 70 дБ, частотный диапазон регистрации 200 – 2000 кГц.

При облучении кристаллов рубиновым лазером поглощение происходит в приповерхностном слое толщиной  $d \sim \alpha^{-1} \approx 10^{-4} - 10^{-5}$  см ( $\alpha_{0.694} = 6 \cdot 10^4$  см<sup>-1</sup> для CdTe). Поглощение оптического излучение неодимового лазера происходит как на поверхности кристалла, так и в его объеме:  $\alpha_{1.06} \sim (1-3)$  см<sup>-1</sup> для CdTe.

## 2. Результаты

На рисунке 1 приведены зависимости амплитуды акустического сигнала от интенсивности излучения рубинового лазера  $A(I)$ . В режиме однократного облучения, в линейной области зависимости  $A(I)$ , примерно до 7 МВт/см<sup>2</sup> для CdTe при котором еще отсутствует плавление поверхности, основным механизмом формирования АО по видимому является фототермоакустический (ФТА) механизм.

ИЛО производилось в 2-х режимах – режиме многократного облучения, при котором последовательно облучалась одна и та же область кристалла (кривая 1 рисунка 1), а также в однократном режиме, при котором облучались различные, отстоящие друг от друга области кристалла (кривая 2 рисунка 1).

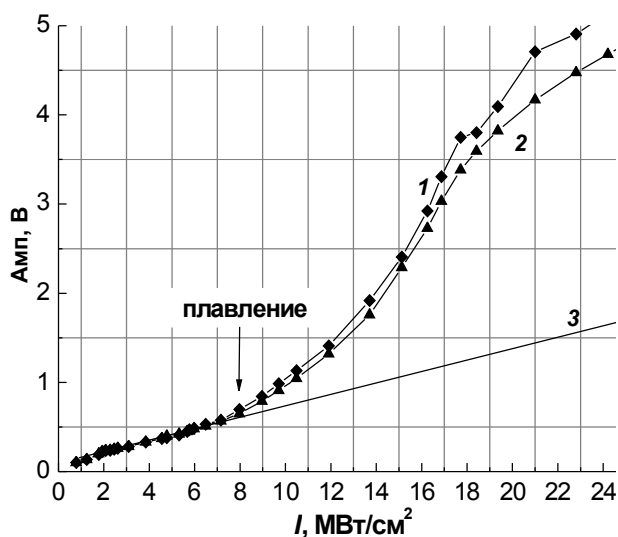


Рисунок 1 – Зависимость амплитуды акустического сигнала от интенсивности рубинового

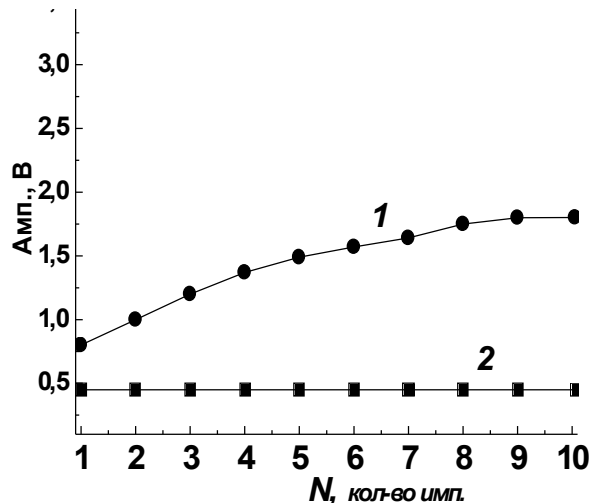


Рисунок 2 – Зависимость амплитуды акустического сигнала от количества импульсов

лазера. Облучение CdTe  
в одну область (1)  
и в различные области (2).  
3 – линейная аппроксимация

рубинового лазера  
при облучении CdTe  
(1) –  $I = 8 \text{ МВт/см}^2$   
и (2) –  $I = 3 \text{ МВт/см}^2$

В области  $I = 8\text{--}24 \text{ МВт/см}^2$  для CdTe зависимость  $A(I)$  различается для названных выше обоих режимов, а также является нелинейной (рисунок 1), что обусловлено включением дополнительных механизмов акустического излучения, в частности – за счет процесса плавления приповерхностного слоя. Пересечение линейной аппроксимации в области  $I = 0\text{--}8 \text{ МВт/см}^2$  (кривая 3) с началом экспоненциальной зависимости  $A(I)$  соответствует порогу плавления  $I_{th}$  поверхностного слоя CdTe который составил  $8\pm 0,4 \text{ МВт/см}^2$  для CdTe (111).

Аналогично был определен порог плавления приповерхностного слоя CdTe (111) при облучении неодимовым лазером (область прозрачности) в однократном режиме порядка  $170\pm 5 \text{ МВт/см}^2$ .

На рисунке 2 представлены зависимости амплитуды акустического отклика от числа лазерных импульсов  $A(N)$  при пороговых  $I = I_{th}$  (1) и допороговых  $I < I_{th}$  (2) режимах облучения. Видно, что при  $I < I_{th}$  зависимость  $A(N) = \text{const}$ , при достижении порога плавления наблюдается увеличение амплитуды акустического сигнала, что вероятно связано с увеличением коэффициента поглощения, изменением тепловых и упругих характеристик материала.

Также наблюдалось появление плазмы при многократном облучении CdTe лазерами в одну и ту же область с интенсивностью несколько меньшей  $I_{th}$ , что указывает на снижение порога плавления за счет эффекта накопления.

При интенсивности  $I_{th}$  было обнаружено изменение морфологии поверхности, соответствующее плавлению поверхности кристалла.

### 3. Обсуждение

Из эксперимента видно, что при импульсном облучении одной и той же области кристалла амплитуда акустического отклика при данной интенсивности больше, чем при облучении разных областей поверхности кристалла (рисунки 1, 2).

Это объясняется тем, что при облучении кристалла в многократном режиме излучением, как из области фундаментального поглощения света, так и из области прозрачности, по достижению порога плавления  $I \geq I_{th}$  амплитуда регистрируемого акустического сигнала сильно зависит от состояния приповерхностного слоя CdTe после предыдущего облучения [1]. Величина акустического давления  $P$  зависит от поглощения  $\alpha$  и термоупругих физических величин:

$$P = (\beta_t c^2 / 2C_p)(1 - R)I\alpha\tau, \quad (1)$$

где  $\beta_t$  – коэффициент объемного теплового расширения,  $c$  – скорость упругих волн,  $C_p$  – теплоемкость,  $R$  – коэффициент отражения,  $\tau$  – длительность лазерного импульса.

В случае ИЛО при  $\lambda = 0,694$  мкм причиной этого является возрастание его стационарного коэффициента поглощения  $\alpha$ , а также изменение его теплофизических свойств после рекристаллизации расплавленного слоя полупроводника.

Таким образом, акустический отклик чувствителен к эффекту накопления при пороговом режиме облучения. Наблюдаемое появление плазмы при многократном облучении CdTe с интенсивностью  $I$  немного меньшей  $I_{th}$  также указывает на понижение порога плавления поверхности кристалла.

Нелинейный, близкий к экспоненциальному характер зависимости  $A(I)$  при импульсном облучении CdTe после порога плавления  $I_{th}$  (рис.1) объясняется суммированием амплитуд акустического давления от резкого изменения объема при плавлении, акустической эмиссии при плавлении – кристаллизации и образовании протяженных дефектов [2], от реактивного действия паров из расплава, от расширения облака горячей плазмы при лазерном пробое, абляции. Известно также, что процессы фазовых переходов и неравновесного парообразования при импульсном лазерном облучении на порядок увеличивают амплитуду акустического отклика [1].

Неоднородное термическое импульсное влияние на поверхность твердых тел при ИЛО приводит к непрогнозируемым срывам неоднородных термомеханических напряжений, которые создаются локально-перегретыми областями. При значительных интенсивностях лазерного облучения  $I$  возможны испарение и расплав части приповерхностного локального объема твердых тел, причем, при некоторых условиях облучения – многократные, последовательные во времени, но в разных локальных объемах прямые и обратные фазовые переходы твердое тело – жидкость и твердое тело – газ (абляция).

#### **4. Выводы**

Таким образом, экспериментально выявлено, что в процессе лазерно-индуцированного плавления CdTe формируется нелинейная зависимость амплитуды акустического сигнала от интенсивности импульсного лазерного излучения. Это дает возможность исследовать пороговые процессы.

Нелинейная зависимость амплитуды акустического отклика от интенсивности лазерного излучения при превышении порога плавления объясняется суммированием акустических импульсов, индуцирован-

ных при резком изменении объема при плавлении, давлением неравновесных паров над расплавом и расширением облака горячей плазмы, а также акустической эмиссией при образовании протяженных дефектов и при фазовых превращениях твердое тело-жидкость и жидкость-твердое тело (кристаллизация).

Установлено, что порог плавления поверхности монокристаллов при однократном наносекундном (20 нс) лазерном ( $\lambda = 0,694$  мкм) облучении, определенный по изменению амплитуды акустического отклика составляет  $8 \pm 0,4$  МВт/см<sup>2</sup> для грани (111) CdTe. При однократном наносекундном (15 нсек) облучении светом из области прозрачности кристаллов ( $\lambda = 1,06$  мкм) порог плавления составляет  $170 \pm 5$  МВт/см<sup>2</sup> для CdTe (111).

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного Фонда Фундаментальных Исследований Украины, проект № Ф 41.1/032.

### Литература

1. Чабанов, В.Е. Лазерный ультразвуковой контроль материалов / В.Е. Чабанов. – ЛГИ, Ленинград, 1986. – 320 с.
2. Ляшенко, О.В. Акустическая эмиссия при неоднородном термическом импульсном влиянии с образованием жидкой фазы / О.В. Ляшенко, В.П. Велещук, О.І. Власенко, А.П. [и др.] // Sensor Electronics and Microsystem Technologies (SEMST). – 2009. – № 1. – С. 36–41.

**Г.В. Кулак, А.Е. Анисимова**

**УО «Мозырский государственный педагогический университет  
им. И.П. Шамякина», Беларусь**

### **ДИФРАКЦИЯ СВЕТА НА УЛЬТРАЗВУКЕ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕМСЯ ВДОЛЬ КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКОЙ ОСИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ГИРОТРОПНОГО КУБИЧЕСКОГО КРИСТАЛЛА**

Акустооптические (АО) кристаллы типа силленита ( $Bi_{12}GeO_{20}$ ,  $Bi_{12}SiO_{20}$ ,  $Bi_{12}TiO_{20}$  и др.) обладают значительным удельным вращением плоскости поляризации световой волны и в них значительно проявляется фотоупругость [1]. Если в одноосных и двуосных кристаллах гиротропия проявляется только вблизи оптических осей кристаллов,



то в кубических кристаллах её необходимо учитывать при распространении света и ультразвука в любых направлениях [2]. В работах [3, 4] теоретически и экспериментально исследованы особенности АО дифракции в гиротропных средах и показана перспективность использования силленитов для создания АО устройств обработки информации.

Система уравнений связанных волн для гиротропного кристалла имеет вид [4]:

$$\begin{aligned}\frac{dA_m}{dz} &= \rho B_m + \chi \exp(-i\delta_m z) B_{m+1} + \chi_{\parallel} \exp(i\delta_{m-1} z) A_{m-1} - \chi_{\parallel} \exp(-i\delta_m z) A_{m+1}, \\ \frac{dB_m}{dz} &= -\rho A_m - \chi \exp(-i\delta_m z) A_{m+1} + \chi_{\perp} \exp(i\delta_{m-1} z) B_{m-1} - \chi_{\perp} \exp(-i\delta_m z) B_{m+1},\end{aligned}\quad (1)$$

где  $\rho$  – параметр гиротропии,  $A_m$ ,  $B_m$  – соответственно  $p$ - и  $s$ -составляющие комплексных векторных амплитуд дифрагированных волн;  $\delta_m = |k_{mz} - k_{m+1,z}|$  – параметр отстройки,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Содержащиеся в (1) постоянные связи поляризованных составляющих дифрагированных волн находим из соотношений:

$$\begin{aligned}\chi_{\parallel} &= (\pi n^3 p_{\text{эф}}^{\parallel} / 2\lambda_0) \chi_0, \quad \chi_{\perp} = (\pi n^3 p_{\text{эф}}^{\perp} / 2\lambda_0) \chi_0, \quad \chi = (\pi n^3 p_{\text{эф}} / 2\lambda_0) \chi_0, \\ \chi_0 &= \sqrt{2I_a / \sigma v^3},\end{aligned}$$

где  $n$  – показатель преломления среды,  $\lambda_0$  – длина световой волны в вакууме,  $I_a$  и  $v$  – соответственно интенсивность и фазовая скорость ультразвуковой (УЗ) волны,  $\sigma$  – плотность среды,  $p_{\text{эф}}^{\parallel, \perp}$ ,  $p_{\text{эф}}$  – эффективные фотоупругие постоянные.

В работе [1] показано, что АО устройства обработки сигналов наилучшими характеристиками обладают при дифракции в промежуточном режиме, близком к брэгговскому. При этом для дифрагированного светового поля наряду с угловой селективностью характерно также наличие нескольких дифракционных максимумов.

Предположим, что световая волна падает на границу области АО взаимодействия под углом, равным углу Брэгга  $\varphi_B = \arcsin(\lambda_0 / 2\Lambda n)$ , к оси  $Z$  ( $\Lambda$  – длина УЗ волны). Промежуточный режим дифракции реализуется, если значения волнового параметра  $Q = 2\pi\lambda_0 l / n\Lambda^2$  удовлетворяют условию  $0,6 < Q < 1,5$  ( $l$  – длина АО взаимодействия) [1, 4]. В таких условиях следует ограничиться только четырьмя дифракционными порядками  $m=0, \pm 1, \pm 2$ , в которых волнам сопоставляются комплексные амплитуды  $A_{-1}(B_{-1})$ ,  $A_0(B_0)$ ,  $A_1(B_1)$ ,  $A_2(B_2)$  [3, 4]. Система уравнений связанных волн, представленная в виде двух век-

торно-матричных уравнений, имеет вид:

$$\frac{dA}{dz} = (SA + RB), \quad \frac{dB}{dz} = (\tilde{R}A + \tilde{S}B), \quad (2)$$

где  $A = (A_{-1}, A_0, A_1, A_2)^\tau$ ,  $B = (B_{-1}, B_0, B_1, B_2)^\tau$ ; символом  $\tau$  обозначена операция транспонирования. Матрицы  $S$  и  $R$ , содержащиеся в (2), имеют вид:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \chi_{\text{эф}}^{\parallel} q_+ & 0 & 0 \\ \chi_{\text{эф}}^{\parallel} q_- & 0 & \chi_{\text{эф}}^{\parallel} & 0 \\ 0 & \chi_{\text{эф}}^{\parallel} & 0 & \chi_{\text{эф}}^{\parallel} q_- \\ 0 & 0 & \chi_{\text{эф}}^{\parallel} q_+ & 0 \end{pmatrix},$$

$$R = \begin{pmatrix} \rho & \chi_{\text{эф}} q_+ & 0 & 0 \\ \chi_{\text{эф}} q_- & \rho & \chi_{\text{эф}} & 0 \\ 0 & \chi_{\text{эф}} & \rho & \chi_{\text{эф}} q_- \\ 0 & 0 & \chi_{\text{эф}} q_+ & \rho \end{pmatrix},$$

где  $q_{\pm} = \exp(\pm i\delta_1 x)$ ; величины  $\tilde{R}$  и  $\tilde{S}$  получаются из  $R$  и  $S$  после выполнения замен:  $\rho \rightarrow -\rho$ ,  $\chi_{\text{эф}}^{\parallel} \rightarrow -\chi_{\text{эф}}^{\perp}$ ,  $\chi_{\text{эф}} \rightarrow -\chi_{\text{эф}}$ .

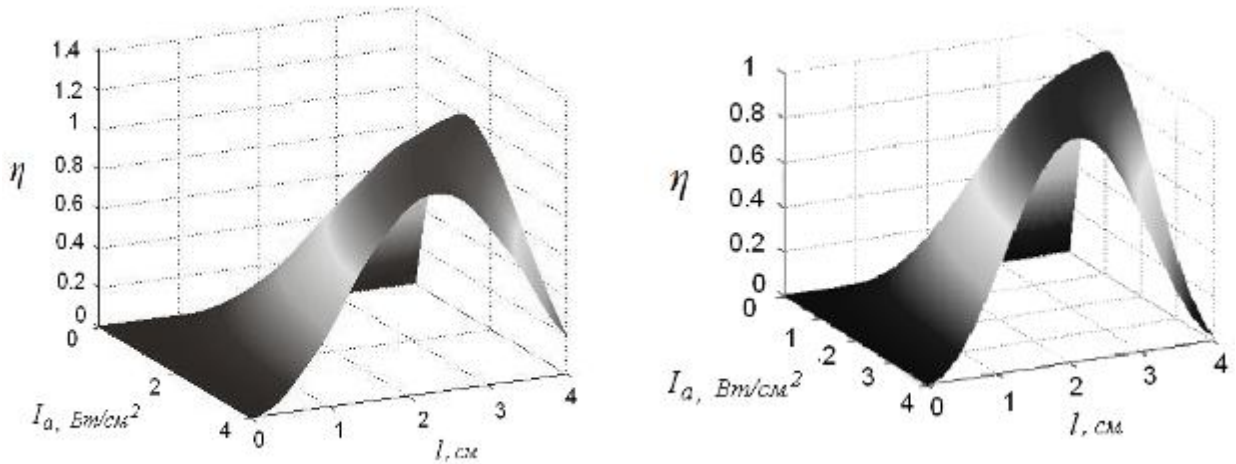
Численные расчеты относительной интенсивности света, дифрагировавшего в +1-й порядок,  $\eta_{+1} = (|A_{+1}|^2 + |B_{+1}|^2) / (|A_{\parallel}|^2 + |A_{\perp}|^2)$ , где  $A_{\parallel}, A_{\perp}$  – соответственно амплитуды  $p$ - и  $s$ - составляющих векторной амплитуды падающей волны, – для кристалла германата висмута ( $Bi_{12}GeO_{20}$ ) проводились с использованием системы уравнений (2).

Пусть продольная или сдвиговая УЗ волна распространяется в гиротропном кубическом кристалле вдоль оси третьего порядка. При этом в брэгговском режиме дифракции система уравнений связанных волн (2) может иметь строгое аналитическое решение. При описании дифракции на продольной УЗ волне в системе уравнений (2) следует

положить  $p_{\text{эф}}^{\parallel} = (p_{11} + p_{12} + p_{21} + 4p_{44})/3$ ,  
 $p_{\text{эф}}^{\perp} = (p_{11} + p_{12} + p_{21} - 2p_{44})/3$ . Если дифракция происходит на сдвиговой УЗ волне, вектор смещения которой  $\vec{U} \parallel [10\bar{1}]$ , то в (2) следует принять  $\chi_{\parallel} = -\chi_{\perp}$ , при этом

$$p_{\text{эф}}^{\parallel} = (2p_{11} - p_{12} - p_{21} + 2p_{44})/\sqrt{6}, \quad p_{\text{эф}} = (p_{12} - p_{21})/2.$$

На рисунке 1 представлена зависимость дифракционной эффективности  $\eta_{+1}$  от интенсивности продольной УЗ волны  $I_a$  и длины АО взаимодействия  $l$  для  $s$ -поляризованной (а) и  $p$ -поляризованной (б) падающей волны.



а) –  $s$ -поляризованный падающий свет;      б) –  $p$ -поляризованный падающий свет

Рисунок 1 – Зависимость дифракционной эффективности  $\eta_{+1}$  от интенсивности ультразвука  $I_a$  и длины АО взаимодействия  $l$

Анализируя рисунок, видим, что при малых интенсивности ультразвука и длине АО взаимодействия эффективности дифракции ортогонально поляризованных составляющих амплитуды дифрагировавшей волны мало отличаются. Значительные изменения  $\eta_{+1}$  имеют место при больших значениях  $I_a$  и  $l$ . Например, при  $I_a = 3 \text{ Вт/см}^2$  и  $l = 4 \text{ см}$  эффективность дифракции  $s$ -поляризованной волны составляет 40 %, а для  $p$ -поляризованной волны – 60 %.

Зависимость эффективности дифракции  $\eta_{+1}$  от интенсивности сдвиговой УЗ волны  $I_a$  и длины АО взаимодействия  $l$  представлена на рисунке 2. При этом эффективность дифракции практически не зависит от состояния поляризации падающего света. Данный физический эффект обусловлен сильно проявляющимся вращением плоскости поляризации световой волны в гиротропном кристалле и может быть использован для поляризационно-независимой модуляции света [4].

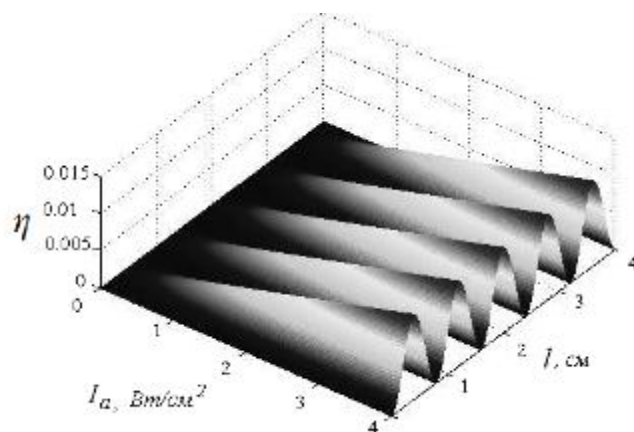


Рисунок 2 – Зависимость дифракционной эффективности  $\eta_{+1}$  от интенсивности сдвиговой ультразвуковой волны и длины АО взаимодействия

На рисунке 2 видно, что эффективность дифракции  $\eta_{+1}$  на сдвиговой УЗ волне значительно ниже, чем при дифракции на продольной УЗ волне. Это обусловлено низким значением эффективной фотоупругой постоянной и значительным удельным вращением кристалла.

### Литература

1. Балакший, В.Н. Физические основы акустооптики / В.Н. Балакший, В.Н.Парыгин, Л.Е. Чирков. – М.: Радио и связь, 1985. – 280 с.
2. Федоров, Ф.Н. Теория гиротропии / Ф.Н. Федоров. – Минск: Наука и техника, 1976. – 453 с.
3. Кулак, Г.В. Поляризационно-независимая ультразвуковая модуляция света в гиротропных кристаллах германата висмута / Г.В. Кулак, П.И. Ропот // ЖПС. – 2003. – Т. 70, № 2. – С. 282–285.
4. Кулак, Г.В. Промежуточный режим дифракции света на ультразвуке в анизотропных гиротропных кристаллах / Г.В. Кулак // ЖТФ. – 1997. – Т. 67, № 9.

Г.В. Кулак<sup>1</sup>, А.Г. Матвеева<sup>1</sup>, В.Г. Гуделев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>УО «Мозырский государственный педагогический университет имени И.П. Шамякина», Беларусь

<sup>2</sup>Институт физики имени Б.И. Степанова, Беларусь

**БРЭГГОВСКАЯ ДИФРАКЦИЯ СВЕТА  
НА АКУСТО-ФОТОРЕФРАКТИВНЫХ  
ГОЛОГРАФИЧЕСКИХ РЕШЕТКАХ**

Акустооптическая (АО) память фоторефрактивных (ФР) кристаллов привлекает значительный интерес исследователей в связи с проблемой создания устройств записи акустических сигналов оптическими методами [1, 2]. В [1] теоретически и экспериментально исследован ФР эффект в условиях интерференции световых пучков одинаковой частоты, полученных в результате раман-натовской АО дифракции света на стоячих ультразвуковых (УЗ) волнах.

Запись ФР решёток в гиротропных кубических кристаллах при взаимодействии световых волн разной частоты, дифрагированных на бегущих УЗ волнах в переменном электрическом поле, рассмотрена в работе [2].

Ультразвуковая волна с вектором смещений  $\vec{U} = \vec{U}_0 \exp[i(Kz - \Omega t)]$ , где  $K = \Omega/v$ ;  $\Omega$  и  $v$  – соответственно циклическая частота и фазовая скорость УЗ волны, распространяется вдоль оси [111] гиротропного кубического кристалла. В дальнейшем предполагается, что плоскость АО дифракции совпадает с плоскостью YZ, полученной в результате поворотов: сначала кристаллографической системы координат  $X_1 X_2 X_3$  вокруг оси  $O X_3$  на угол  $45^0$ , затем – полученной системы координат  $X' Y' Z'$  на угол  $\theta = \arcsin \sqrt{2/3}$  вокруг оси  $O Y'$  до совмещения оси  $O Z'$  с направлением [111]. При дифракции света на бегущей УЗ волне возникают световые пучки, которым соответствуют комплексные векторные амплитуды  $\vec{E}_0, \vec{E}_1$  и частоты  $\omega$  и  $\omega \pm \Omega$ . Знак плюс выбирается для антистоксовой, знак минус – для стоксовой АО дифракции. В области пересечения таких пучков (между плоскостями  $y = 0$  и  $y = l$ ) возникает распределение интенсивности света; при этом контраст интерференционной картины  $m$  зависит от частоты  $\Omega$  УЗ волны. В описанных условиях запись статических голографических ФР решёток возможна только при создании в кристалле переменного электрического поля, напряженность которого  $\vec{E}^e$  колеблется вдоль волнового вектора решётки  $\vec{K}$  с частотой, равной разности частот записывающих пучков, то есть  $\vec{E}^e = \vec{E}_0^e \cos \Omega t$ , где следует полагать  $\Omega \gg \tau_{sc}^{-1}$  ( $\tau_{sc}$  – время записи голограммы в ФР кристалле) [2]. При этом в кристалле вдоль волнового вектора  $\vec{K} \parallel OZ$  устанавливается стационарный фототок

$$j \sim E^e (\vec{E}_0 \vec{E}_1^*) \sim \exp(\mp i \Omega t) \exp(-i \omega t) \exp[i(\omega \pm \Omega)t] + c.c..$$

ФР решётка формируется при взаимодействии двух дифрагированных на ультразвуке световых волн:

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_0^0 \exp[i(\vec{k}_0 \vec{r} - \omega t)], \quad \vec{E}_1 = \vec{E}_1^0 \exp\{i[\vec{k}_1 \vec{r} - (\omega \pm \Omega)t]\},$$

– а также низкочастотного электрического поля  $\vec{E}^e \sim \vec{E}_0^e \exp(\mp i\Omega t)$ .

В этих условиях существует пространственная составляющая фототока  $j \sim \exp(\pm iKr)$ . Пространственно-периодический и стационарный фототок  $j$  обуславливают разделение зарядов в ФР кристалле и формирование решётки показателя преломления [2].

Считывание фоторефрактивных голографических (ГР) решеток проводится, как правило, в брэгговском режиме дифракции. При теоретическом исследовании процесса дифракции на фазовой решетке, сформированной бегущей УЗ волной в гиротропном кристалле, следует учитывать её неоднородный характер (см. [2]). В модели связанных волн система уравнений для определения комплексных амплитуд  $A_0, A_1, B_0, B_1$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dA_0}{dy} &= \rho B_0 + i v_{\parallel}(y) A_1, & \frac{dA_1}{dy} &= i \Delta k A_1 + \rho B_1 + i v_{\parallel}^*(y) A_0, \\ \frac{dB_0}{dy} &= -\rho A_0 + i v_{\perp}(y) B_1, & \frac{dB_1}{dy} &= i \Delta k B_1 - \rho A_1 + i v_{\perp}^*(y) B_0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\Delta k = \Omega \Delta \varphi / 2v$  – отстройка фазового синхронизма,  $v_{\parallel} = -(\pi n^3 r_{41} / \lambda_r) E_{sc}(y)$ ,  $v_{\perp} = (\pi n^3 r_{41} / \lambda_r) E_{sc}(y)$ ,  $r_{41}$  – электрооптическая постоянная,  $\Delta \varphi$  – угловая отстройка от угла Брэгга,  $\lambda_r$  – длина волны считывающего света; символом «\*» обозначена операция комплексного сопряжения; выражение для напряженности неоднородного электрического поля фоторефрактивной решетки  $E_{sc}(y)$  приведено в [2]. Для решения системы уравнений (1) использовались граничные условия:  $A_0(y=0) = A_{\parallel r}$ ,  $B_0(y=0) = A_{\perp r}$ ,  $A_1(y=0) = B_1(y=0) = 0$ , где  $A_{\parallel r}, A_{\perp r}$  – амплитуды  $s$ - и  $p$ -поляризованных составляющих амплитуды световой волны, падающей на область АО взаимодействия.

Расчёты с использованием системы (1) проводились для кристалла  $Bi_{12}SiO_{20}$  при следующих значениях параметров: температура  $T = 300K$ , частота УЗ  $f = 100$  МГц, длина волны записывающего света  $\lambda_w = 0,45$  мкм и считывающего –  $\lambda_r = 0,63$  мкм. Напряженность электрического поля ФР голографической решетки определяется концентрацией акцепторов  $N_A$  в запрещенной зоне кристалла и временем жизни носителей заряда  $\tau$ . Записывающий и считывающий световые пучки полагались  $p$ - поляризованными ( $A_{\parallel} = A_{\parallel r} = 1, A_{\perp} = A_{\perp r} = 0$ ). Энергетические и поляризационные характеристики дифрагированного света рассчитывались на выходной грани ФР решётки – при  $y = l$ .

На рисунке 1,а представлена зависимость дифракционной эффективности  $\eta = (|A_1|^2 + |B_1|^2) / (|A_{\parallel r}|^2 + |A_{\perp r}|^2)$  от интенсивности  $I_a$  записывающего ФР решётку ультразвука, рассчитанная при различных значениях амплитуды напряжённости внешнего электрического поля  $E_0^e$ . На рисунке видно, что при наличии гиротропии ( $\rho \neq 0$ ) эффективность дифракции значительно ниже, чем в её отсутствие. Увеличение напряжённости внешнего поля  $E_0^e$  сопровождается некоторым ростом дифракционной эффективности.

Зависимость дифракционной эффективности  $\eta$  от интенсивности записывающего ультразвука  $I_a$  при различных значениях времени жизни носителей заряда  $\tau$  представлена на рисунке 1,б. При увеличении  $\tau$  уменьшается напряжённость  $E_{sc}$  поля ФР решётки, зависящая от величины напряженности дрейфового поля  $E_\mu$ . Основная причина изменения времени жизни носителей заряда очевидна при анализе выражения  $\tau = 1/(s v_{th} N_r)$ , где  $s$  – сечение захвата электрона центром рекомбинации,  $N_r$  – концентрация свободных центров,  $v_{th}$  – тепловая скорость электронов. Время  $\tau$  может быть уменьшено посредством увеличения интенсивности внешней засветки.

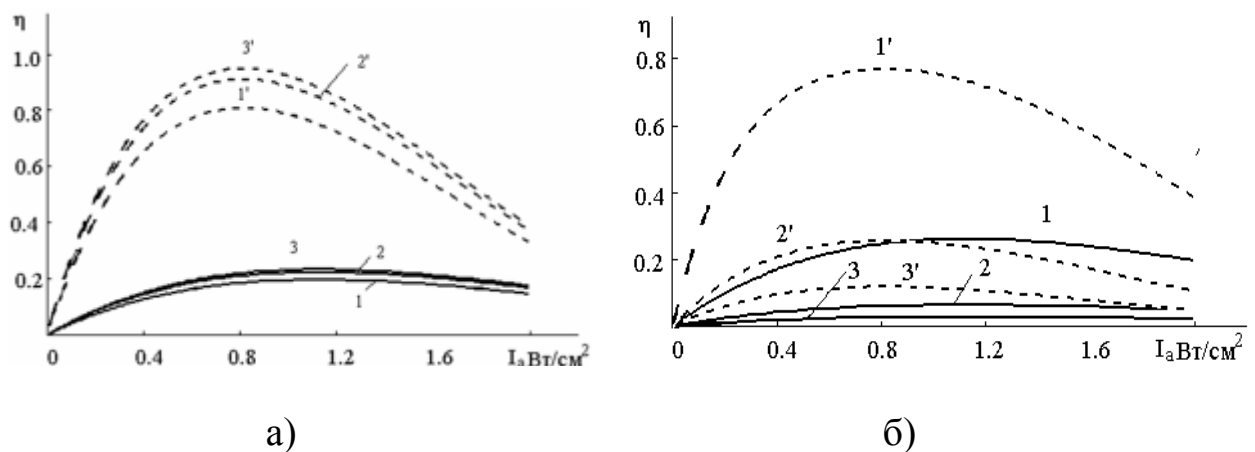


Рисунок 1 – а) Зависимость эффективности дифракции  $\eta$  от интенсивности УЗ  $I_a$  при различных значениях амплитуды напряжённости внешнего электрического поля

$$E_0^e: 1 - 5; 2 - 10; 3 - 15 \text{ кВ/см}$$

$$(l = 2 \text{ см}, N_A = 2 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}, \tau = 2,4 \cdot 10^{-4} \text{ с}, \Delta\varphi = 0);$$

б) Зависимость эффективности дифракции  $\eta$  от интенсивности УЗ  $I_a$  при различных значениях времени жизни носителей заряда

$$\tau : 1 - 10^{-4}, 2 - 2 \cdot 10^{-4}, 3 - 3 \cdot 10^{-4} \quad (l = 2 \text{ см}, N_A = 2 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}, \Delta\varphi = 0,$$

$$E_0^e = 5 \text{ кВ/см};$$

—— — при наличии гиротропии, ---- — в отсутствие гиротропии)

Анализируя представленные зависимости, видим, что гиротропные кубические кристаллы типа силленита могут успешно применяться для записи ФР-решёток световыми волнами, испытавшими дифракцию на бегущих УЗ волнах в режиме Брэгга в условиях синхронного детектирования при умеренных уровнях акустической мощности и приемлемых напряжённостях внешних электрических полей. С учётом того, что, в отличие от других материалов, кристаллы типа силленита одновременно обладают высокой чувствительностью к изменениям интенсивности записывающего света и являются реверсивными, можно сделать вывод о предпочтительном их применении для голографической регистрации УЗ сигналов.

### Литература

1. Бережной, А.А. Исследование фоторефрактивного эффекта при акустооптическом взаимодействии в кристаллах силиката висмута / А.А. Бережной, Т.Н. Шерстнева // Опт. и спектр. – 1989. – Т. 67, № 6. – С. 1313–1319.
2. Кулак, Г.В. Фоторефрактивный эффект при акустооптическом взаимодействии в гиротропных кубических кристаллах / Г.В. Кулак // Письма в ЖТФ. – 2001. – Т. 27, № 13. – С. 22–29.

**О.В. Ляшенко<sup>1</sup>, А.И. Власенко<sup>2</sup>, М.П. Киселюк<sup>2</sup>, В.П. Велещук<sup>2</sup>,  
А.П. Онанко<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко,  
Украина,

<sup>2</sup>Институт физики полупроводников имени В.Е. Лашкарева  
НАН Украины, Украина

### АКУСТИКО-ЭМИССИОННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ НАДЕЖНОСТИ СВЕТОДИОДОВ

Акустико-эмиссионный (АЭ) метод является одним из немногих неразрушающих методов контроля, который применяется для всех типов твердых материалов, которые используются в современной тех-



нике и промышленности [1, 2]. Существующая проблема идентификации источников АЭ сигналов под действием внешних полей разной физической природы (микрообъемов, в которых происходит динамическая локальная структурная перестройка) частично решена в композиционных материалах и в некоторых других твердых телах: пьезокерамике, стекле, металлах и сплавах.

Однако из-за микро- и наноразмеров объектов исследований, а соответственно, высокой сложности экспериментов по регистрации АЭ, информация о механизмах АЭ и идентификации АЭ источников (как полупроводниковых кристаллов, так и сложных полупроводниковых структур на их основе) крайне ограничена и относится к исследованиям нескольких научных групп за последние 20–30 лет, в частности [2–5].

Использование полупроводниковых светоизлучающих диодов (СД) при повышенных токах нагрузки вызывает целый ряд сложностей технического и физического характера. Известными и общепринятыми являются экспрессные методы исследования СД, находящихся в стадии разработки или подвергающихся текущему контролю, что позволяет определить за короткое время причины и механизмы выхода их из строя, обнаружить недостатки в технологическом цикле, принять меры по их устранению.

Отметим, что характеристики (в частности, значение прямого тока  $I_{cm}$ ) современных мощных СД, заявленные производителем, можно отнести скорее к максимально допустимым (МД), а не к максимально эффективным (номинальным). Как следует из анализа ампер-ваттных характеристик [5], последние могут быть в 2–3 раза ниже. Это положение существенно отличается от ситуации с индикаторными СД, где МД характеристики превышают номинальные от (10÷15) раз в свежесготовленных ( $t \sim 10^6$  с) до (50÷75) раз (в естественно-состаренных ( $t \sim 10^8$  с) [3, 5].

Для эксплуатации СД важной является надежность работы при нагрузках, превышающих номинальные, т.е. в условиях, не заявленных производителем, какими являются аварии, повреждения и нештатных ситуации. В настоящее время актуальной проблемой является применение СД в приборах одноразового использования с максимальным текущим эффектом и ограниченным, но гарантированным сроком работы (ГСР).

Отметим, что в традиционных подходах [1] к одному из известных нелинейных и хаотических явлений, непосредственно связанных с процессами дефектообразования, явления АЭ определяются как нелинейные или как абсолютно хаотические процессы. Такой подход обу-

словлен сложностью точной формулировки задачи АЭ – задачи о спонтанном хаотическом излучении акустических волн шумового характера подвижными структурными дефектами при релаксации, вызванной внешним влиянием [2], избыточными механическими и термомеханическими напряжениями (ТМН). Условием, при котором обычно создается возможность проводить анализ процесса АЭ, является предположение о независимости источников АЭ, справедливое только на первоначальных стадиях нагрузки, далеких от разрушения образца.

При исследовании процессов дефектообразования, которые происходят в гетероструктурах СД, в частности при токах более высоких, чем заявленные производителем и соответствующие ГСР, следует различать по крайней мере два механизма дефектообразования, которые одновременно являются процессами, порождающими или активирующими источники АЭ. Первый механизм связан с возникновением ТМН в результате скачкообразного изменения плотности тока и локально-неоднородного перераспределения температуры активной области  $T_a$  при установлении квазистационарного теплового режима [3]. Второй механизм состоит в ускорении процессов дефектообразования в результате превышения условно номинальной температуры (или тока и температуры), которые описываются с помощью формулы Аррениуса.

В работе на основе АЕ-метода исследовано влияние термомеханических напряжений, возникающих в результате пошагового изменения тока, на последующее функционирование СД в условиях саморазогрева при форсированном по току режиме работы (ФРР) и на время наработки на отказ  $t_{50}$ .

Для оценки  $T_a$  использовалась формула  $T_a = T_0 + (1 - \eta) \cdot UI \cdot R_t$ , где  $T_0$  – температура корпуса,  $\eta = \Phi/P$  – квантовый выход,  $\Phi$  – поток оптического излучения,  $I$  – сила постоянного тока. Коэффициент теплового сопротивления  $R_t$  для индикаторного СД в полимерном корпусе с теплоотводом из углеродной стали  $R_t = 420 \text{ K/Wm}$ . Соответствующие значения потребляемой мощности  $P = U \cdot I$  синего индикаторного  $\text{In}_{0,18}\text{Ga}_{0,82}\text{N}$  СД с квантовой ямой получено в результате измерения ВАХ на приборе Keithley 2410 в режиме стабилизированного тока. Параллельно осуществлялась регистрация интенсивности электролюминесценции (ЭЛ) фотодиодом ФД-7К в режиме тока короткого замыкания. По причине малой ширины спектра ЭЛ чувствительность фотодиода была одинаковой для всех длин волн спектра. СД размещался таким образом, чтобы  $\sim 99,9\%$  потока его излучения попадало в активную область фотодиода.

На рисунке 1 представлена полученная авторами зависимость  $\eta(I)$ . Рассчитанная кривая для значений  $I$  до  $40 \text{ мА}$  полностью совпадает с результатами работы [6] и с подобной зависимостью для импульсного тока, что позволяет проанализировать тепловые потери  $\eta$  при высоких уровнях возбуждения. Максимум квантового выхода наблюдается в области малых токов (при  $I=1 \text{ мА}$ ), что соответствует плотности тока  $16,7 \text{ А/см}^2$ ). По оценкам зависимость  $\eta(I)$  имеет характер экспоненты после достижения максимума и выходит на насыщение при  $I > 200 \text{ мА}$ . Все расчеты проводились для фактической площади активной области, равной  $6 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2$ .

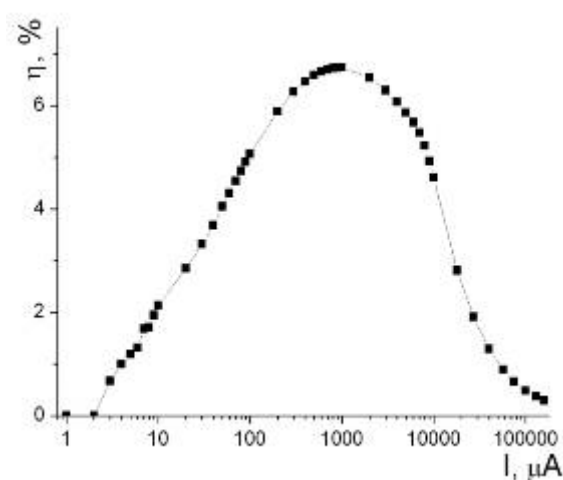


Рисунок 1 – Зависимость квантового выхода СД от силы тока

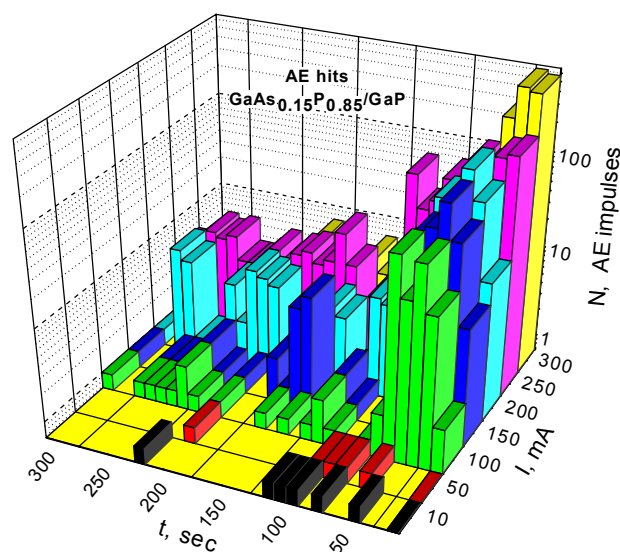


Рисунок 2 – Диаграмма изменения интенсивности АЭ

Локальные флуктуации  $\eta$  по поверхности активной области проявляются в ее дополнительном перегреве по порядку величины изменения  $\eta$ . Расчет проведен для силы тока  $I = 100 \text{ мА}$ , при которой проводился эксперимент В соответствии с результатами расчетов флуктуации составляют не более  $0,25 \%$ , что в пересчете на температуру составляет  $1,5 \text{ К}$ . В связи с малыми размерами локальных областей ( $\sim 1 \text{ мкм}$ ), в которых наблюдались флуктуации электролюминесценции, возникают значительные пространственноориентированные ТМН, вызванные градиентом температуры  $\sim 1,5 \cdot 10^6 \text{ К/м}$ .

Изучение критичности процессов деградации проводилось после установления порога возникновения АЭ по анализу изменения интенсивности АЭ во времени после пошагового изменения уровня нагрузки (рисунок 2). Обнаружено, что наименьшую деградацию испыты-

вают СД, для которых изменение силы тока происходит по закону  $I = 1,86 \cdot n^2 + 10$ , установленному ранее по результатам исследований АЭ индикаторных СД. Для мощных осветительных коммерческих СД (в частности, SUNSEON) удалось экстраполировать зависимость и установить, что заявленная производителем номинальная сила тока не соответствует ГСР и является МД.

После регистрации АЭ для всех структур использовался форсированный режим работы для установления  $t_{50}$ . По результатам, полученным по  $t_{50}$ , оценено, что вклад деградации, возникающей по причине ТМН при пошаговом изменении тока и последующего локально-неоднородного перераспределения  $T_a$  при установлении квазистационарного теплового режима, соответствует по порядку величины деградации при форсированном режиме работы.

Подобный подход ранее не встречался при рассмотрении вопросов ФРР. Вклад обоих механизмов удастся разделить с помощью АЭ-метода, а именно проведя анализ интенсивности АЭ при пошаговом нагружении.

Таким образом, в работе обнаружены причины нехарактерного механизма выхода из строя СД в полимерном корпусе (газовый разряд); установлено значение мнимой энергии активации типичного механизма деградации, что дало возможность оценить гарантированный срок работы при заявленной производителем силе тока, определить зависимость  $\eta(I)$  при  $I > I_{cm}$  и максимально допустимые значения силы тока нагрузки, при которых не активен дополнительный механизм деградации, уточнить экстраполированную кривую пошаговой нагрузки для мощных осветительных СД.

### Литература

1. Грешников, В.А. Акустическая эмиссия. Применение для испытаний материалов и изделий / В.А. Грешников, Ю.Б. Дробот. – М.: Изд. Стантартов, 1976. – 272 с.

2. Ляшенко, О.В. Моделювання динаміки акустичної емісії матеріалів / О.В. Ляшенко // Вісник Київського університету, серія фіз.-мат. науки. – 2004. – № 3. – С. 20–23.

3. Ляшенко, О.В. Акустична емісія світловипромінювальних структур на основі сполук  $A^3B^5$  обумовлена постійним прямим струмом. / О.В. Ляшенко, В.П. Велещук // УФЖ. – 2003. – Т. 48, № 9. – С. 981–985.

4. Газовый разряд при деградации индикаторных светодиодов на основе InGaN/GaN-гетероструктур в полимерной оболочке / В.П. Велещук, А.И. Власенко, О.В. Ляшенко, М.П. Киселюк, Ю.А. Мягченко,

Р.Г. Чуприна // Журнал Прикладной Спектроскопии. – 2011. – Т. 78. – № 1. – С. 134–140.

5. Acoustic-emission method of control of defects-formation process in light-emitting structures / V.P. Veleschuk, O.I. Vlasenko, O.V. Lyashenko, M.P. Kisseluk // SPQEO. – 2010. – № 3. – P. 326–329.

6. Закгейм, А.Л. Особенности работы светодиодов сине-зеленого диапазона на основе InGaN-структур с квантово-размерной активной областью при высоких уровнях возбуждения / А.Л. Закгейм // 4 Всерос. совещание «Нитриды галлия, индия и алюминия», С.-Петербург, 18–19 сентября 2000 г.: Тезисы докладов. – С. 84–86.

**G.S. Mityurich<sup>1</sup>, A.N. Serdyukov<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> **Belarus Trade and Economic University, Belarus,**

<sup>2</sup> **F. Skoriny Gomel State University, Belarus**

## **THERMOOPTICAL GENERATION OF THE SOUND BY QUASI-NONDIFFRACTION BEAMS IN MAGNETIC AND NATURAL GYROTROPIC MEDIA WITH INTERNAL STRESSES**

Method of laser photoacoustic spectroscopy has been broadly applicable lately for the investigation of interaction between electromagnetic radiation and different media. The use of laser sources in photoacoustics permitted to make a transition to qualitative higher level of measurement and to increase substantially sensitivity of the method has been demonstrated at investigation of media in different aggregative states in wide spectral range from ultraviolet to infrared, exhibition absorption both strong –  $10^5 \text{ cm}^{-1}$  and very weak –  $10^{-10} \text{ cm}^{-1}$  [1–3].

And advanced method of photoacoustic spectroscopy along with conventional methods is applied at investigation of dissipative, thermal and nonlinear characteristics of naturally gyrotropic and magnetoactive media.

When studying the photoacoustic transformation in inhomogeneous and crystalline media, it is necessary to take into account the fact that the absorption of electromagnetic waves in them has a number of specific features which are caused, for example, by anisotropy, gyrotropy, and dichroism [4, 5]. Therefore, one of the main problems of laser photoacoustic spectroscopy is to find analytical solutions for inhomogeneous heat conduction equations, in which the right hand side contains the energy dissipation as a heat source power density. Having solved the electrodynamic boundary value problems using the covariant methods of direct tensor calculus (which were developed for the first time by F.I. Fedorov [4, 6]), one can easily determine the energy dissipation in media with an arbitrary com-

bination of gyrotropy, dichroism, and anisotropy, for example, in crystals of middle syngonies [7], crystals with a cholesteric structure of anisotropy [8], naturally gyrotropic superlattices [9], etc.

Note that the approach to the problems of photoacoustic transformation, which is based on the solution of boundary value problems of electrodynamics by the covariant method and the subsequent calculation of the energy dissipation, is preferred over those traditionally used in photoacoustics [1, 6, 8], because it makes it possible to take into account (when necessary) boundary diffraction effects, multibeam interference, peculiarities of laser mode structure, etc.

The purpose of this study was to analyze naturally-gyrotropic and magnetoactive crystals with internal stress by laser photoacoustic spectroscopy under sound excitation by Bessel light beams (BLB) in different modes.

### 1. Magnetoactive samples

Let us consider the case of piezoelectric detection of a photoacoustic signal formed as a result of the absorption of the TE-mode of an amplitude modulated Bessel light beam by a crystal with internal stress (Figure 1).

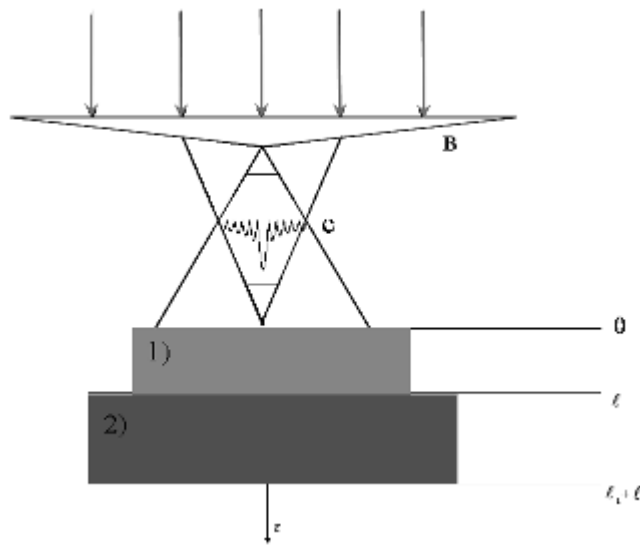


Figure 1 – Schematic of piezoelectric detection of a photoacoustic signal:  
 (1) magnetoactive or gyrotropic sample, (2) piezoelectric sensor,  
 (B) axicon, and (C) Bessel light beam

The properties of magnetoactive sample can be described with the help of material equations

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= (\boldsymbol{\varepsilon}^{-1} + i\mathbf{G}^x) \mathbf{D}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}, \\ \mathbf{B} &= \boldsymbol{\mu} \mathbf{H}, \quad \boldsymbol{\mu} = \mathbf{1}, \quad \mathbf{G}^{-1} = (\boldsymbol{\varepsilon}^{-1} + i\mathbf{G}^x)', \end{aligned} \quad (1.1)$$

where  $\mathbf{G}^x$  is antisymmetrical complex tensor of 2<sup>nd</sup> rank, dual to vector of magnetic gyration  $\mathbf{G}$ , with the real part  $\text{Re } \mathbf{G}^x = \mathbf{G}'$  defining the spe-

cific rotation of polarization plane, while imaginary  $\text{Im } G^x = G''$  is responsible for value of magnetic circular dichroism,  $\varepsilon$  – dielectrical permittivity.

Considering vectors  $\mathbf{E}$  and  $\mathbf{B}$  being proportional  $e^{i(k_z z + m\theta - \omega t)}$ , from equation (1.1) and Maxwell equations in cylindrical coordinate system, we will come to the equations system for constituents vectors  $\mathbf{E}$  and  $\mathbf{B}$ :

$$\begin{aligned}
 1) \quad \frac{im}{2\rho} E_z - ik_z E_\theta &= ik_0 B_\rho, & 4) \quad \frac{im}{2\rho} B_z - ik_z B_\varphi &= -ik_0 G E_\rho, \\
 2) \quad ik_z E_\rho - \frac{\partial}{\partial \rho} E_z &= ik_0 B_\theta, & 5) \quad ik_z B_\rho - \frac{\partial}{\partial \rho} B_z &= -ik_0 G E_\varphi, \\
 3) \quad \frac{1}{\rho} E_\theta + \frac{\partial}{\partial \rho} E_\varphi - \frac{im}{\rho} E_\rho &= ik_0 B_z, & 6) \quad \frac{1}{\rho} B_\varphi + \frac{\partial}{\partial \rho} B_\varphi - \frac{im}{\rho} B_\rho &= -ik_0 G E_z,
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

where  $\rho$  and  $\theta$  – cylindrical coordinates,  $k_z = k_0 \sqrt{\varepsilon} \cos \gamma$  – parameter BLB obliquity and equal to half of the corner at top of the cone of wave vectors, determining spectrum of spatial parts of BLB. Further it is simple to receive expression for energy dissipation of the TE-mode of BLB

$$Q^{TE} = \frac{c}{4\rho} \frac{q^2 m}{\rho |k_z^2 - \rho^2 G|} \left\{ \frac{k_{z2} \text{Im}(k_z^{2*} - \rho^2 G^*) \text{Im}\left(\frac{k_z^2 - \rho^2 G}{k_z}\right)}{|k_z^2 - \rho^2 G|} i \text{Im}^2 n - 2 \text{Re}(k_z^2 - \rho^2 G) \text{Re}^2 n \right\} J'_m(q\rho) J_m(q\rho) e^{-2k_z z}, \tag{1.3}$$

where  $J_m(q\rho)$  – is the  $m$ th order Bessel function of the first kind,

$$J'_m(q\rho) = \frac{\partial J_m(q\rho)}{\partial \rho}. \tag{1.4}$$

Distribution temperature field in magnetoactive media, absorbing amplitude-modulated BLB of TE-mode, can be described by inhomogeneous equation of thermal conductivity

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{1}{\beta_s} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{2k_s} Q^{TE}(z), \tag{1.5}$$

where  $T$  – temperature,  $\beta_s$  and  $k_s$  coefficients of thermal and temperature conductivity, related by expression  $\beta_s = k_s / \rho_0 C$ ,  $\rho_0$  – sample solidity,  $C$  – specific heat.

Finding general and particular solution of equation (5), taking note of 4 and stationary limit conditions, expression for temperature field in absorbing magnetoactive sample

$$T(z) = \left( 2 \frac{\text{Im}(k_z)}{\sigma} e^{-\sigma z} + e^{-2\text{Im}(k_z)z} \right) \psi e^{i\Omega t}. \tag{1.6}$$

$$\psi = \frac{\tilde{Q}^{TE}}{2k_s(\sigma^2 - 4\text{Im}(k_z)^2)}, \quad \sigma = (1+i)\sqrt{\frac{\Omega}{2\beta_s}} - \text{coefficient of thermal diffusivity,}$$

$\Omega$  – modulation frequency of BLB.

Distribution of temperature field (6) is necessary for calculation thermoelastic deformations in investigated sample and piezotransducer, and further for finding amplitude-phase characteristics of generated PA signal.

To determine deformation at non-linear parallax in terms of influence on body harmonically modulated on time laser radiation can be written following equation for elastic parallaxes [10, 11]

$$G_3^{(3)} \frac{\partial^2 \Delta u_3}{\partial z^2} = g^{(3)} \frac{\partial T(z,t)}{\partial z} + \rho_0 \Delta \ddot{u}_3, \quad (1.7)$$

$$G_3^{(3)} = t_{33}^{(0)} + b + 2(n+m)U_{33} + C_{33}, \quad g^{(3)} = (1 + \vartheta U_{33})\gamma_0, \quad b = 2\mu + (2m-n)U_{33},$$

$C_{33} = K - \frac{2}{3}\mu + 2\ell_0 U_{33}$ ,  $\vartheta$  – coefficient determining dependence of elastic connection from initial deformation,  $\gamma_0$  – coefficient of thermoelastic connection for a non deformed body,  $K$  – compressibility,  $m, n, \ell_0$  – Murnaghan constants,  $\mu$  – coefficient Lamé,  $U_{33}$  – multiplier of initial deformation vector,  $t_{33}^{(0)}$  – multiplier of tensor of initial stresses.

Solving equation (1.7) have expression for parallax parts of body, determined by deformation under influence modulated laser radiation at frequency  $\Omega$

$$\Delta u_3 = D_1 e^{-iQz} + D_2 e^{iQz} + Y \quad (1.8)$$

$$\text{where } Q = \sqrt{\frac{\rho_0 \Omega^2}{G_3^{(3)}}}, Y = Y_1 e^{-\alpha z} + Y_2 e^{-2k_z z}, Y_2 = -\frac{2\text{Im}(k_z)g^{(3)}\psi}{G_3^{(3)}(4\text{Im}(k_z)^2 + Q^2)},$$

$$Y_1 = -\frac{g^{(3)}\psi 2\text{Im}(k_z)}{G_3^{(3)}(\sigma^2 + Q^2)}.$$

Parallax borders of piezoelement can be found from differential expression for elastic parallaxes

$$\frac{\partial^2 u_3^{(p)}}{\partial z^2} - \frac{1}{v_1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_3^{(p)} = 0, \quad (1.9)$$

Solution of which is

$$u_3^{(p)}(z) = P_1 e^{-ik_1 z} + P_2 e^{ik_1 z}. \quad (1.10)$$

Coefficients  $P_1$  and  $P_2$  are in following limited terms, for case of free borders

$$F(\ell) = F_1(\ell), \quad \Delta u_3(\ell) = u_3^{(p)}(\ell), \quad F(0) = 0, \quad F_1(\ell + \ell_1) = 0, \quad (1.11)$$

where  $F(z) = c^T \frac{\partial \Delta u_3}{\partial z} - B\alpha_i \Delta T$  and  $F_1(z) = c^D \frac{\partial u_3^{(p)}}{\partial z}$  – tensions;  $c^T = \lambda + 2\mu$ ,  $\lambda$  – Lamé coefficient;  $c^D = c^E(1 + e^2/(\varepsilon^s c^E))$ ;  $e$  – piezomodule;  $c^E$  – inflexibility coefficient of piezoelectric;  $\varepsilon^s$  – pressed crystal permittivity;  $B$  – volumetric



module of elasticity;  $\alpha_i$  – coefficient of thermal volume extension.

Basing on methodics of works [11, 12, 13] we have expression for PA system response, taken from piezotransducer, at generation of thermoelastic signal in magnetoactive media by TE-mode of BLB

$$V = h \frac{\left( \frac{c^T Q \cos QL}{\sin QL} X_2(L) + X_1(L) \right)}{\left( c^D k_1 \frac{\cos k_1 L_1}{\sin k_1 L_1} + \frac{c^T Q \cos QL}{\sin QL} \right)} \quad (1.12)$$

$$X(L) = c^T \frac{\partial Y}{\partial z} \Big|_{z=L} - B \alpha_i T(L); \quad X_1(L) = X(L) + c^T i Q Y(0) e^{-iQL}; \quad X_2(L) = Y(0) e^{-iQL} - Y(L);$$

$L$  and  $L_1$  – thickness of sample and piezoelement;  $h = e/\varepsilon^s$ ;  $k_1 = \frac{\Omega}{v_1}$ ;  $v_1$  –

sound speed in piezoelement.

As it's seen from expression (1.12) value of amplitude signal taken from piezoelement depends on dissipative and thermophysical properties of sample, parameter of magneto-circular dichroism and also on geometrical parameters of system “sample-piezoelement” and modulation frequency of radiation. Results of graphical analysis energy dissipation dependence on parameters  $\rho$  for different modes of BLB and also amplitude dependence of PA value on BLB modulation frequency and geometrical size of system “sample-piezoelement” are given on figure 1 and figure 2.

First let's investigate influence change of BLB radius on dependence energy dissipation in magnetoactive media from wave length of radiation using MathCad. For this let's choose media with the following parameters.  $G = 10^{-5} + i \cdot 10^{-7}$ ,  $\varepsilon = 6.304 + i \cdot 2.56$  and BLB with  $\gamma = 0.035$

As it comes from graphs (figure 2) on oscillation of energy dissipation is influenced by transversal spatial BLB structure, determined by Bessel functions of different ranks.

Changing stress value of external magnetoactive field, it is possible to influence on energy dissipation speed. As imaginary part of gyration parameter expressed through scalar product Verden constant and tensivity. In this case maximums on graph of dependence  $Q^{TE}$  will shift, that will lead to displacement or appearance of resonance of PA signal amplitude in other spectral region. So there is a possibility not only of PA diagnostics of internal structure of magnetoactive media, but also to control amplitude-phase characteristics of PA signal.

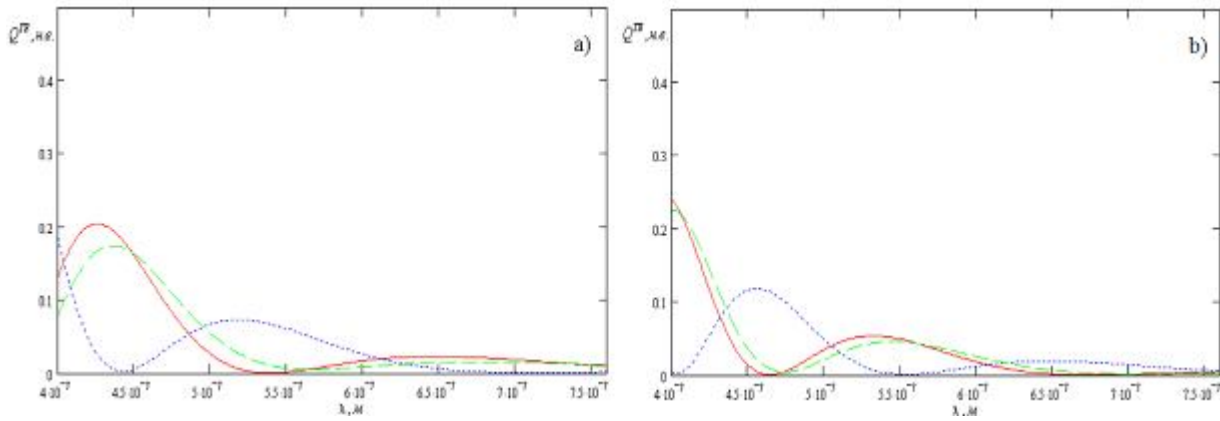


Figure 2 – Dependence of quantity distribution of absorbed heat in magnetoactive media  $Q^{TE}(\lambda)$  on radiation wave length and radial coordinate

a)  $\rho = 8 \cdot 10^{-7} m$ , b)  $\rho = 10^{-6} m$

Further analyze dependence of PA signal amplitude in elastic-stressed sample on radiation frequency modulation and geometrical parameters of system “sample-piezodetector”, which is described by equation (1.12).

It’s seen from graphs, that at optimal choice sample thickness and detector PA signal amplitude can increase by several times, which let increase resolution capability of laser PA spectroscopy. Also is necessary to point that on amplitude values of PA resonances is influenced by change of BLB radius and wave length of radiation.

Experimental measurement of resonance signals values taking in consideration expressions (1.12) let propose means the of determination of thermophysical, acoustical and dichroic parameters of absorbing elastic-stressed media by the method of laser PA spectroscopy.

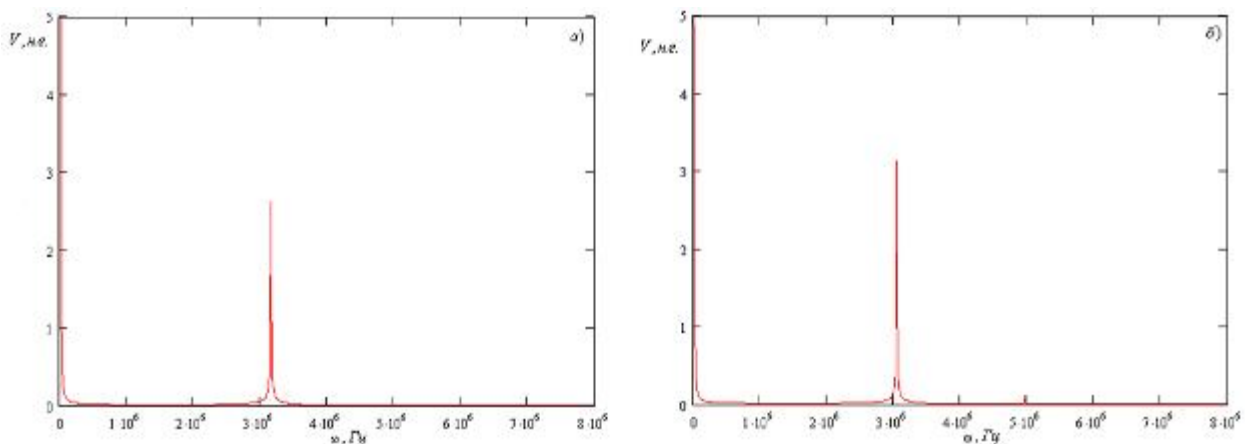


Figure 3 – Dependence of PA signal amplitude  $V(\omega)$  in magnetoactive media

on frequency modulation and longitudinal size of sample,  $L_1 = 5 \cdot 10^{-4} m$

a)  $L = 5 \cdot 10^{-3} m$ , b)  $L = 7 \cdot 10^{-3} m$

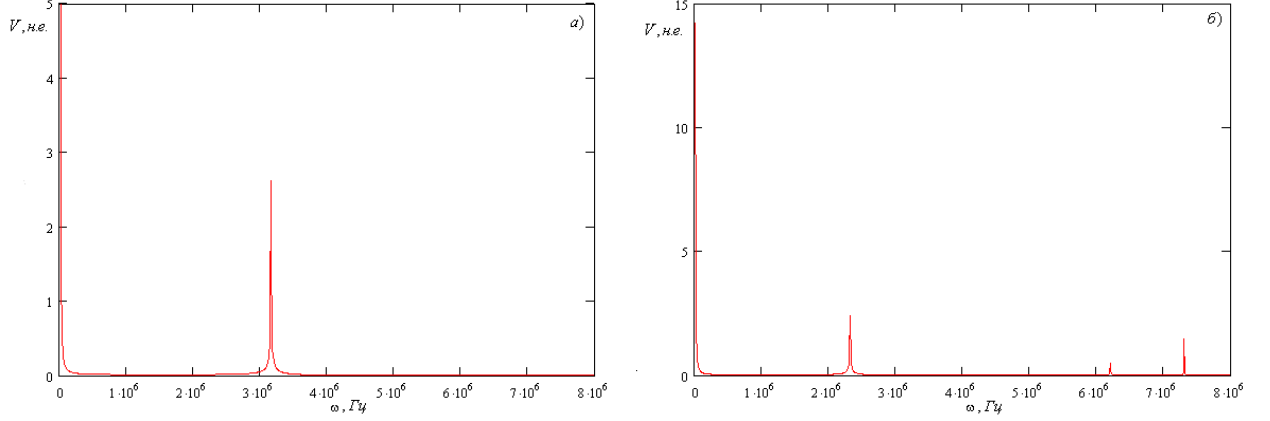


Figure 4 – Dependence of PA signal amplitude  $V(\omega)$  in magnetoactive media

on frequency modulation and longitudinal size of piezodetector,  $L = 5 \cdot 10^{-3} m$

a)  $L_1 = 5 \cdot 10^{-4} m$ , b)  $L_1 = 7 \cdot 10^{-4} m$

## 2. Natural-gyrotropic sample

We proceed from the coupling equations [6, 14]

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon \vec{E} + i\gamma \vec{H}, \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} - i\tilde{\gamma} \vec{E}, \quad (\mu = 1) \end{aligned} \quad (2.1)$$

where  $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$  is a dielectric tensor and  $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$  is the second-rank pseudo tensor, whose real part  $\gamma_1 = \text{Re } \gamma$  determines the specific rotation of the plane of polarization and the imaginary part  $\gamma_2 = \text{Im } \gamma$  responsible for natural circular dichroism.

Assuming that the vectors  $\mathbf{E}$  and  $\mathbf{B}$  are proportional to relation  $\exp[i(k_z z + m\varphi - \omega t)]$  (2.1) and using Maxwell equations

$$\text{rot} \vec{E} = ik_0 \vec{B}, \quad \text{rot} \vec{B} = -ik_0 \vec{D}, \quad (2.2)$$

where  $k_0 = \omega/c$  - is the wavenumber, we can write a system of equations for the component of the vectors  $\mathbf{E}$  and  $\mathbf{B}$  in the chosen cylindrical coordinate system:

$$\begin{aligned} \frac{im}{\rho} E_z - ik_z E_\varphi &= ik_0 B_\rho, & \frac{im}{\rho} B_z - ik_z B_\varphi &= -ik_0 (\varepsilon E_\rho + i\gamma B_\rho), \\ ik_z E_\rho - \frac{\partial}{\partial \rho} E_z &= ik_0 B_\varphi, & ik_z B_\rho - \frac{\partial}{\partial \rho} B_z &= -ik_0 (\varepsilon E_\varphi + i\gamma B_\varphi), \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\frac{1}{\rho} E_\varphi + \frac{\partial}{\partial \rho} E_\varphi - \frac{im}{\rho} E_\rho = ik_0 B_z, \quad \frac{1}{\rho} B_\varphi - \frac{\partial}{\partial \rho} B_\varphi - \frac{im}{\rho} B_\rho = -ik_0 (\varepsilon E_z + i\gamma B_z),$$

where  $\rho, \varphi$  are cylindrical coordinates,  $k_z = k_0 \sqrt{\varepsilon} \cos \alpha = k'_z + ik''_z$  and  $\alpha$  is the conicity parameter of the Bessel light beam, which is equal to a half of the angle at the apex of the cone formed by the wave vectors that

determine the spatial frequency spectrum of the beam. The longitudinal components  $E_z$  and  $B_z$ , which satisfy the Helmholtz equation, can be written as follows:

$$\begin{aligned} E_z &= c_z J_m(q\rho) \exp[i(k_z z + m\varphi)], \\ B_z &= b_z J_m(q\rho) \exp[i(k_z z + m\varphi)], \end{aligned} \quad (2.4)$$

where  $J_m(q\rho)$  is the  $m$ th order Bessel function of the first kind,  $b_z = \mp i q n_{\pm}$ ,  $c_z = q$ ,  $n_{\pm} = \sqrt{\varepsilon} \pm \gamma$  is the complex refractive index of eigenwaves in the medium, and  $q = k_0 \sqrt{\varepsilon} \sin \alpha$ . Assuming that  $E_z$  and  $B_z$  are specified, we express the other field components in terms of these values and, based on the relations

$$Q^{TE} = -\frac{\partial S_z^{TE}}{\partial z}, \quad (2.5)$$

$$S_z^{TE} = \frac{c}{8\pi} (E_{\rho}^{TE} B_{\varphi}^{TE*} - E_{\varphi}^{TE} B_{\rho}^{TE*}) + \text{K.C.}, \quad (2.6)$$

determine the energy dissipation of the TE- mode of Bessel light beam:

$$Q^{TE} = \frac{\omega |\varepsilon| \varepsilon_2}{2\pi} \left[ \left( \frac{m}{q\rho} \right)^2 J_m^2(q\rho) + J_m'^2(q\rho) + \frac{2mk_0 k_z \gamma_1}{q^3 \rho} J_m(q\rho) J_m'(q\rho) \right] e^{-2k_z \cdot z} = \tilde{Q}^{TE} \exp(-2k_z \cdot z), \quad (2.7)$$

where  $J_m'(q\rho) = \frac{\partial J_m(q\rho)}{\partial \rho}$ .

The heat-source power density for the TH mode is determined similarly; however, it is rather cumbersome and omitted for this reason.

The distribution of the temperature fields in the sample under study can be found by solving the inhomogeneous heat-conduction equation

$$\nabla^2 T - \frac{1}{\beta_s} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{2k_s} \tilde{Q}^{TE} e^{i\Omega t} e^{-2k_z \cdot z}, \quad (2.8)$$

the right-hand side of which includes energy dissipation for the TE mode of Bessel light beam ( $Q$  is modulation frequency).

Furthermore, we take into account the dependence of the thermoelastic coupling coefficient on the initial strain for the mechanically strained crystal. Based on the results of [15, 10], where the expression for the strains with allowance for nonlinear displacements was reported, we can write the following equation for elastic displacements (1.7).

Having jointly solved Eqs. (2.8) and (1.7), one can easily obtain the expression for the displacement of particles in the sample under study caused by strains induced by laser radiation modulated at the frequency  $\Omega$ :

$$\Delta U_3^{TE}(z) = A_1 e^{-iQz} + A_2 e^{iQz} + \bar{E}^{TE} \left( \frac{e^{-\beta z}}{\beta^2 + k^2} \right) - \left( \frac{e^{-\sigma_s z}}{\sigma_s^2 + k^2} \right), \quad (2.9)$$

following designations:  $\bar{E}^{TE} = \frac{g^{(3)}\beta E^{TE}}{G_3^{(3)}}$ ,  $Q = \sqrt{\frac{\rho_0\Omega^2}{G_3^{(3)}}}$ ,  $E^{TE} = \frac{\tilde{Q}^{TE}}{2k_s(\beta^2 - \sigma_s^2)}$ ,  
 $\beta = \frac{4\pi}{\lambda} \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{\varepsilon_1}}$  – light absorption coefficient,  $k = \frac{\Omega}{V_s}$  – is the wavenumber of the  
sound wave in the sample,  $V_s$  is the speed of sound in the crystal,  
 $\sigma = (1+i)a$ ,  $a = \sqrt{\frac{\Omega}{2\beta_s}}$  – is the thermal diffusivity.

Basing on the technique for determining the open-circuit voltage across the piezoelectric transducer [12] for a sample with free boundaries, we obtain the expression for the photoacoustic signal formed in an elastically strained gyrotropic sample

$$V = h \cdot R \cdot W, \quad (2.10)$$

where the factor

$$R = \frac{\sin^2 k_1 \ell_1 + 1}{(Qc^T \sin k_1 \ell_1 + k_1 c^D \text{ctg} Q\ell \cos k_1 \ell_1)(\sin k_1 \ell_1 + 1)}, \quad (2.11)$$

describes the purely acoustic properties of the crystalline sample–piezoelectric transducer system and the factor

$$W = \left[ c^T Q \Psi_2 + \text{ctg} Q\ell \Psi_3 + (i \cos kQ\ell + \sin Q\ell) \left( \text{ctg} Q \frac{k_1 c^D}{Qc^T} - 1 \right) (c^T \Psi_1 + \varphi) \right], \quad (2.12)$$

is responsible for the thermophysical, gyrotropic, dichroic, and thermoelastic properties of the inhomogeneous sample with internal stress. In (2.10–2.12),

$$\Psi_1 = \bar{E}^{TE} \left( \frac{\sigma_s}{\sigma_s^2 + Q^2} - \frac{\beta}{\beta^2 + Q^2} \right), \quad \Psi_2 = \bar{E}^{TE} \left( \frac{e^{-\beta\ell}}{\beta^2 + Q^2} - \frac{\beta}{\sigma_s^2 + Q_2} \right),$$

$$\Psi_3 = \bar{E}^{TE} \left( \frac{\sigma_s e^{-\sigma_s \ell}}{\sigma_s^2 + Q^2} - \frac{\beta e^{-\sigma_s \ell}}{\beta^2 + Q_2} \right) - B\alpha_t E^{TE} \left( \frac{\beta}{\sigma_s} e^{-\sigma_s \ell} - e^{-\beta\ell} \right), \quad \varphi_1 = B\alpha_t E^{TE} \frac{\beta - \sigma_s}{\sigma_s},$$

$h = e/\varepsilon^s$ ,  $e$  – is the piezoelectric modulus,  $\varepsilon^s$  – is the permittivity of clamped crystal,  $c^D = c^E(1 + e^2)/(\varepsilon^s c^E)$ ,  $c^E$  – is the piezoelectric stiffness;  $c^T = \lambda + 2\mu$ ,  $\lambda$  – is the Lamé coefficient;  $B$  – is the bulk elasticity modulus;  $\alpha_t$  – is the coefficient of thermal volume expansion,  $k_1 = \frac{\Omega}{V_p}$  – is the

wave number of the sound wave in the piezoelectric transducer is the wave-number of the sound wave in the piezoelectric transducer, and  $V_p$  – is the speed of sound in the piezoelectric crystal.

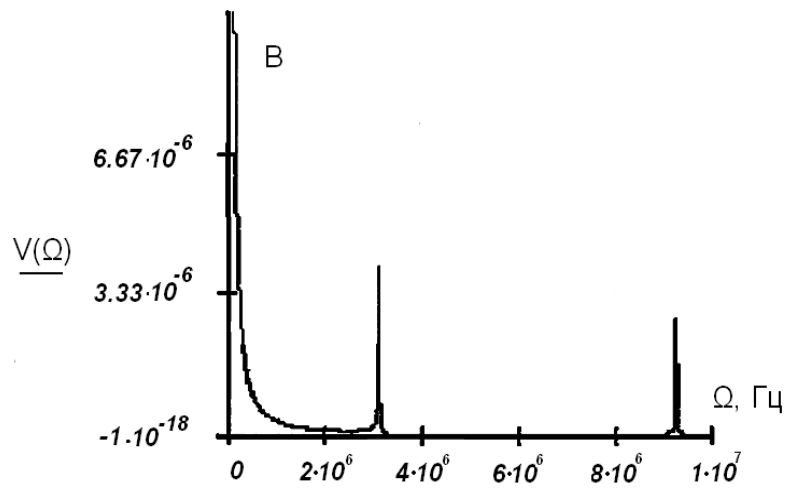


Figure 5 – Dependence of the photoacoustic signal amplitude on the modulation frequency  $\Omega$

It follows from relations (2.10 – 2.12) that the amplitude signal from the piezoelectric cell depends in a complicated way on the dissipative, gyro-tropic, and thermophysical properties of the sample; the thermoelastic strains; the geometric parameters of the sample–piezoelectric transducer system; the modulation frequency; and the mode composition of the incident Bessel light beam.

The expressions for the potential differences arising in the piezoelectric transducer under other boundary conditions (clamped  $U(o) = \mathbf{0}, U(l + l_1) = \mathbf{0}$  and transversely loaded  $\sigma(o) = \mathbf{0}, U(l + l_2) = \mathbf{0}, \sigma(l + l_2) = \mathbf{0}, U(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ) boundaries of the crystalline sample–piezoelectric transducer system) are given in the Appendix.

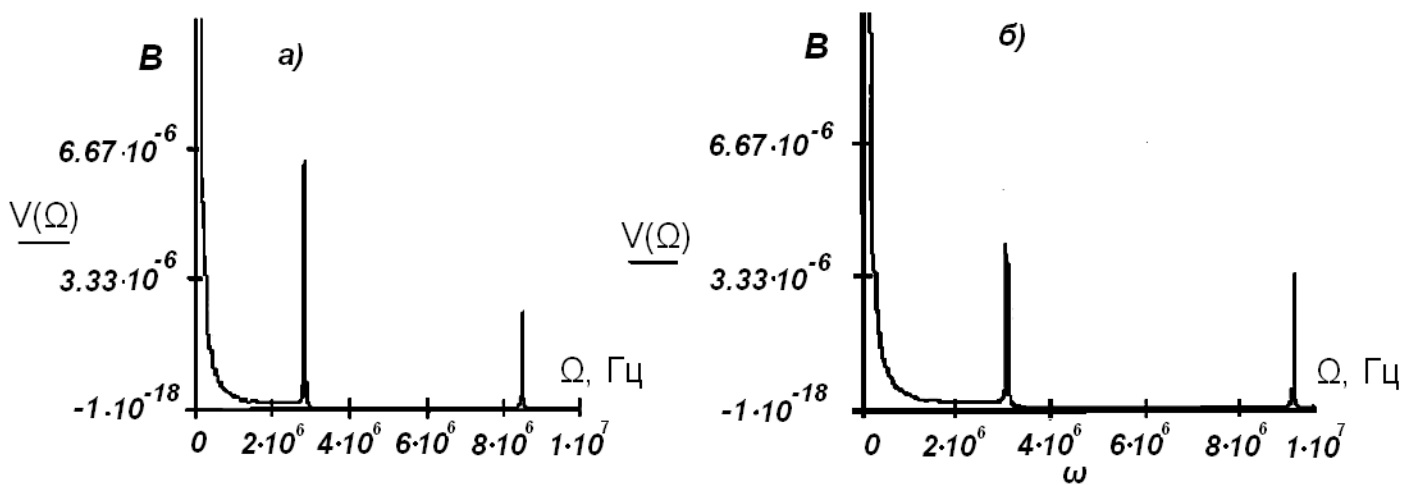


Figure 6 – Dependences of the photoacoustic signal amplitude on the modulation frequency  $\Omega$  at different geometric parameters of the sample–

piezoelectric transducer system:

$$\text{a) } \ell = 5,5 \cdot 10^{-3} \text{ m, } \ell = \text{const} \quad \text{b) } \ell_1 = 5,5 \cdot 10^{-4} \text{ m, } \ell = \text{const}$$

It is of interest to analyze the expressions (2.10–2.12) for the photoacoustic signal amplitude depending on the modulation frequency  $\Omega$ .

As follows from Figure 5, in the range of high modulation frequencies ( $\Omega > 1$  MHz), the dependence of the photoacoustic response amplitude on the radial coordinate  $\rho$  exhibits resonant phenomena, which can be used to increase the resolution of photoacoustic spectroscopy for media with internal stresses.

From the acoustical point of view, the nature of the resonant phenomena is as follows. The system under consideration (crystalline sample–piezoelectric transducer) is a combined vibrator. Its resonant properties are determined by the  $R$  poles, which are roots of Eq. (12):

$$Qc^T \sin k_1 \ell_1 = -k_1 c^D \text{ctg} Q\ell \cos k_1 \ell_1.$$

Therefore, depending on the relations between the geometric parameters of the sample and piezoelectric transducer and on the Murnagan constants, which enter  $Q$  and determine the thermoelastic strain in the crystal, resonances of different types (half-wave, quarter-wave, and of a mixed type) may occur.

It can be seen in Figure 6 that a change in the thickness of the sample or piezoelectric transducer leads to an increase in the amplitude signal and a shift in the resonance curves in the frequency range under consideration.

The expressions for amplitudes of photoacoustic signals in strained crystalline samples were obtained under different boundary conditions, taking into account the dependence of the thermoelastic coupling coefficient on the initial strain in the sample. In the range of high modulation frequencies, a resonant increase in the amplitude signal was revealed; this increment depends strongly on the geometric parameters of the sample–piezoelectric transducer system, the values of Murnagan constants, the mode composition of the Bessel light beam, and its amplitude modulation frequency.

Note that the experimental measurement of the photoacoustic response amplitude suggests a method for determining the thermoelastic coupling coefficient in crystalline media with internal stress based on the obtained expressions (1.12), (2.10)–(2.12).

This study was supported by the Belarussian Republican Foundation for Basic Research (project no. F10 R243).

## References

1. Rosencwaig, A. Photoacoustics and Photoacoustic Spectroscopy / A. Rosencwaig. – 1980. – 309 p.

2. Gusev, V.E. Laser Optoacoustics / V.E. Gusev, A.A. Karabutov // M.: Science, 1991. – 304 p.
3. Mityurich, G.S. Modern photoacoustic spectroscopy problems. Theory and experiment / G.S. Mityurich, J. Motylewski, J. Ranachowski // IFTR reports, Polish Academy Science, Warszawa. – № 41. – 1993. – 164 p.
4. Fedorov, F.I. Theory of Gyrotropy / F.I. Fedorov // Nauka i Tekhnika. Minsk, 1976.
5. Optical Properties of Crystals / A.F. Konstantinova, B.N. Grechushnikov, B.V. Bokut', and E.G. Valyashko // Nauka i Tekhnika. Minsk, 1995.
6. Fedorov, F.I. Optics of Anisotropic Media / F.I. Fedorov // Izd-vo Akad. Nauk BSSR. Minsk, 1958.
7. Bokut', B.V. Determination of optical parameters for absorbing gyrotropic crystals by photoacoustic method / B.V. Bokut' and G.S. Mityurich // Kristallografiya. – 1987. – Vol. 32. – № 4. – P. 962–966.
8. Photoacoustic spectroscopy of cholesteric liquid crystals. Bragg reflection region / G.S. Mityurich, V.P. Zelenyi, I.V. Semchenko, and A.N. Serdyukov // Opt. Spektrosk. – 1992. – Vol. 72. – № 2. – P. 428–433.
9. Mityurich, G.S. Photoacoustic spectroscopy of shotperiodic gyrotropic superlattices / G.S. Mityurich and E.G. Starodubtsev // Kristallografiya. – 1994. – Vol. 39. – № 6 – P. 1068–1072.
10. Muratikov, K. L. Theory of generation of mechanical vibration by laser radiation in solid body with internal stresses on the basis of thermoelastic effect / K.L. Muratikov// Journal Technical Physics. – 1999. – Vol. 69. – № 7. – P. 59–63.
11. Alekseyuk, M. Investigation of resonance photoacoustic phenomenon in solid media with internal stresses / M. Alekseyuk, A.N. Emelyanovich, G.S. Mityurich // Ceramics. – 2001. – Vol. 61. – P. 85–91.
12. Gulyaev, Y.V. Photoacoustic spectroscopy of optical nontransparent objects with piezoelectric detection // Y.V. Gulyaev, A.I. Morozov, V.Y. Raevsky // Acoustic Journal. – 1985. – Vol. 31. – № 4. – P. 496–473.
13. Alekseyuk, M. Resonance photoacoustic transformation in layered media in the process excitation of sound by Bessel light beams / M. Alekseyuk, A.N. Emelyanovich, G.S. Mityurich // Ceramics. – Vol.79. – 2003. – P. 30–36.
14. Bokut', B.V. To phenomenological theory of natural optical activity / V.V. Bokut' and A.N. Serdyukov // JETP. – 1971. – Vol. 61. – № 5. – P. 1803–1813.



**ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОЛЯРИЗАЦИИ  
БЕССЕЛЕВЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ  
ПРИ КВАЗИКОЛЛИНЕАРНОЙ АКУСТООПТИЧЕСКОЙ  
ДИФРАКЦИИ В АНИЗОТРОПНЫХ КРИСТАЛЛАХ**

Одним из направлений исследований в оптике бесселевых световых пучков является разработка методов управления их параметрами и, в частности, формирование азимутально- и радиально-поляризованных бесселевых пучков [1–6] и взаимное преобразование их поляризаций в анизотропных кристаллах. Азимутально- и радиально-поляризованные пучки имеют преимущество перед линейно- или циркулярно-поляризованными бесселевыми пучками, т. к. позволяет получать при фокусировке более высокую концентрацию светового поля в приосевой области, что перспективно для использования в фотолинтографии, конфокальной микроскопии, устройствах записи-считывания информации, поляризационно-чувствительной когерентной томографии [7].

В настоящей работе предложен новый метод формирования азимутально- и радиально-поляризованных векторных бесселевых световых пучков на основе акустооптической дифракции в прямом направлении в анизотропных кристаллах.

Рассмотрим вариант АО взаимодействия, когда циркулярно-поляризованный БСП падает из изотропной среды с показателем преломления  $n_1$  на одноосный кристалл в направлении оптической оси  $c$  ( $c \parallel z$ ). Из граничных условий следует, что в кристалле будут возбуждаться два БСП, конусы волновых векторов которых являются круговыми.

Поперечная составляющая вектора напряженности электрического поля определяется соотношением [8]:

$$\vec{E}_\perp(R) = t_o \vec{E}_{o\perp}(\rho) \exp[ik_{oz}z + im\varphi] + t_e \vec{E}_{e\perp}(\rho) \exp[ik_{ez}z + im\varphi],$$

где

$$\vec{E}_{o\perp}(\rho) = i \vec{e}_\rho \frac{m}{q\rho} J_m(q\rho) - \vec{e}_\phi J'_m(q\rho),$$

(1)

$$\vec{E}_{e\perp}(\rho) = -i \vec{e}_\rho \cos(\gamma_e) J'_m(q\rho) - \cos(\gamma_e) \vec{e}_\phi \frac{m}{q\rho} J_m(q\rho),$$

$t_{o,e}$  – амплитудные коэффициенты преломления,  $R(\rho, \phi, z)$  – цилиндрические координаты,  $m$  – целое число,  $k_{oz} = k_0 n_0 \cos(\gamma)$ ,  $n_0^2 = \varepsilon_o$ ,  $k_{ez} = k_0 n_e(\gamma_e) \cos(\gamma)$ ,  $J_m(q\rho)$  – функция Бесселя  $m$ -го порядка,  $\bar{e}_\rho, \phi$  – орты цилиндрической системы координат,  $q_1 = k_1 \sin(\gamma_1)$  – поперечная компонента волновых векторов бесселева светового пучка,  $k_0 = 2\pi/\lambda$ ,  $\gamma_{o,e}$  – углы конусности двух преломленных БСП,  $\varepsilon_o$  и  $\varepsilon_e$  – главные значения тензора диэлектрической проницаемости.

Численная оценка коэффициентов  $t_{o,e}$  показывает, что для углов конусности падающего пучка  $\gamma \leq 20^\circ$  отличие отношения  $t_o/t_e$  от единицы не превосходит 0,5 %.

В данной статье рассмотрим случай попутного АО-взаимодействия вида  $e \rightarrow o$ . В таком процессе АО взаимодействие определяется компонентами тензора  $\Delta\varepsilon_{11} = -\varepsilon_o^2 p_{13}$  и  $\Delta\varepsilon_{22} = -\varepsilon_o^2 p_{23}$ , где  $p_{13}$ ,  $p_{23}$  – компоненты тензора фотоупругих постоянных. Учитывая, что в кристаллах средних сингоний  $p_{13} = p_{23}$  и, следовательно, в данных кристаллах эффективность дифракции  $x$  и  $y$  компонент электрического поля одинакова и не происходит изменение азимутального индекса дифрагированной волны в сравнении с падающей.

Для аналитического решения уравнений акустооптической дифракции перейдем к приближению, вводя медленно меняющиеся амплитуды и стандартным образом получим систему связанных уравнений для амплитуд дифрагированных  $A_s^{x,y}$  и проходящего  $A_t^{x,y}$  пучков

$$\frac{d}{dz} A_s^{x,y} = -\beta_1 A_t^{x,y} g_s \exp(i\Delta k_{zs} z), \quad (2)$$

$$\frac{d}{dz} A_t^{x,y} = \beta_2 \sum_{s=1}^S A_s^{x,y} g_s \exp(-i\Delta k_{zs} z),$$

где  $\beta_{1,2} = \frac{\omega^2}{4c^2} \frac{\varepsilon_o^2 p_{13} u_o K}{k_{ez}, k_{osz}}$  – коэффициенты АО связи,  $\Delta k_{s,z} = k_{e,z} + K - k_{o,s,z}$

– волновая расстройка.

$$g(q_s) = \frac{2\pi}{\sqrt{w(q_1)w(q_s)}} \int_0^{R_0} [J_{m-1}(q\rho)J_{m-1}(q_s\rho) + J_{m+1}(q\rho)J_{m+1}(q_s\rho)] \rho d\rho \quad (3)$$

интегралы перекрытия взаимодействующих полей, зависящие от поперечного волнового числа  $q_s$ .

Особенностью уравнений (2) в сравнении с случаем плоских волн является зависимость эффективности дифракции от поперечного волнового числа  $q_s$ . При реальных значениях радиуса пучка и угла конуса, максимум интеграла перекрытия при  $q_s/q_1=1$  является достаточно

узким. Его полуширина по половинному уровню равна  $0,011q_1$ . Это означает, что такой же приблизительно будет и полуширина пространственного спектра дифрагированного пучка. Поэтому представление рассеянного света, как состоящего из одного парциального бесселева пучка с поперечным волновым числом  $q_s = q_1$  является хорошим приближением. В то же время, при уменьшении радиуса падающего БСП интеграл перекрытия расширяется и указанное выше приближение становится неприменимым

Таким образом, в рассматриваемом здесь простейшем случае примем во внимание лишь один канал акустооптического взаимодействия, соответствующий максимуму интеграла перекрытия, или так называемому поперечному синхронизму. Тогда в правой части уравнений (2) можно сохранить только одно слагаемое, что позволяет точно решить систему связанных уравнений при любой эффективности акустооптической дифракции. Пользуясь уравнениями Максвелла, легко рассчитать и остальные компоненты векторов напряженности поля дифрагированной волны. Это позволяет найти, в частности, z-компоненту плотности потока энергии бесселевых пучков о- и е-типа.

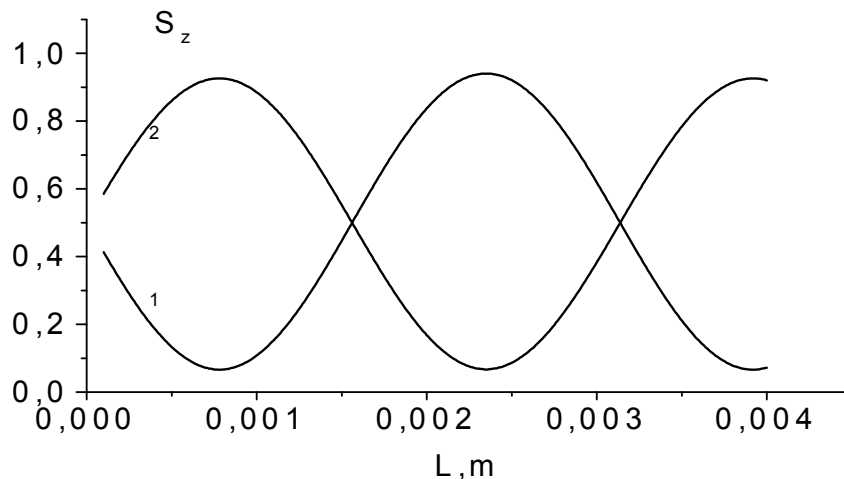


Рисунок 1 – Зависимость z-компоненты плотности потока энергии бесселевых пучков (1) о- и (2) е-типа от длины акустооптического взаимодействия в кристалле  $\text{LiNbO}_3$  ( $I_{\text{ак}} = 0,1 \text{ Вт/мм}^2$ ,  $\Delta k_{s,z} = 10^3 \text{ м}^{-1}$ )

Доля энергии, которой могут обменяться бесселевы пучки о- и е-типа при акустооптическом взаимодействии, определяется следующим соотношением

$$t = \frac{b^2}{b^2 + (\Delta k_{sz}/2)^2} \sin^2 \sqrt{b^2 + (\Delta k_{sz}/2)^2} z. \quad (4)$$

Максимальная доля энергии, которой могут обменяться бесселевы пучки о- и е-типа, составляет величину  $b^2 / (b^2 + (\Delta k_{sz}/2)^2)$ , причем при  $\Delta k_{sz}$  значительно превышающем  $b$ , она становится небольшой. Передача всей энергии возможна, если выполняется условие фазового синхронизма, которое достигается подбором соответствующей частоты ультразвуковой волны.

Таким образом, рассмотренная в работе схема акустооптического взаимодействия позволяет получить азимутально- (радиально-) поляризованные бесселевы световые пучки с возможностью переключения состояния поляризации изменением интенсивности ультразвуковой волны. На основе предложенной схемы возможно создание коллинеарного поляризационного фильтра, позволяющего реализовать разделение азимутально- и радиально-поляризованных пучков с переключением состояния поляризации на выходе фильтра, что в настоящее время является актуальной задачей в области поляризационно-чувствительной томографии и профилометрии.

### Литература

1. Tidwell, S.C. Generating radially polarized beams interferometrically / S.C. Tidwell, D.H. Ford, W.D. Kimura // Appl. Opt. – 1990. – Vol. 29. – P. 2234–2239.
2. Wynne, J.J. Generation of the rotationally symmetric TE<sub>01</sub> and TM<sub>01</sub> modes from a wavelength-tunable laser / J.J. Wynne // IEEE J. Quant. Elec. – 1974. – Vol. 125. – P. 125–127.
3. Marhic, M.E. Low-order TE<sub>0q</sub> operation of a CO<sub>2</sub> laser for transmission through circular metallic waveguides / M.E. Marhic, E. Garmire // Appl. Phys. Lett. – 1981. – Vol. 38. – P. 743–748.
4. Armstrong, D.J. Generation of radially polarized beams with an image-rotating resonator / D.J. Armstrong, M.C. Phillips, A.V. Smith // Appl. Opt. – 2003. – Vol. 42. – P. 3550–3554.
5. Nesterov, A.V. Generation of high-power radially polarized beam / A.V. Nesterov, V.G. Niziev, V.P. Yakunin // J. Phys. D: Appl. Phys. – 1999. – Vol. 32. – P. 2871–2875.
6. Казак, Н.С. Формирование азимутально и радиально поляризованных световых пучков в слоисто-периодических средах / Н.С. Казак, В.Н. Белый, С.Н. Курилкина // Ковариантные методы в физике. Оптика и акустика. – 2005. – С. 6–14.
7. de Boer, J.F. Determination of the depth-resolved Stokes parameters of light backscattered from turbid media by use of polarization-sensitive optical coherence tomography / J.F. de Boer, T.E. Milner, J.S. Nelson // Opt.

Lett. – 1999. – Vol. 24. – P. 300–302.

8. Белый, В.Н. Преобразование частоты бесселевых световых пучков нелинейными кристаллами / В.Н. Белый, Н.С. Казак, Н.А. Хило // Квантовая электроника. – 2000. – Т. 30. – С. 753–759.

**Секция 3 «Теория фундаментальных взаимодействий»**  
(электрослабые свойства микрочастиц, электродинамические и адронные процессы взаимодействия, гравитация)

Председатель:  
Максименко Николай Васильевич, профессор

**Василий Викторович Андреев<sup>1</sup>, Виктор Васильевич Андреев<sup>1</sup>,  
А.А. Панков<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Беларусь,

<sup>2</sup>Филиал Международного центра теоретической физики  
имени Абдуса Салама при УО «Гомельский государственный техниче-  
ский университет имени П.О. Сухого», Беларусь

**ЭФФЕКТЫ  $Z'$ - БОЗОНА НА КОЛЛАЙДЕРЕ CLIC  
С ПОПЕРЕЧНО ПОЛЯРИЗОВАННЫМИ ПУЧКАМИ**

**Введение**

Стандартная модель (СМ) не может претендовать на роль всеобъемлющей теории по ряду причин. Поэтому вполне естественно предположить, что существует более фундаментальная теория, низкоэнергетический предел которой совпадает с СМ. К числу подобных теоретических построений относятся модели с расширенным калибровочным сектором такие, например, как  $E_6$ , LR, ALR и другие [1–4]. Все они предсказывают существование дополнительного  $Z'$ -бозона. Их исследование представляет значительный интерес с точки зрения изучения эффектов за рамками СМ или так называемой “новой физики”.

Процесс аннигиляционного рождения пар  $W^\pm$ -бозонов

$$e^+ + e^- \rightarrow W^+ + W^- (\rightarrow 2l\bar{\nu}; \rightarrow l\bar{\nu} + 2j; \rightarrow 4j) \quad (1)$$

является чувствительным к параметрам  $Z'$ -бозона, а именно, к фермионным и бозонным константам связи, к углу  $Z-Z'$  смешивания  $\varphi$  и массе  $M_{Z'}$  [5–13].

Основной целью данной работы является исследование эффектов  $Z'$ -бозонов на коллайдере будущего поколения CLIC на основе данных по прогнозируемым параметрам данного ускорителя (светимость, энергия в системе центра масс, степень поляризации начальных пучков).

Следует особо отметить, что для получения наблюдаемых исследуемого процесса в работе были использованы аналитические вычисления матричных элементов. В развитие этого направления большой вклад внесла белорусская школа под руководством академика Федора Ивановича Федорова. Метод Богуша–Федорова [14–18] получил дальнейшее развитие и показал свою дееспособность при расчетах процессов взаимодействия элементарных частиц (см. [19–21] и др.).

### 1. Модели с расширенным калибровочным сектором

Наиболее популярные модели, предсказывающие существование  $Z'$ -бозонов, можно условно разделить на две группы. К первой из них относятся теории, в основе которых лежат расширенные, в сравнении со СМ, калибровочные группы и характеризующиеся элементарной структурой хиггсовского сектора. Это, например, левоправосимметричные модели (LR), альтернативные левоправосимметричные модели (ALR),  $E_6$ -модели и т. д. Ко второй группе можно отнести так называемые альтернативные модели, нарушение электрослабой симметрии в которых происходит за счет механизма, отличающегося от хиггсовского. Это например, модели техницвета, составных  $W$  и  $Z$ -бозонов, модели с нарушенной электрослабой симметрией за счет сильновзаимодействующего сектора (BESS-модель) и т. п. В статье анализируются феноменологические следствия наиболее популярных моделей, принадлежащих лишь к первой группе [1–4]. В первую очередь это  $E_6$ , LR и SSM модели.

### 2. Наблюдаемые процесса $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$

Матричный элемент процесса (1) для расширенных калибровочных моделей можно представить как сумму частей:

$$M = M(\nu) + M(\gamma) + M(Z_1) + M(Z_2). \quad (2)$$

Выражение (2) перепишем в виде

$$M = M_{SM} + \Delta M = M(\nu) + M(\gamma) + M(Z) + \Delta M, \quad \Delta M = M(Z_1) + M(Z_2) - M(Z), \quad (3)$$

разделяя части, связанные с вкладом СМ и эффектами  $Z'$ -бозона.

В данной статье будут приведены выражения матричных элементов с учетом дополнительного  $Z'$ -бозона. Для получения компактных выражений с произвольными значениями спиральностей фермионов (в безмассовом случае) и  $W$ -бозонов использовался метод базисных спиноров [21].

Для диаграмм с обменом нейтрино в системе центра инерции получаем:

$$M_{0,0}^{\lambda,\lambda'}(\nu) = 2 \delta_{\lambda',-\lambda} \delta_{\lambda,-1} n_s \left( \frac{t_W(\theta)}{\gamma_W^2} - \gamma_W^2 \right) \sin \theta,$$

$$M_{\tau,\tau'}^{\lambda,\lambda'}(\nu) = \delta_{\lambda',-\lambda} \delta_{\lambda,-1} n_s \left[ 1 - t_W(\theta) (1 + \tau \beta_W) (1 - \tau' \beta_W) \right] \sin \theta,$$

$$M_{0,\tau}^{\lambda,\lambda'}(v) = -M_{-\tau,0}^{\lambda,\lambda'}(v) = \delta_{\lambda',-\lambda} \delta_{\lambda,-1} n_s \sqrt{2} \gamma_W \tau (1 + \tau \cos \theta) \left[ 1 - \frac{(1 - \tau \beta_W) t_W(\theta)}{\gamma_W^2} \right]. \quad (4)$$

Здесь  $\lambda, \lambda'$  – спиральности электрона и позитрона соответственно,  $\tau(\tau') = \pm 1(T)$ ,  $0(L)$  – спиновые состояния  $W^-$  ( $W^+$ )-бозонов,  $t_W(\theta) = (1 + \beta_W^2 - 2\beta_W \cos \theta)^{-1}$ ,  $\beta_W = \sqrt{1 - 1/\gamma_W^2}$ ,  $\gamma_W = \sqrt{s}/(2M_W)$ ,  $n_s = (2\pi\alpha)/(\beta_W s_W^2)$ ,  $M_W$  – масса  $W$ -бозона,  $\theta$  – угол рассеяния (между  $W^-$ -бозоном и электроном) в системе центра масс.

Для диаграмм с обменом  $\gamma$ -квантом и  $Z$ -бозоном имеем:

$$M_{\tau,\tau'}^{\lambda,\lambda'}(\gamma) + M_{\tau,\tau'}^{\lambda,\lambda'}(Z) = 4\pi\alpha\lambda\beta_W\delta_{\lambda,-\lambda'} \left( g_{WW\gamma} A_{\tau,\tau'}^{\lambda,\lambda'}(\gamma) - g_{WWZ} \frac{g_{-\lambda}\chi}{2s_W c_W} A_{\tau,\tau'}^{\lambda,\lambda'}(Z) \right), \quad (5)$$

где  $\chi = s/(s - M_Z^2)$ ,  $g_{-\lambda} = v - \lambda a$ ,  $g_{WW\gamma}$  – трехбозонная константа  $\gamma$ -кванта.

Рассмотрим часть матричного элемента  $\Delta M$  из формулы (3).

$$\begin{aligned} \Delta M_{\tau,\tau'}^{\lambda,\lambda'} &= \frac{4\pi\alpha \lambda \delta_{\lambda,-\lambda'} \beta_W}{2s_W c_W} A_{\tau,\tau'}^{\lambda,\lambda'}(Z) g_{WWZ} g_{-\lambda} \chi \times \left[ 1 - \cos \varphi \frac{g_{-\lambda,1} \chi_1}{g_{-\lambda} \chi} + \sin \varphi \frac{g_2}{g_1} \frac{g_{-\lambda,2} \chi_2}{g_{-\lambda} \chi} \right] = \\ &= \frac{4\pi\alpha \lambda \delta_{\lambda,-\lambda'} \beta_W}{2s_W c_W} A_{\tau,\tau'}^{\lambda,\lambda'}(Z) g_{WWZ} g_{-\lambda} \chi \times \xi_{-\lambda}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{где} \quad \xi_{-\lambda} = 1 - \cos \varphi \frac{g_{-\lambda,1} \chi_1}{g_{-\lambda} \chi} + \sin \varphi \frac{g_2}{g_1} \frac{g_{-\lambda,2} \chi_2}{g_{-\lambda} \chi}.$$

(7)

Структуры  $\chi_1$ ,  $\chi_2$  и  $g_{\lambda,1}$ ,  $g_{\lambda,2}$  имеют следующий вид:

$$\chi_{1,2} = s/(s - M_{Z_{1,2}}^2), \quad g_{\lambda,1} = v_1 + \lambda a_1, \quad g_{\lambda,2} = v_2 + \lambda a_2.$$

В качестве наблюдаемых в данной работе будем использовать дифференциальные сечения процесса (1).

$$\frac{d\sigma^{unpol}}{dz} = \frac{1}{4} \left[ \frac{d\sigma^+}{dz} + \frac{d\sigma^-}{dz} \right] \quad (8)$$

азимутальную асимметрию  $A_T$ , определяемая как ( $P_T$  – степень поперечной поляризации пучка)

$$\frac{d(\sigma A_T)}{dz} = 2 \int_0^{2\pi} \frac{d^2\sigma}{dz d\varphi_W} \cos(2\varphi_W) d\varphi_W = P_T P_T' \frac{\beta_W}{64\pi s} \text{Re}(M^+ M^{*-}). \quad (9)$$

### 3. Численные результаты и выводы

Подробное описание метода получения ограничений на исследуемые параметры в данной статье приводиться не будет. Отметим лишь, что данная методика основана на использовании функции  $\chi^2$ .

Процедура получения ограничений была выполнена с использованием системы аналитических и численных вычислений «*Mathematica 7.0*». При этом использовались следующие прогнозируемые параметры установки CLIC:



$$L_{int} = 1860 \text{ fb}^{-1}, \quad \sqrt{s} = 3000 \text{ ГэВ}, \quad \varepsilon = 0,3, \quad P_L = P_T = 80\%, \quad P'_L = P'_T = 60\%.$$

На рисунке 1 представлены области ограничений на обобщенные параметры  $\xi_{+1}, \xi_{-1}$  с уровнем достоверности  $C.L.=95\%$  для различных случаев поляризации начальных и конечных пучков. Так на рисунке 1 представлены совместные ограничения для случая неполяризованных  $W$ -бозонов (большой эллипс) и продольно поляризованных  $W$ -бозонов (меньший эллипс) при степени поляризации электронов равной  $P_T = 80\%$ , а позитронов –  $P'_T = 60\%$ , а также неполяризованных начальных пучков.

С полученных значений  $\xi^{\pm} \sim 2 \times 10^{-4}$ , используя (7) можно получить ограничения на угол смешивания  $\varphi$  и массу  $Z'$ -бозона  $M_{Z_2}$  в различных моделях. Численные расчеты показывают высокую степень чувствительности предлагаемых эффективных параметров  $\xi_{+1}, \xi_{-1}$  к эффектам  $Z'$ -бозона в экспериментах с поперечно поляризованных пучками электронов и позитронов.

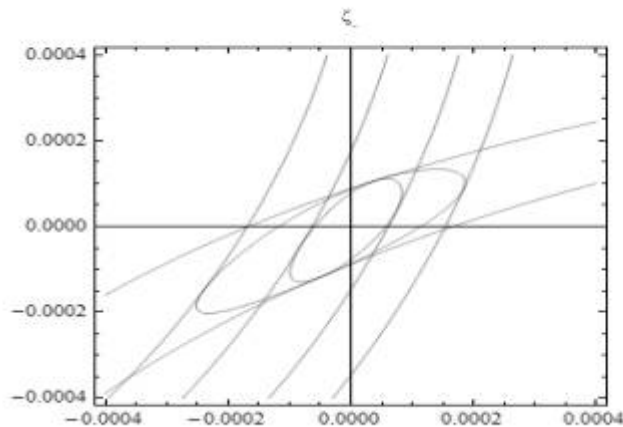


Рисунок 1 – Разрешенные области для параметров  $\xi_{+1}$  и  $\xi_{-1}$  в случае неполяризованных  $W$ -бозонов и поперечно поляризованных начальных пучков с  $P_T = 80\%$ ,  $P'_T = 60\%$ .

### Литература

1. Hewett, J.L. / J.L. Hewett and T.G. Rizzo // Phys. Rept. – 1989. – Vol. 183. – P. 193.
2. Leike, A. / A. Leike // Phys. Rept. – 1999. – Vol. 317. – P. 143.
3. Rizzo, T.G. Colliders and neutrinos / T.G. Rizzo // Boulder 2006. – 537 p.
4. Langacker, P. / P. Langacker // Rev. Mod. Phys. – 2009. – Vol. 81. – P. 1199.
5. Pankov, A.A. / A.A.Pankov, N.Paver // Phys. Lett. – 1991. –

Vol. B272. – P. 425.

6. Babich, A.A. / A.A. Babich, A.A. Pankov // Sov.Phys.Jour. – 1991. – Vol. 34. – P. 365.

7. Pankov, A.A. / A.A. Pankov, R. Raczka, and I.S. Satsunkevich // Nuovo Cimento 1991. – Vol., ser. 12. – P. 97.

8. Pankov, A.A. / A.A. Pankov // Sov. J. Nucl. Phys. – 1992. – Vol. 55. – P. 461.

9. Pankov, A.A. / A.A.Pankov, N.Paver // Phys. Lett. – 1992. – Vol. B274. – P. 483.

10. Babich, A.A. / A.A. Babich, A.A. Pankov, N. Paver // Phys. Lett. – 1993. – Vol.B299. – P.351.

11. Pankov, A.A. / A.A. Pankov, N. Paver // Phys. Rev. – 1993. – Vol. D48. – P. 63.

12. Панков, А.А. / А.А. Панков // ЯФ. – 1994. – Т. 57. – С. 472.

13. Бабич, А.А. / А.А. Бабич, А.А. Панков // ЯФ. – 1994. – Т. 57. – С. 2061.

14. Богуш, А.А. / А.А. Богуш // Весці АН БССР. Сер.фіз.–тэхн.наук. – 1962. №2. – С.26

15. Богуш, А.А. / А.А. Богуш // Вести АН БССР. Сер.фіз.–тех.наук. – 1964. – № 2. – С. 29.

16. Федоров, Ф.И. Группа Лоренца / Ф.И. Федоров. – Москва: Наука, 1974. –384 с.

17. Федоров, Ф.И. / Ф.И.Федоров // Известия Вузов. Физика. – 1980. – №2. – С.32.

18. Федоров, Ф.И. / Ф.И.Федоров // Теор. и мат. физика. – 1974. – Т.18. – С.329.

19. Сикач, С.М. / С.М. Сикач // Весці АН БССР. Сер. фіз–мат. навук. – 1984. – №2. – С.84.

20. Галынский, М.В. / М.В. Галынский // ЭЧАЯ. – 1998. – Т. 29. – С. 1133.

21. Андреев, В.В. / В.В.Андреев // ЯФ. – 2003. – Т. 66. – С. 410.

**В.В. Андреев, А.М. Сейтлиев**

**УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Беларусь**

**КВАЗИСТАТИЧЕСКИЕ ПОЛЯРИЗУЕМОСТИ  
СПИНОРНОЙ ЧАСТИЦЫ В КЭД**

## Введение

В целом ряде работ [1-3] было показано, что, кроме электрической и магнитной поляризуемостей в комптоновском рассеянии (КР), электромагнитные характеристики системы описывают также функции  $\gamma_{1,..,4}$ . Эти параметры получили название “спиновых поляризуемостей” [1–3], или “гираций” [1–2].

В данной работе предлагается оригинальная методика извлечения инвариантных амплитуд путем сравнения общей и модельной АКР. Характерной особенностью данной методики является непосредственный расчет АКР как скалярной функции, зависящей от мандельстамовских переменных, методом базисных спиноров (МБС) [4, 5]. Разработанная методика позволяет получить так называемые “квазистатические” поляризуемости, которые возникают в рамках квантовой электродинамики (КЭД) при учете следующего за борновским порядком теории возмущений.

### 1. Комптоновское рассеяния на фермионе

Для описания кинематики реакции комптоновского рассеяния на фермионе  $f$  спина  $1/2$ :

$$f(p, \lambda) + \gamma(k, \sigma) \rightarrow f(p', \lambda') + \gamma(k', \sigma'), \quad (1)$$

где  $p$  и  $p'$  – импульсы начального и конечного фермионов со спиральностями  $\lambda$  и  $\lambda'$  соответственно;  $k$  и  $k'$  – импульсы входящего и исходящего фотонов со спиральностями  $\sigma$ ,  $\sigma'$ , выберем систему центра инерции (с.ц.и.). Матричный элемент реакции комптоновского рассеяния (1) в самом общем случае записывается следующим образом [6,7]:

$$T_{\lambda, \sigma}^{\lambda', \sigma'} = \varepsilon_{\sigma}^{\mu, (k')} \varepsilon_{\sigma'}^{* \nu} (k) \bar{u}_{\lambda'}(p') H^{\mu \nu} u_{\lambda}(p). \quad (2)$$

Тензор  $H^{\mu \nu}$  задается при помощи шести инвариантных амплитуд  $T_1 \dots T_6$ , называемых амплитудами Пранжа в виде [7,8]:

$$H^{\mu \nu} = -\frac{P'^{\mu} P^{\nu}}{P'^2} (T_1 + T_2 \hat{K} - \frac{N^{\mu} N^{\nu}}{N^2} (T_3 + T_4 \hat{K}) + i \frac{P'^{\mu} N^{\nu} - P^{\nu} N^{\mu}}{P'^2 K^2} \gamma_5 T_5 + i \frac{P'^{\mu} N^{\nu} + P^{\nu} N^{\mu}}{P'^2 K^2} \gamma_5 \hat{K} T_6) \quad (3)$$

где 4-вектора  $P^{\mu}$ ,  $Q^{\mu}$ ,  $K^{\mu}$  и  $N^{\mu}$  это линейные комбинации импульсов реакции.

Вводят также инвариантные амплитуды  $A_i(v, t)$  ( $i=1, \dots, 6$ ) [7,9]:

$$A_1 = \frac{1}{t} \left( T_1 + T_3 + v \left( T_2 + T_4 \right) \right), \quad A_2 = \frac{1}{t} \left( 2T_5 + v \left( T_2 + T_4 \right) \right),$$

$$A_3 = m_f^2 / r^2 \left( T_1 - T_3 - \frac{t}{4\nu} (T_2 - T_4) \right), \quad A_4 = m_f^2 / r^2 \left( 2m_f T_6 - \frac{t}{4\nu} (T_2 - T_4) \right),$$

$$A_5 = 1/4\nu (T_2 + T_4), \quad A_6 = 1/4\nu (T_2 - T_4).$$

(4)

Спиновые поляризуемости (гирации)  $\gamma_{0,\pi}$  связаны с (4) соотношениями:

$$\gamma_0 = a_4 / 2\pi m_f, \quad \gamma_\pi = -(a_2 + a_5) / 2\pi m_f, \quad (5)$$

где  $a_i$  представляет собой разницу между инвариантной амплитудой  $A_i(\nu, t)$  и ее борновской частью  $A_i^B(\nu, t)$  при  $\nu, t \rightarrow 0$ .

## 2. Методика получения инвариантных амплитуд

Стандартной методикой вычисления поляризуемостей фермионов в рамках какой-либо моделей является использование правил сумм, которые основаны на интегральных комбинациях сечений КР.

В данной работе предлагается методика извлечения инвариантных амплитуд путем сравнения АКР (2) и амплитуды, рассчитанной в рамках какой-либо модели, т. е. решения системы уравнений

$$M_{\lambda, \sigma}^{\lambda', \sigma'} = T_{\lambda, \sigma}^{\lambda', \sigma'} \quad (6)$$

для различных значений спиральностей фотонов и фермионов.

Применяя МБС [4,5] находим, что в с.ц.и.

$$T_{\lambda, \sigma}^{\lambda', \sigma'} = \sqrt{-t} \delta_{\lambda, -\lambda'} \left[ \frac{\lambda}{2} \left( \frac{m_f^2 + s}{s m} (T_1 - T_3 \sigma \sigma') + m_f (T_2 - T_4 \sigma \sigma') \right) - \sigma T_5 \delta_{\sigma, -\sigma'} \right] +$$

$$+ r \delta_{\lambda, \lambda'} \left[ \lambda \sigma T_6 \delta_{\sigma, \sigma'} - \frac{1}{2} (T_2 - \sigma \sigma' T_4) - m_f / s m (T_1 - \sigma \sigma' T_3) \right]. \quad (7)$$

Выберем в качестве независимых спиральных амплитуд реакции комптоновского рассеяния, вычисляемого в какой-либо модели, набор вида

$$M_1 = M_{++}^{++}, \quad M_2 = M_{+-}^{+-}, \quad M_3 = M_{+-}^{-+}, \quad M_4 = M_{+-}^{--},$$

$$M_5 = M_{++}^{+-}, \quad M_6 = M_{++}^{--}.$$

(8)

Составляя систему из шести уравнений, каждое из которых будет соответствовать определенной комбинации  $(\lambda, \sigma, \lambda', \sigma')$ , получим ее решение относительно инвариантных амплитуд Пранжа  $T_1, \dots, T_6$  через

матричные элементы (8):

$$\begin{aligned}
T_1 &= -\frac{1}{2r\sqrt{-t}} \left[ r(M_3 + 2M_4 + M_6) + m_f \sqrt{-t} (M_1 + M_2 + 2M_5) \right], \\
T_2 &= \frac{1}{2rs_m \sqrt{-t}} \left[ 2m_f r (M_3 + 2M_4 + M_6) + (m_f^2 + s) \sqrt{-t} (M_1 + M_2 + 2M_5) \right], \\
T_3 &= \frac{1}{2r\sqrt{-t}} \left[ r(M_3 - 2M_4 + M_6) - m_f \sqrt{-t} (M_1 + M_2 - 2M_5) \right], \\
T_4 &= \frac{1}{2rs_m \sqrt{-t}} \left[ (m_f^2 + s) \sqrt{-t} (M_1 + M_2 - 2M_5) - 2m_f r (M_3 - 2M_4 + M_6) \right], \\
T_5 &= \frac{1}{2\sqrt{-t}} (M_3 - M_6), \quad T_6 = \frac{1}{2r} (M_1 - M_2). \quad (9)
\end{aligned}$$

Для случая  $t = 0$  (рассеяние вперед) амплитуда (2) запишется в виде:

$$T_{\lambda, \sigma}^{\lambda', \sigma'} \Big|_{t=0} = -4v^2 \left[ (a_3 + a_6) m_f - \lambda \sigma v a_4 \right] \delta_{\lambda, \lambda'} \delta_{\sigma, \sigma'}. \quad (10)$$

Аналогичные вычисления для рассеяния назад приводит к выражению

$$T_{\lambda, \sigma}^{\lambda', \sigma'} \Big|_{r=0} = -\frac{\sqrt{-t}}{8m_f^2} \left[ \lambda \sqrt{tt} m (4a_1 m_f^2 - a_5 t) + \sigma t (4a_2 m_f^2 - a_5 t m) \right] \delta_{\lambda, -\lambda'} \delta_{\sigma, -\sigma'}. \quad (11)$$

### 3. Квазистатические поляризуемости в КЭД

Применим вышеизложенную методику для получения квазистатических поляризуемостей в КЭД. Для этого необходимо учесть следующий за борновским порядок теории возмущений, который будет воспроизводить структуры, аналогичные поляризуемостям адронов спина  $1/2$ , но за счет электромагнитных, а не сильных взаимодействий.

Используя матричные элементы АКР работы [10], получим явные выражения для квазистатических спиновых поляризуемостей  $\gamma_0$  и  $\gamma_\pi$  при помощи соотношений (10) и (11) на основе методики раздела 2. Разлагая АКР (10) и (11) для рассеяния вперед/назад с точностью до  $\omega^3$ , получим

$$\gamma_0 = \frac{\alpha^2}{2\pi m_f^4} \left( \frac{37}{9} + \frac{20}{3} \ln 2 \right) + \frac{10}{3} \frac{\alpha^2}{\pi m_f^4} \ln \left( \frac{\omega}{m_f} \right), \quad (12)$$

$$\gamma_\pi = \frac{11}{6} \frac{\alpha^2}{\pi m_f^4} + \frac{4}{3} \frac{\alpha^2}{\pi m_f^4} \ln \left( \frac{\lambda}{m_f} \right).$$

(13)

Квазистатические поляризуемости (12) и (13). помимо постоянных членов, содержат и неаналитические слагаемые  $\sim \ln \omega$ , которые расходятся в томпсоновском пределе ( $\omega \rightarrow 0$ ). Именно вышеуказанное свойство и послужило причиной того, что в работе [11] эти структуры были названы квазистатическими поляризуемостями.

Соотношение (12) совпадает с выражениями, приведенными в работах [11, 12], а формула (13) получена впервые.

Из соотношений (12) и (13) можно, в свою очередь, найти спиновые ( $\gamma_0, \gamma_\pi$ ) поляризуемости, а также оценить их вклады в поляризуемости “дираковского” протона (точечный фермион с нулевым аномальным магнитным моментом). Полагая  $m_f = m_p$ , а параметр  $\omega = 0,1 \cdot m_p$  находим, что

$$\gamma_0^{q-s} \approx -1.1 \times 10^{-7} \Phi_M^4 .$$

(14)

Сравнивая полученный результат (14) с экспериментальными данными  $\gamma_0^{(p)} = (-1.01 \pm 0.08_{\text{stat}} \pm 0.10_{\text{syst}}) \times 10^{-4} \Phi_M^4$  [8], можно отметить, что вклад данных поправок мал и не превышает даже экспериментальных ошибок.

### **Заключение**

В работе разработана методика извлечения инвариантных амплитуд путем сравнения общей и модельной АКР. В отличие от подходов, основанных на применении правил сумм, данная методика не требует вычисления сечений рассеяния для КР и последующего интегрирования. На основе оригинальной методики воспроизведен результат для спиновой поляризуемости  $\gamma_0$  [11, 12], получено новое выражение для спиновой поляризуемости  $\gamma_\pi$ .

### **Литература**

1. Максименко, Н. В. / Н. В. Максименко, Л. Г. Мороз // Вопросы атомной науки и техники. Серия: общая и ядерная физика. – 1979. – 4(10). – С. 26–27.
2. Левчук, М. И. / М. И. Левчук, Л. Г. Мороз // Весці АН БССР. Сер.фіз.-мат. наук. – 1985. – Т. 1. – С. 45–54.
3. Ragusa, S. / S. Ragusa // Phys. Rev. – 1993. – Vol. D47. – P. 3757-3767.
4. Андреев, В.В. / В.В. Андреев // Ядерная физика. – 2003. – Т. 66, 2. –

С. 410–420.

5. Андреев, В.В. / В.В. Андреев // Гомель: УО «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины», 2004. – 235 с.

6. Prange, R. E. / R. E. Prange // Phys. Rev. – Apr 1958. – Vol. 110 , 1. – P. 240–252.

7. Петрунькин, В.А. / В.А. Петрунькин // ЭЧАЯ. – 1981. – Т. 12. – С. 692–753.

8. Drechsel, D. / D. Drechsel, B. Pasquini, M. Vanderhaeghen // Phys. Rept. – 2003. – Vol. 378. – P. 99–205.

9. L'vov, A. I. / A. I. L'vov // Sov. J. Nucl. Phys. – 1981. – Vol. 34. – P. 597–608.

10. Denner, A. / A. Denner, S. ittmaier // Nucl. Phys. – 1999. – Vol. B540. – P. 58–86.

11. Holstein, B. R. / B. R. Holstein, V. Pascalutsa, M. Vanderhaeghen // Phys. Rev. – 2005. – Vol. D72, 9. – P. 094014.

12. Llanta, E. / E. Llanta, R. Tarrach // Phys.Lett. – 1978. – Vol. B78. – P. 586.

**К.С. Бабич, В.В. Андреев**

**УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Беларусь**

## **ЗАДАЧИ НА СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ С ЛИНЕЙНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ В ИМПУЛЬСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ**

### **Введение**

Большинство активно используемых сегодня численных методов для решения уравнений, возникающих в задачах на связанные состояния, дают относительно низкую точность по сравнению с современными экспериментальными данными. Проблемы теории усугубляются тем, что даже потенциалы взаимодействия простейшего вида в импульсном представлении приводят к интегралам с особенностями.

В данной работе показано, как интегральное уравнение, возникающее в задачах на связанные состояния с линейным потенциалом в импульсном представлении, может быть сведено к задаче на собственные значения (СЗ).

**1. Уравнение для связанных состояний в импульсном представлении**

Простейшим уравнением для связанной системы в импульсном представлении является уравнение Шредингера

$$\frac{k^2}{2\mu} \phi_l(k) + \int_0^{\infty} V_l(k, k') \phi_l(k') k'^2 dk' = E \phi_l(k), \quad (1)$$

где  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  – приведенная масса,  $k$  – относительный импульс,  $\phi_l(k)$  – радиальная часть волновой функции, а  $V_l(k, k')$  – оператор  $l$ -той составляющей парциального разложения потенциала взаимодействия  $V(r)$ .

Линейный потенциал, рассматриваемый нами, имеет вид

$$V(r) = \sigma r, \quad (2)$$

и в импульсном представлении задается выражением

$$V_l(k, k') = \frac{\sigma}{\pi} \frac{Q'_l(y)}{kk'}, \quad (3)$$

где  $Q'_l(y)$  – производная от полинома Лежандра 2-го рода:

$$Q_l(y) = P_l(y) Q_0(y) - w_{l-1}(y),$$

$$Q_0(y) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+y}{1-y} \right| = \ln \left| \frac{k+k'}{k-k'} \right|; \quad w_{l-1}(y) = \sum_{n=1}^l \frac{1}{n} P_{n-1}(y) P_{l-n}(y),$$

и  $y = \frac{k^2 + k'^2}{2kk'}$  – комбинация импульсов,  $P_l(y)$  – полиномы Лежандра.

Подставляя выражение (3) в (1) и используя метод введения контрчлена, предложенный в работах [1, 2], приходим к интегральному уравнению

$$\left( E - \frac{k^2}{2\mu} \right) \phi_l(k) = \frac{\sigma}{\pi k^2} \int_0^{\infty} \left[ P'_l(y) \ln \left| \frac{k+k'}{k-k'} \right| - w'_{l-1}(y) \right] \phi_l(k') dk' -$$

$$- \frac{4\sigma}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P_l(y)}{(k'+k)^2} \frac{[\phi_l(k') - \phi_l(k)]}{(k-k')^2} dk', \quad (4)$$

в котором содержатся два сингулярных интеграла.

Первый интеграл в (4), содержащий особенность в логарифмической функции, возникает в части потенциала (3) содержащей  $Q_0(y)$ , а второй сингулярный интеграл обусловлен видом  $Q'_l(y)$ .

## 2. Сведение интегрального уравнения к задаче на СЗ

Численное решение уравнения (4) может быть сведено к задаче на собственные значения матрицы. Для этого, выполним замену переменной  $k = c \frac{1+t}{1-t}$ , где  $t \in [-1, 1]$ , которая обеспечивает переход от интервала интегрирования  $[0, \infty)$  на  $[-1, 1]$ . Далее, используя квадратурные формулы для интегралов, входящих в (4) можно получить явный



вид матрицы, собственные значения которой дадут энергетический спектр. Но, при реализации этой схемы в импульсном представлении, возникают проблемы вычислительного характера, связанные с наличием расходимостей при  $k = k'$ . Для устранения данной проблемы используем подход, разработанный в [3, 4]. Так, в (4) интеграл с логарифмической расходимостью может быть вычислен с помощью формул (57), (58) в [3].

Для интегралов с расходимостью, обусловленной  $Q'_0(y)$  нами предлагается новая квадратурная формула, сочетающая преимущества работы [3] и методики введения контрчлена [1, 2]:

$$\int_{-1}^1 \frac{\phi_l(t) - \phi_l(z)}{(t-z)^2} dt = \sum_{j=1}^N \omega_j(z) \phi_l(t_j), \quad (5)$$

где весовые коэффициенты  $\omega_j(z)$  вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \omega_j(z) &= \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N T_{i-1}(t_j) \times X_{i-1}(z), \\ X_n(z) &= n U_{n-1}(z) \ln \left| \frac{1-z}{1+z} \right| + 4 \sum_{s=1}^{n-1} U_{n-1-s}(z) R_s(z), \\ R_s(z) &= \sum_{k=0}^{n-1} T_s(z) \left[ \frac{(-1)^{(n-s)+1} + 1}{(n-s)} \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $N$  – число узлов сетки,  $t_j$  – нули полиномов Чебышева 1-го рода  $T_s(t_j)$ , а  $U_s(t_j)$  являются полиномами Чебышева 2-го рода. Штрих возле знака суммы, здесь и далее означает, что первое слагаемое следует делить на 2.

В отличие от работы [2], где интеграл в (4) вычислялся стандартными квадратурными формулами, а также работ [3, 4], где интегральное уравнение сводилось к интегро-дифференциальному, в разработанном в данной статье подходе уравнение остается интегральным. Найдем, с помощью квадратурной формулы (5), явный вид матрицы для интеграла от  $Q'_0(y)$  в (4). Эта часть после замены переменных сведется к интегралу вида

$$I = \int_{-1}^1 \frac{V(t, z) (\phi_l(t) - \phi_l(z))}{(t-z)^2} dt, \quad (7)$$

где  $V(t, z)$  – не сингулярная функция (часть потенциала).

Разобьем интеграл (7) на две части

$$I = \int_{-1}^1 \frac{V(t, z) \phi_l(t) - V(z, z) \phi_l(z)}{(t-z)^2} dt - \phi_l(z) \int_{-1}^1 \frac{V(t, z) - V(z, z)}{(t-z)^2} dt = I_1 - I_2 \phi_l(z), \quad (8)$$

и проведем их расчет по отдельности с учетом замены  $z = t_j$ .

Используя, что любая функция может быть разложена по полиномам Чебышева

$$f(t) = \sum_j \sigma_j(t) f(t_j),$$

где  $\sigma_j(t)$  – весовые коэффициенты в полуспектральном методе Чебышева [3]

$$\sigma_j(t) = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N T_{i-1}(t_j) T_{i-1}(t),$$

для числителя в  $I_1$  получим

$$V(t, z) \phi_l(t) - V(z, z) \phi_l(z) = \sum_i [\sigma_i(t) - \sigma_i(t_j)] V(t_i, t_j) \phi_l(t_i).$$

Тогда для первого слагаемого в (8) будет

$$I_1 = \sum_i \omega_i(t_j) \phi_l(t_i) V(t_i, t_j),$$

где весовые коэффициенты  $\omega_i(t_j)$  имеют вид

$$\omega_i(t_j) = \int \frac{[\sigma_i(t) - \sigma_i(t_j)]}{(t - t_j)^2} dt$$

и находятся по формулам (6).

Интеграл  $I_2$  это частный случай  $I_1$ , если положить в (8)

$$\phi_l(t) = \phi_l(z) = 1:$$

$$I_2 = \sum_i \omega_i(t_j) V(t_i, t_j).$$

Соответственно весь интеграл  $I$  в (7) будет

$$\begin{aligned} I &= I_1 - \phi_l(t_j) I_2 = \sum_i \omega_i(t_j) V(t_i, t_j) \phi_l(t_i) - \phi_l(t_j) \left( \sum_k \omega_k(t_j) V(t_k, t_j) \right) = \\ &= \sum_i \left[ \omega_i(t_j) V(t_i, t_j) - \delta_{ij} \times \left( \sum_k \omega_k(t_j) V(t_k, t_j) \right) \right] \phi_l(t_i). \end{aligned}$$

Таким образом, интеграл в (4) может быть сведен к выражению

$$I = \sum_i W_{ji} \phi_l(t_i),$$

где матрица  $W_{ji}$  имеет вид

$$W_{ji} = \left[ \omega_i(t_j) V(t_i, t_j) - \delta_{ij} \times \left[ \sum_k \omega_k(t_j) V(t_k, t_j) \right] \right].$$

В итоге интегральное уравнение (4) может быть сведено к задаче на собственные значения

$$\sum_{i=1}^N \left( \frac{\tilde{k}_j^2}{2\mu a} + W_{ji}^{LOG} + W_{ji} \right) \phi_l(\tilde{k}_i) = \varepsilon \phi_l(\tilde{k}_i), \quad (12)$$

где  $a = \sqrt{1/\sigma}$ ;  $\varepsilon$ ,  $\tilde{k}$  – безразмерные энергия связи и относительный импульс соответственно, а  $W_{ji}^{LOG}$  – матрица для интеграла с логариф-

мической сингулярностью, которая строится по формулам (57), (58) в [3].

### **Заключение**

Эффективность новой квадратурной формулы (5) и методики расчета, названной нами улучшенным полуспектральным методом Чебышева для линейных потенциалов, была нами проверена на простейших задачах, для которых известны точные решения.

Так, для нерелятивистского уравнения Шредингера с линейным потенциалом известно точное решение в случае  $l = 0$ :

$$E_{\text{точное}} = -\frac{z_v}{(2\mu a)^{2/3}},$$

где  $z_v$  ( $v = 1, 2, 3, \dots$ ) – нули функции Эйри  $Ai(z)$ .

Для этого случая формула (12) позволяет получить ответ для первых семи состояний с высокой степенью точности  $\delta \sim 10^{-11} \div 10^{-13}$ , что на 6–7 порядков лучше, чем в работе [4].

Вычислительная схема также позволяет легко обобщить задачу (1) на релятивистский случай (т. н. бесспиновое уравнение Солпитера) путем простой замены оператора кинетической энергии на релятивистское выражение

$$T(k) = \sqrt{k^2 + m_1^2} + \sqrt{k^2 + m_2^2}.$$

### **Литература**

1. Norbury, J.W. Confining potential in momentum space / J.W. Norbury, D.E.Kahana, K.H. Maung // Can. J. Phys. – 1992. – Vol. 70. – P. 86–89.
2. Tang, A. The Nystrom plus Correction Method for Solving Bound State Equations in Momentum Space / A.Tang, J.W. Norbury // Phys. Rev. – 2001. – Vol. E63. – P. 066703.
3. Deloff, A. Semi-spectral Chebyshev method in Quantum Mechanics / A. Deloff // Annals of Phys. – 2007. – Vol. 322, № 6. – P. 1373–1419.
4. Deloff, A. Quarkonium bound-state problem in momentum space revisited / A. Deloff // Ann. Phys. – 2007. – Vol. 322, № 10. – P. 2315–2326.

**Е.В. Вакулина<sup>1</sup>, О.М. Дерюжкова<sup>2</sup>, Н.В. Максименко<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Филиал ГОУВПО «Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского», Россия

## ПОЛЯРИЗУЕМОСТЬ ПИОНА В КВАРКОВО-ПОЛЕВОМ ПОДХОДЕ В ПЕТЛЕВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

В работах Ф.И. Федорова, Л.Г. Мороза, А.А. Богуша и их учеников активно развивались ковариантные методы получения лагранжианов и уравнений взаимодействия электромагнитного поля с адронами, в которых электромагнитные характеристики этих частиц являются основополагающими [1–3]. Как следует из низкоэнергетической теоремы, при расчете вклада поляризуемостей необходимо учитывать релятивистские эффекты [4].

Одним из способов решения вопроса о физической интерпретации релятивистских эффектов и оценки электромагнитных характеристик пиона является релятивистское квантово-полевое модельное представление комптоновского рассеяния на пионе с учетом его структуры. Естественным методом теоретического описания и оценки электромагнитных характеристик пиона является кварково-полевая модель.

Данная работа посвящена теоретическому описанию низкоэнергетического комптоновского рассеяния и оценки поляризуемостей пиона в кварково-полевой модели. Определение амплитуды комптоновского рассеяния на пионе в этой модели основывается на учете вклада петлевых диаграмм. Это обусловлено прежде всего тем, что вершинная константа  $\pi q\bar{q}$  определена из распадов пионов, а также в настоящее время хорошо развит ковариантный формализм размерной регуляризации для расчета петлевых диаграмм [5]. В расчетах амплитуды комптоновского рассеяния на пионе и поляризуемостей учитывались диаграммы рисунка 1, цвет кварков и считалось, что кварки являются валентными.

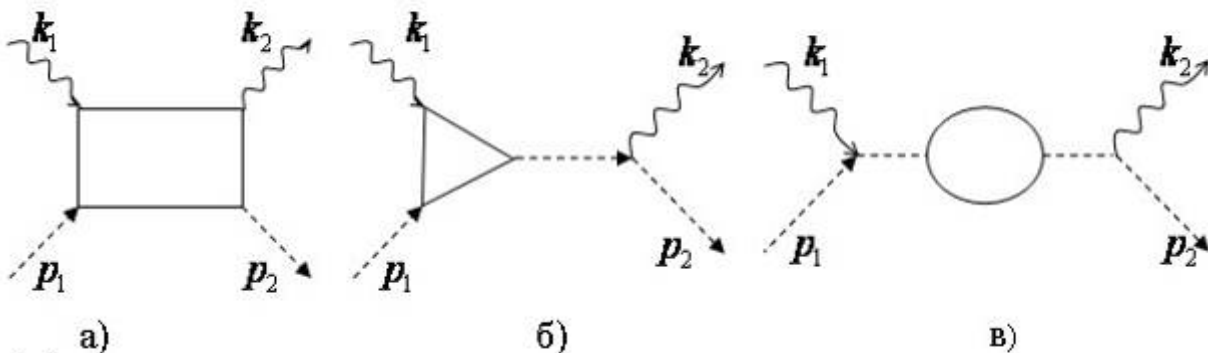


Рисунок 1 – Калибровочно-инвариантный набор диаграмм, с помощью которых моделировался процесс комптоновского рассеяния

Сумма амплитуд диаграмм, приведенных на рисунке 1, является калибровочно-инвариантной и удовлетворяет условию перекрестной симметрии [6].

Представим  $S$ -матричный элемент комптоновского рассеяния, определяемого суммой диаграмм рисунка 1, следующим образом:

$$S_{fi} = \frac{\delta(k_1 + p_1 - k_2 - p_2)}{(2\pi)^2 \sqrt{16\omega_1\omega_2 E_1 E_2}} \sum_{n=1}^9 J^{(n)}.$$

В этом выражении слагаемыми суммы являются амплитуды девяти диаграмм, которые определены по правилам Фейнмана и представлены интегралами вида:

$$J^{(n)} = (e_i e_j) \lambda^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{Sp^{(n)}}{\alpha_1^{(n)} \alpha_2^{(n)} \alpha_3^{(n)} \alpha_4^{(n)}}, \quad (1)$$

где « $n$ » пробегает значения от 1 до 9,  $\lambda$  – определяется вершиной  $\pi q \bar{q}$ ,  $e_i$  – заряды кварков, антикварков и  $\pi$ -мезонов в вершине взаимодействия фотонов с этими частицами. Интегралы (1) рассчитывались методами размерной регуляризации [5], следовательно, их структуры инвариантны относительно калибровочных преобразований и преобразований Лоренца.

Как известно, поляризуемости – это коэффициенты, которые стоят при спиновых структурах второго порядка по частоте излучения. Поэтому для определения поляризуемостей пиона воспользуемся разложением амплитуд диаграмм рисунка 1 по частоте излучения, при этом будем выполнять разложение в системе покоя мишени реального комптоновского рассеяния на пионе.

Сумму амплитуд рисунка 1 можно свести к инвариантной структуре вида:

$$e_2 T e_1 = T_1(e_2 e_1) + T_2(e_2 p_1)(e_1 p_1) + T_3(e_2 p_1)(e_1 k_2) + T_4(e_2 k_1)(e_1 p_1) + T_5(e_2 k_1)(e_1 k_2). \quad (2)$$

Амплитуды  $T_i$  ( $i=1,2,3,4,5$ ) являются скалярными функциями кинематических переменных  $s$ ,  $t$ ,  $u$  и свободные от кинематических особенностей. В случае комптоновского рассеяния реальных фотонов в кулоновской калибровке используем соотношения:  $(e_1 k_1) = (e_2 k_2) = 0$ ,  $(e_1 p_1) = (\vec{e}_1 \vec{p}_1)$ ,  $(e_2 p_1) = (\vec{e}_2 \vec{p}_1)$ . Так как вклад треугольных диаграмм в поляризуемости равен нулю, то в системе покоя мишени в кулонов-

ской калибровке амплитуда (2) принимает вид:

$$e_2 T e_1 = T_1 (\vec{e}_2 \vec{e}_1) + T_5 (\vec{e}_2 \vec{k}_1) (\vec{e}_1 \vec{k}_2). \quad (3)$$

Вклады в  $T_1$  и  $T_2$  от амплитуд диаграмм рисунка 1 разложим по частоте фотонов и при разложении ограничимся вторым порядком по  $\nu/m$  ( $\nu$  – энергия фотона). Результаты разложения свидетельствуют о том, что  $T_1$  пропорциональна  $(k_1 k_2) = -t/2 = \omega_1 \omega_2 (1-z)$ , где  $z$  – косинус угла рассеяния. В связи с этим введем новую амплитуду, выделив множитель  $(k_1 k_2)$  в  $T_1$ :  $T_1 = (k_1 k_2) t_1$ ,  $T_5 = t_5$ . В этом случае (3) примет форму:

$$e_2 T e_1 = t_1 (k_1 k_2) (\vec{e}_2 \vec{e}_1) + t_5 (\vec{e}_2 \vec{k}_1) (\vec{e}_1 \vec{k}_2). \quad (4)$$

В свою очередь, амплитуду  $e_2 T e_1$  при разложении по энергии фотонов до второго порядка можно определить через поляризуемости  $\alpha_\pi$  и  $\beta_\pi$  [7]

$$e_2 T e_1 = 8\pi M \omega_1 \omega_2 \left[ \alpha_\pi (\vec{e}_2 \vec{e}_1) + \beta_\pi (\vec{S}_2 \vec{S}_1) \right], \quad (5)$$

где  $\vec{S}_1 = \frac{[\vec{k}_1 \vec{e}_1]}{\omega_1}$ ,  $\vec{S}_2 = \frac{[\vec{k}_2 \vec{e}_2]}{\omega_2}$ .

Из сравнения выражений (4) и (5) следует:

$$\alpha_\pi = \frac{1}{8\pi M} [t_1 + (t_5 - t_1)z] \Big|_{z=1}, \quad \beta_\pi = -\frac{t_5}{8\pi M} \Big|_{z=1}, \quad \text{где } z = \cos \theta.$$

Непосредственно из этих соотношений получаем, что  $\alpha_\pi = -\beta_\pi = \frac{t_5}{8\pi M}$ . Это заключение согласуется с результатами работы [8]. Учитывая заряды и цвет кварков, из которых состоят заряженные пионы, получим:

$$\beta_\pi = \frac{\alpha}{24\pi^2 M F_\pi^2} \approx \frac{9\alpha}{4\pi^2 24M^3}. \quad (6)$$

В этом выражении введены величины  $\alpha = e^2/4\pi$  – постоянная тонкой структуры, а также  $F_\pi = 92 M \text{эВ} \approx 2/3M$ . Поляризуемость  $\beta_\pi$ , определяемая в (6), совпадает с оценкой вкладов петлевых кварковых диаграмм в поляризуемости [8], но, как отмечено в этой работе, величина электрической поляризуемости  $\alpha_\pi$  отрицательная и не согласуется с экспериментальными данными по поляризуемости заряженных пионов:

$$\alpha_\pi \approx -\beta_\pi = (6,8 \pm 1,8) \cdot 10^{-4} \Phi M^3 \quad [9].$$

Поэтому, следуя работе [8], учтем вклад диаграмм обмена  $\sigma$ -мезонов между кварками и пионами в кварково-полевым подходе. В этом случае суммарная поляризуемость будет равна:

$$\beta_{\pi} = \beta_{\pi}(\diamond) + \beta_{\pi}(\sigma) = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{9\alpha}{24\pi M^3} - \frac{10\alpha}{8\pi M^3} \right] = -\frac{7\alpha}{32\pi^2 M^3}. \quad (7)$$

Из выражения (7) следует, что  $\beta_{\pi} \approx -5 \cdot 10^{-43} \text{ см}^3 = -5 \cdot 10^{-4} \text{ Фм}^3$ .

Таким образом, в данной работе определена амплитуда низкоэнергетического комптоновского рассеяния и выполнены оценки поляризуемостей пиона в кварково-полевой модели в приближении петлевых диаграмм. Используя методы редукции петлевых диаграмм и ковариантный формализм размерной регуляризации установлено, что:

- 1) амплитуды треугольных и петлевых двухточечных диаграмм не содержат полюсов на пороге комптоновского рассеяния на пионе;
- 2) эти амплитуды пропорциональны  $(e_1 p_1)$  и  $(e_2 p_2)$ , а следовательно, для реальных фотонов в системе покоя мишени их вклад в поляризуемости равен нулю;
- 3) оценки поляризуемостей пиона и сравнение с экспериментальными данными свидетельствует о необходимости учета вклада диаграмм обмена  $\sigma$ -мезонов между кварками и пионами.

### Литература

1. Мороз, Л.Г. Матрица рассеяния с учетом взаимодействия Паули / Л.Г. Мороз, Ф.И. Федоров // ЖЭТФ. – 1960. – Т. 39. – Вып. 2. – С. 293–303.
2. Левчук, М.И. Гирация нуклона как одна из характеристик его электромагнитной структуры / М.И. Левчук, Л.Г. Мороз // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1985. – № 1. – С. 45–54.
3. Андреев, В.В. Статическая электрическая поляризуемость релятивистской электрически нейтральной системы в гамильтоновой динамике / В.В. Андреев, Н.В. Максименко // В сб. науч. трудов «Ковариантные методы в теоретической физике. Физика элементарных частиц и теория относительности». – Вып.5. – Минск: ИФ НАНБ. – 2001. – С. 26–31.
4. Максименко, Н.В. Низкоэнергетическое разложение амплитуды комптоновского рассеяния на адроне и одновременные коммутаторы токов / Н.В. Максименко, С.Г. Шульга // Ядерная физика. – 1990. – Т. 52. – Вып. 2(8). – С. 524–534.
5. Пескин, М. Введение в квантовую теорию поля / М. Пескин, Д. Шредер. – М. Ижевск. – 2001. – 783с.
6. Llanta, E. Pion electromagnetic polarizabilities and quarks / E. Llanta, K. Tarrach // Phys. Lett. – 1980. – Vol. 91B. – № 1. – P. 132–136.
7. Львов, А.И. Правила сумм для коэффициентов электрической и магнитной поляризуемостей адронов / А.И. Львов, В.А. Петрунькин,

С.А. Старцев // Препринт ФИАН. – 1976. – № 173. – С. 25.

8. Львов, А.И. Поляризуемости пионов в  $\sigma$ -модели с кварками / А.И. Львов // Ядерная физика. – 1981. – Т. 34. – Вып. 2(8). – С. 522–528.

9. Antipov, Y.M. Experimental evaluation of the sum of the electric and magnetic polarizabilities of pions / Y.M. Antipov [et.al.] // Z. Phys. – 1985. – Vol. C26. – P. 495–499.



## О ФИЗИЧЕСКОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ БЕЗМАССОВЫХ ПРЕДЕЛОВ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА-КЭЛERA

В матричной форме уравнение Дирака-Кэлера (см. напр. [1]) может быть записано так:

$$(\Gamma_\mu \partial_\mu + m_1 P_1 + m_2 P_2) \Psi = 0, \quad (1)$$

где матрицы  $\Gamma_\mu$  размерности  $16 \times 16$  подчиняются перестановочным соотношениям алгебры матриц Дирака

$$[\Gamma_\mu, \Gamma_\nu]_+ = 2\delta_{\mu\nu}, \quad (2)$$

$\Psi$  – 16-компонентная волновая функция столбец, составленная из компонент тензоров  $\varphi_\mu, \tilde{\varphi}_\mu, \varphi_{[\mu\nu]}, \varphi, \tilde{\varphi}$ , и

$$\tilde{\varphi} = \frac{1}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \varphi_{[\mu\nu\alpha\beta]}, \tilde{\varphi}_\mu = \frac{1}{3!} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \varphi_{[\nu\alpha\beta]}, \tilde{\varphi}_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2!} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \varphi_{[\alpha\beta]}, \varepsilon_{1234} = -i, \quad m_1, m_2 \quad \text{являются}$$

нормировочными множителями размерности массы. Кроме того,  $P_1, P_2$  – проективные матрицы,  $P_1 + P_2 = I_{16}, P_1^2 = P_1, P_2^2 = P_2, P_1 P_2 = 0, I_{16}$  – единичная матрица размерности  $16 \times 16$ .

Это уравнение имеет следующий тензорный вид (в рамках пространства  $(x_1, x_2, x_3, x_4 = it)$ ):

$$\begin{aligned} \partial_\nu \varphi_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \varphi + m_2 \varphi_\mu &= 0, \\ \partial_\nu \tilde{\varphi}_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \tilde{\varphi} + m_2 \tilde{\varphi}_\mu &= 0, \\ (3a) \\ -\partial_\mu \varphi_\nu + \partial_\nu \varphi_\mu + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha \tilde{\varphi}_\beta + m_1 \varphi_{[\mu\nu]} &= 0, \\ \partial_\mu \varphi_\mu + m_1 \varphi &= 0, \\ \partial_\mu \tilde{\varphi}_\mu + m_1 \tilde{\varphi} &= 0. \end{aligned} \quad (3b)$$

При  $m_1 = m_2 = m$  уравнение (1) описывает частицу с набором спиновых состояний 0,1 и массой  $m$  (если  $m_1 \neq m_2$ , то частицу с массой  $(m_1 m_2)^{\frac{1}{2}}$ ). Для комплексного поля эта система эквивалентна набору четырех дираковских полей, причем эквивалентность имеет место и при введении как электромагнитного взаимодействия, так и взаимодействия с неабелевым калибровочным полем.

Далее будет рассматриваться вещественная формулировка данной полевой системы. Полагая  $m_2 = 0$ , получим двухпотенциальную формулировку уравнений Максвелла в присутствии скалярного ( $\varphi$ ) и псевдоскалярного ( $\tilde{\varphi}$ ) полей. При  $m_1 = 0$  имеем дуально симметричную

формулировку поля Кальба-Рамонда [2].

Электромагнитное поле связано с электрически заряженными частицами, математическое описание которых использует их представление в виде точек. Поле Кальба-Рамонда [3] возникает в качестве дополнительного поля как следствие представления заряженной частицы в виде струны. Ранее возможность такой полевой системы была описана Огиевецким и Полубариновым [4] в рамках теории релятивистских волновых уравнений. Соответствующая такому полю частица (безмассовая частица с нулевой спиральностью) ими была названа нотофом.

Наряду с безмассовыми пределами  $m_1=0$  или  $m_2=0$ , которые названы в [1] “бозонными” пределами, для уравнения Дирака-Кэлера существует возможность безмассового предела при  $m_1=m_2=0$  (см. [1]), названного “фермионным” безмассовым пределом. До настоящего времени для соответствующей полевой системы не предложено физической интерпретации.

В рамках лагранжева формализма можно показать, что “фермионный” безмассовый предел соответствует совместному описанию электромагнитного поля и поля Кальба-Рамонда (системы фотон + нотоф).

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Psi^n &= (\varphi_\mu^n \quad \tilde{\varphi}_\mu^n \quad \varphi_{\mu\nu}^n \quad \varphi^n \quad \tilde{\varphi}^n) = P_1 \Psi^n + P_2 \Psi^n = (\varphi_\mu^n \quad \tilde{\varphi}_\mu^n \quad 0 \quad 0 \quad 0) + (0 \quad 0 \quad \varphi_{\mu\nu}^n \quad \varphi^n \quad \tilde{\varphi}^n) \\ \Psi^p &= (\varphi_\mu^p \quad \tilde{\varphi}_\mu^p \quad \varphi_{\mu\nu}^p \quad \varphi^p \quad \tilde{\varphi}^p) = P_1 \Psi^p + P_2 \Psi^p = (\varphi_\mu^p \quad \tilde{\varphi}_\mu^p \quad 0 \quad 0 \quad 0) + (0 \quad 0 \quad \varphi_{\mu\nu}^p \quad \varphi^p \quad \tilde{\varphi}^p), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\Psi^p$  – волновая функция столбец сопоставляется электромагнитному полю,  $\varphi_\mu^p, \tilde{\varphi}_\mu^p$  – потенциалы,  $\varphi_{\mu\nu}^p$  – полевой тензор,  $\varphi^p, \tilde{\varphi}^p$  – характеризуют скалярные составляющие полевой системы. Волновая функция столбец  $\Psi^n$  сопоставляется полю Кальба-Рамонда, где  $\varphi_{\mu\nu}^n, \varphi^n, \tilde{\varphi}^n$  – его потенциалы, а  $\varphi_\mu^n, \tilde{\varphi}_\mu^n$  – полевые тензоры.

Лагранжиан “фермионного” безмассового предела поля Дирака-Кэлера запишется так:

$$L = -(\bar{\Phi} \Phi + \bar{\Phi} \Gamma_\mu \partial_\mu \Pi + \bar{\Pi} \Gamma_\mu \partial_\mu \Phi), \quad (5)$$

где  $\bar{\Phi} = \Phi^+ \Gamma_4 \Gamma_4'$ ,  $\bar{\Pi} = \Pi^+ \Gamma_4 \Gamma_4'$ , и  $\Gamma_\mu'$  – второй набор матриц  $16 \times 16$ , которые удовлетворяют перестановочным соотношениям алгебры матриц Дирака и коммутируют с матрицами  $\Gamma_\mu$ . Кроме того, имеем, что

$$\Phi = (\varphi_\mu^n \quad \tilde{\varphi}_\mu^n \quad \varphi_{\mu\nu}^p \quad \varphi^p \quad \tilde{\varphi}^p) = P_1 \Psi^n + P_2 \Psi^p, \quad (6)$$

$$\Pi = (\varphi_\mu^p \quad \tilde{\varphi}_\mu^p \quad \varphi_{\mu\nu}^n \quad \varphi^n \quad \tilde{\varphi}^n) = P_1 \Psi^p + P_2 \Psi^n. \quad (7)$$

Волновая функция столбец  $\Pi$  по отношению к полевой системе, возникающей из (1) при  $m_1=m_2=0$ , играет роль потенциальной функции.

Непосредственной проверкой можно установить, что лагранжиан

(5) может быть приведен к виду:

$$L = (\bar{\Psi}^p P_1 \Psi^p + \bar{\Psi}^p \Gamma_\mu \partial_\mu \Psi^p) + (\bar{\Psi}^n P_2 \Psi^n + \bar{\Psi}^n \Gamma_\mu \partial_\mu \Psi^n), \quad (8)$$

где первое слагаемое в скобках описывает электромагнитное поле в рамках двухпотенциальной формулировки электродинамики, а второе слагаемое – дуально-симметричную формулировку поля Кальба-Рамонда.

Последнее означает, что “фермионный” безмассовый предел поля Дирака-Кэлера соответствует совместному дуально-симметричному описанию электромагнитного поля и поля Кальба-Рамонда. Отметим, что отыскание такой формулировки является одной из задач, возникающих при рассмотрении заряженных частиц в теории струн [5].

### Литература

1. Стражев, В.И. Уравнение Дирака-Кэлера. Классическое поле / В.И. Стражев, И.А. Сатиков, Д.А. Ционенко. – Минск, 2007. – С. 195.
2. Плетюхов, В.А. Массивные калибровочно-инвариантные теории и безмассовые поля / Плетюхов В.А., Стражев В.И. // Весці НАН Беларусі, серыя фіз.-мат. навук. – 2008. – № 1. – С. 80–88.
3. Kalb, M. Classical direct interstring action / M. Kalb, P. Ramond // Phys. Rev. – 1974. Vol. D9, – №8. – P. 2273–2284.
4. Огиевецкий, В.И. Нотоф и его возможные взаимодействия / В.И.Огиевецкий, И.В. Полубаринов // Ядерная физика. – 1966. – Т. 4. – Вып.1. – С. 216–224.
5. Zwiebach, V. A First Course in String Theory (2nd. ed.) / V. Zwiebach. – Cambridge, 2009. – P. 697.

**Д.В. Гайдукевич**

**Белорусский государственный университет, Беларусь**

## **ВНУТРЕННИЕ СИММЕТРИИ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В ТЕОРИИ ПОЛЯ КАЛЬБА-РАМОНДА**

Под полем Кальба-Рамонда в литературе (см. напр. [1, 2]) понимается безмассовое поле, потенциалом для которого является антисимметричный тензор второго ранга, а напряженность поля описывается 4-вектором. Впервые формулировка такой полевой системы была дана в работе Огиевецкого и Полубаринова [3], в которой частица, соот-

ветствующая такому полю, была названа нотофом. И если нотоф – безмассовая частица с нулевой спиральностью, то фотон – безмассовая частица, обладающая двумя значениями спиральности. Соответственно, потенциал электромагнитного поля является 4-вектором, а напряженность поля описывается антисимметричным тензором второго ранга. Кальб и Рамонд показали [1], что если строить теорию, в которой геометрическим образом заряженных частиц является струна, то для описания их взаимодействия наряду с электромагнитным полем (фотоном) необходимо рассмотрение и поля Кальба-Рамонда (нотофа).

В настоящей работе рассматриваются законы сохранения, связанные с внутренней симметрией обобщенного безмассового поля Кальба-Рамонда, т. е. без использования возможности введения калибровочных условий, уменьшающих число степеней свободы у этого поля. Соответствующая система имеет следующий вид (уравнения поля)

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha\tilde{\phi}_\beta - \partial_\mu\phi_\nu + \partial_\nu\phi_\mu &= 0, \\ \partial_\mu\phi_\mu &= 0, \\ \partial_\mu\tilde{\phi}_\mu &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

при задании полевых функций  $\phi_\mu, \tilde{\phi}_\mu$  через потенциалы  $\phi_{[\mu\nu]}, \phi, \tilde{\phi}$ :

$$\begin{aligned}-\partial_\mu\phi_{[\mu\nu]} + \partial_\nu\phi &= \phi_\nu, \\ -\partial_\mu\tilde{\phi}_{[\mu\nu]} + \partial_\nu\tilde{\phi} &= \tilde{\phi}_\nu.\end{aligned}\tag{2}$$

Здесь  $\tilde{\phi}_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2!}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\phi_{[\alpha\beta]}$ ,  $\tilde{\phi} = \frac{1}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\phi_{[\mu\nu\alpha\beta]}$ ,  $\tilde{\phi}_\mu = \frac{1}{3!}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\phi_{[\nu\alpha\beta]}$ ,  $\varepsilon_{1234} = -i$ .

Лагранжиан для этой полевой системы, записанный с использованием только потенциальных функций, имеет следующий вид:

$$L = \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{2}(\partial_\lambda\phi_{[\mu\nu]})^2 - (\partial_\mu\phi)^2 + (\partial_\mu\tilde{\phi})^2\right\}\tag{3}$$

Определим обобщенные координаты и импульсы:

$$\begin{aligned}q_{\mu\nu} &= \phi_{[\mu\nu]}, \quad \pi_{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\mu\nu}} = \dot{q}_{\mu\nu}, \\ q &= \phi, \quad \pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{q}, \\ \tilde{q} &= \tilde{\phi}, \quad \tilde{\pi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}} = -\dot{\tilde{q}}.\end{aligned}\tag{4}$$

Плотность функции Гамильтона в данном случае имеет вид:

$$H = \frac{1}{4}\left\{(\nabla\phi_{[\mu\nu]})^2 + (\dot{\phi}_{[\mu\nu]})^2\right\} - \frac{1}{2}\left\{(\nabla\tilde{\phi})^2 + (\dot{\tilde{\phi}})^2\right\} + \frac{1}{2}\left\{(\nabla\phi)^2 + (\dot{\phi})^2\right\}\tag{5}$$

Система уравнений (1)–(2) является частным случаем уравнений Дирака-Кэлера (см. напр. [4]). Лагранжиан соответствующей полевой

системы инвариантен относительно преобразований полевых функций, не индуцируемых преобразованиями пространственно-временных координат и образующих группу SO(4,2). В работе [5] такие преобразования были названы диальными преобразованиями. Применительно к обобщенному полю Кальба-Рамонда группа внутренней симметрии сужается до группы SO(3,1).

Диальные преобразования для рассматриваемой полевой системы, будучи записаны в канонической форме, имеют следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta q(k,t) = \frac{i}{2} q_{\mu\nu} \delta \omega_{\mu\nu}, \quad \delta \tilde{q}(k,t) = -\frac{i}{4} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho} q_{\mu\nu} \delta \omega_{\sigma\rho}, \\ \delta q_{\mu\nu}(k,t) = -i q \delta \omega_{\mu\nu} - \frac{i}{2} \tilde{q} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho} \delta \omega_{\sigma\rho} - \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho} (q_{\sigma\lambda} \delta \omega_{\lambda\rho} - q_{\lambda\rho} \delta \omega_{\sigma\lambda}), \\ \delta \pi(k,t) = \frac{i}{2} \pi_{\mu\nu} \delta \omega_{\mu\nu}, \quad \delta \tilde{\pi}(k,t) = \frac{i}{4} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho} \pi_{\mu\nu} \delta \omega_{\sigma\rho}, \\ \delta \pi_{\mu\nu}(k,t) = -i \pi \delta \omega_{\mu\nu} + \frac{i}{2} \tilde{\pi} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho} \delta \omega_{\sigma\rho} - \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho} (\pi_{\sigma\lambda} \delta \omega_{\lambda\rho} - \pi_{\lambda\rho} \delta \omega_{\sigma\lambda}), \end{array} \right. \quad (6)$$

Поскольку имеем дело с группой SO(3,1), то её параметры  $\omega_{\mu\nu}$  образуют антисимметричный тензор по группе Лоренца.

Преобразования (6) оставляют инвариантным гамильтониан (5) и соответствующая им сохраняющаяся величина имеет вид:

$$Q_{\mu\nu} = \sum_k \frac{i}{2} \left\{ (\pi q_{\mu\nu} - \pi_{\mu\nu} q) - \varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho} (\tilde{\pi} q_{\sigma\rho} + \pi_{\sigma\rho} \tilde{q}) + (-\varepsilon_{rs\sigma\nu} \pi_{rs} q_{\sigma\mu} + \varepsilon_{rs\mu\rho} q_{rs} \pi_{\nu\rho}) \right\} \quad (7)$$

Её можно записать так:

$$Q_{\mu\nu} = \frac{i}{2} \int \left\{ (\dot{\phi}_{[\mu\nu]} - \dot{\phi}_{[\nu\mu]}) - \varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho} \left( -\tilde{\phi}_{[\sigma\rho]} + \dot{\phi}_{[\sigma\rho]} \tilde{\phi} \right) + (-\varepsilon_{rs\sigma\nu} \dot{\phi}_{[rs]} \phi_{[\sigma\mu]} + \varepsilon_{rs\mu\rho} \phi_{[rs]} \dot{\phi}_{[\nu\rho]}) \right\} d^3 x \quad (8)$$

Обобщенное поле Кальба-Рамонда описывает безмассовую полевую систему с набором спиральностей  $0, \pm 1$ , имеющих различную четность. Преобразования диальной симметрии перемешивают эти состояния, так что сохраняющаяся величина  $Q_{\mu\nu}$  имеет спиновую природу. Отметим также, что ранее в работе [6] канонический формализм был использован при рассмотрении диальной симметрии вещественного векторного поля общего типа, для которого в качестве потенциальных функций были выбраны величины, чьи лоренцевские трансформационные свойства соответствовали 4-вектору и 4-псевдовектору.

## Литература

1. Kalb, M. Classical direct interstring action / M. Kalb, P. Ramond // Phys. Rev. – 1974. – Vol. D9. – № 8. – P. 2273–2284.
2. Плетюхов, В.А. Массивные калибровочно-инвариантные теории и безмассовые поля / Плетюхов В.А., Стражев В.И. // Весці НАН Бе-

ларусі, серыя фіз.-мат. навук. – 2008. – № 1. – С. 80–88.

3. Огиевецкий, В.И. Нотоф и его возможные взаимодействия / В.И. Огиевецкий, И.В. Полубаринов // Ядерная физика. – 1966. – Т. 4. – Вып.1. – С. 216–224.

4. Стражев, В.И. Уравнение Дирака-Кэлера. Классическое поле / В.И. Стражев, И.А. Сатиков, Д.А. Ционенко. – Минск, 2007. – С. 195.

5. Стражев, В.И. О диальной симметрии векторного поля общего типа / В.И. Стражев // Acta physica Polonica. – 1978. – Vol. B9. – № 5. – P. 449–458.

6. Круглов, С.И. Канонический формализм и законы сохранения теории векторного поля общего типа / Круглов С.И. // ДАН БССР. – 1978. – Т. 22. – Вып. 8. – С. 708–711.

**А.К. Горбацевич, А.Н. Тарасенко**

**Белорусский государственный университет, Беларусь**

## **ДВИЖЕНИЕ И ИЗЛУЧЕНИЕ КОМПАКТНЫХ АСТРОФИЗИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ В ОКРЕСТНОСТИ СВЕРХ- МАССИВНОЙ ЧЁРНОЙ ДЫРЫ**

### **Введение**

Исследование компактных двойных систем является актуальной задачей современной астрофизики, которая очень часто связана с проверкой общей теории относительности (ОТО). В частности, наблюдения времени прихода импульсов двойного пульсара J0737-3039 позволили не только подтвердить квадрупольную формулу ОТО для мощности гравитационного излучения с точностью 0,4 % [1], но и проверить с той же точностью ОТО в первом постньютоновском приближении. Компактные двойные системы являются одними из наиболее перспективных источников гравитационных волн, для регистрации гравитационного излучения от которых необходимо знать закон движения системы. Для изолированной двойной системы эта задача решалась в различных постньютоновских приближениях [2]. Астрофизические наблюдения [3] показывают, что значительное число двойных звёзд может существовать вблизи сверхмассивных чёрных дыр. Поскольку орбиты звёзд могут подходить близко к горизонту событий, постньютоновские приближения в этом случае неприменимы. Тем не менее, для описания движения достаточно компактной систе-

мы можно воспользоваться методом Эйнштейна-Инфельда-Хоффмана [4] в сопутствующей системе отсчёта. Поскольку информация о движении системы получается из анализа её электромагнитного излучения, возникает задача, во-первых, рассчитать характеристики излучения по заданному закону движения системы, и, во-вторых, восстановить движение двойной системы по заданному её излучению. Целью данной работы является получение уравнений движения двойной системы, моделирование её электромагнитного излучения и решение обратной задачи восстановления движения по излучению.

### 1. Уравнения движения в сопутствующей системе отсчёта

Рассмотрим систему из двух звёзд, размер которых порядка  $R_0$ , находящихся на расстоянии  $\rho$  друг от друга и на расстоянии порядка  $r$  от чёрной дыры. Развиваемый далее метод применим, если выполняются неравенства

$$R_0 \ll \rho \ll r. \quad (1)$$

Типичные параметры системы, которая удовлетворяет условию (1), следующие: массы звёзд порядка солнечной массы  $m_{1,2} \sim M_\odot$  радиусы порядка  $R_0 \sim 10$  км, что соответствует нейтронной звезде, расстояние между звёздами имеет порядок  $\rho \sim 10^4$  км, а расстояние до чёрной дыры –  $r \sim 10^7$  км, что выполняется для близких к горизонту орбит в поле чёрной дыры с массой  $M \sim 10^6 M_\odot$  (гравитационный радиус которой  $r_g \sim 10^7$  км). Относительное движение звёзд в рассматриваемой системе нерелятивистское, приливные деформации звёзд малы, а характерный размер двойной системы много меньше масштаба неоднородности гравитационного поля.

Будем описывать относительное движение звёзд в двойной системе в сопутствующей системе отсчёта, начало координат которой движется по закону  $x^i = \xi^i(\tau)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , где  $\tau$  – собственное время. Введём вдоль данной (базисной) мировой линии ортонормированную тетраду  $h_{(a)}^i(\tau)$ , причём  $h_{(4)}^i = u^i / c$ , где  $u^i$  – 4-скорость начала координат. Каждой точке пространства  $P$  с координатами  $x_P^i$  сопоставим 4 координаты:  $\tau$  и  $X^{(\alpha)} = \sigma_P h^{(\alpha)}_i k^i$ , где  $\alpha = 1, 2, 3$ ,  $\sigma_P$  – значение канонического параметра в точке  $P$  для пространственноподобной геодезической  $x^i(\sigma)$ , проходящей через базисную мировую линию и точку  $P$  ( $x^i(0) = \xi^i(\tau)$ ,  $x^i(\sigma_P) = x_P^i$ ),  $k^i = dx^i / d\sigma$  в точке  $\sigma = 0$ . Полученные координаты назовём вращающимися координатами Ферми.

В работе [5] получено выражение для метрики во вращающихся координатах Ферми. Она имеет вид

$$g_{ik} = \eta_{ik} + \varepsilon_{ik},$$

(2)

где  $\eta_{ik} = \text{diag}(1,1,1,-1)$ , а величины  $\varepsilon_{ik}$  строятся из тетрадных компонент тензора кривизны, трёхмерного ускорения и угловой скорости системы отсчёта (определения этих величин даны в [5]).

Гравитационное поле, созданное звёздами, характеризуется тензором  $\varphi_{ik}$ , определяющим малые поправки к фоновой метрике (2). Для нахождения тензора  $\varphi_{ik}$  достаточно воспользоваться уравнениями Эйнштейна. Уравнения движения двойной звезды в заданной метрике  $g_{ik}$  следуют из уравнений поля; их можно получить из соотношения

$$T_{i;k}^k = 0, \quad (3)$$

где  $T_i^k$  – тензор энергии-импульса. Полученные величины  $\varphi_{ik}$  и уравнения движения приведены в работе [5].

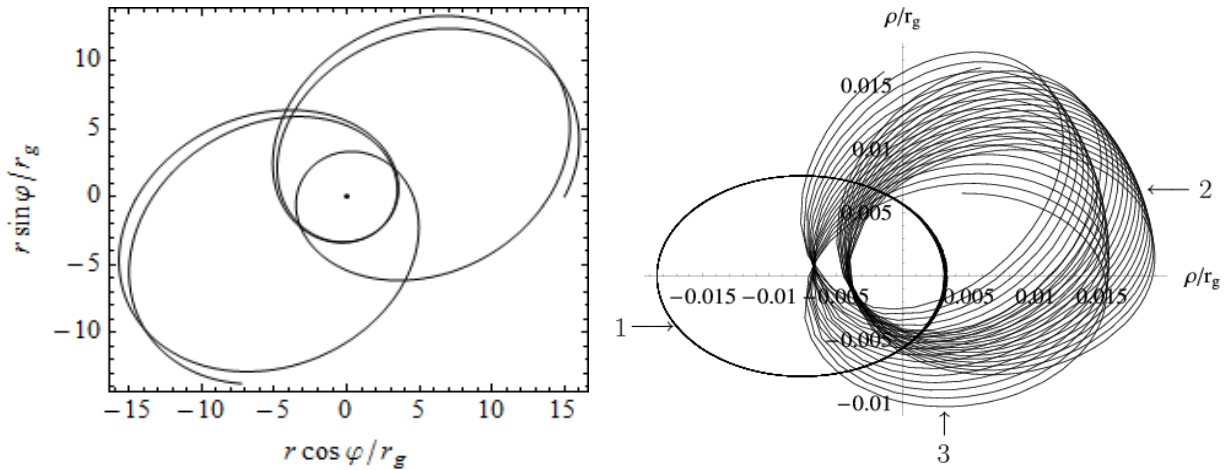


Рисунок 1 – Траектория движения центра масс двойной системы (слева)

и относительного движения звёзд (справа). На правом рисунке 1 обозначает траекторию без учёта приливных сил, 2 и 3 – соответственно траектории без учёта и с учётом негеодезичности движения центра масс двойной системы

Рассмотрим двойную звезду, совершающую движение вокруг чёрной дыры по орбите с большим эффективным эксцентриситетом (система с набором параметров 2 из [5]). Траектория центра масс двойной системы, а также траектория относительного движения звёзд показаны на рисунке 1.

## 2. Электромагнитное излучение двойной звезды

Рассмотрим электромагнитное излучение двойной звезды в приближении геометрической оптики. Основными характеристиками излучения являются красное смещение  $z$  и сила света  $I$  (энергия, излу-



чаемая в единицу времени в единицу телесного угла). Вместо силы света удобно ввести безразмерный коэффициент усиления  $K = I / I_0$ , равный отношению принятой силы света к испущенной. В работе [6] получено выражение для красного смещения и коэффициента усиления как функции координат и скорости источника (звезды) и координат наблюдателя. Поскольку гравитационное поле, созданное звёздами, мало искажает поле чёрной дыры, то для расчёта характеристик излучения можно пользоваться результатами работы [6]. Зависимость величин  $z$  и  $I$  от времени приёма сигнала для двух наиболее ярких изображений источника показана на рисунке 2.

В работе [6] рассмотрена обратная задача: зная зависимость красного смещения и силы света от времени для первых нескольких изображений источника, найти его закон движения. В [6] данная задача решена для изотропного источника; показано, что для эффективной реконструкции движения достаточно наблюдения первых трёх изображений. Идея метода реконструкции – выделить в коэффициенте усиления геометрическую часть  $K^{\text{geom}}(\Delta\Phi, r)$ , зависящую только от углового расстояния между источником и наблюдателем  $\Delta\Phi$  и радиальной координаты источника  $r$ , и рассчитать эту величину из данных наблюдений. Приравнявая теоретически рассчитанные и найденные из наблюдений величины, получим два уравнения, решение которых в каждый момент времени определяет искомый закон движения.

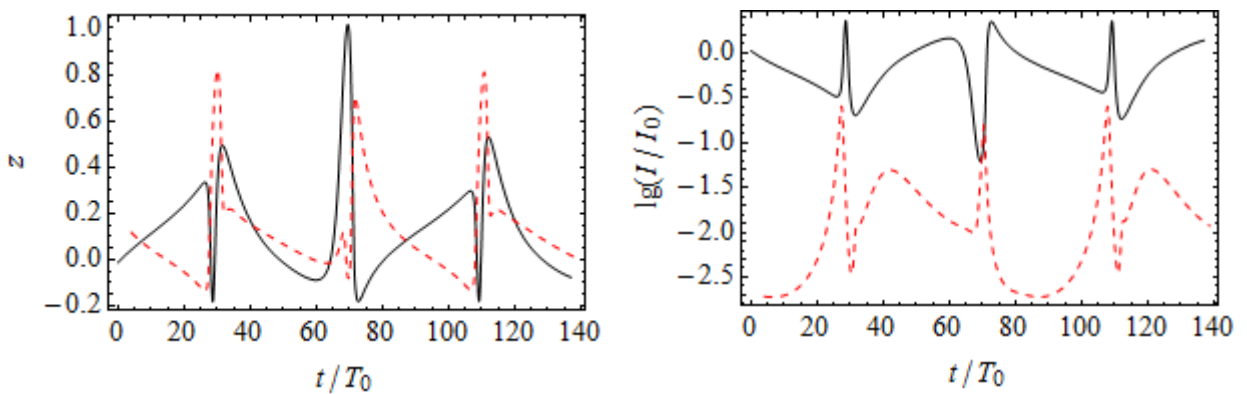


Рисунок 2 – Зависимость красного смещения (слева) и силы света (справа) от времени приёма для основного (сплошная линия) и первого дополнительного (пунктирная линия) изображений источника

### Выводы

В работе промоделировано движение и излучение двойной нейтронной звезды в поле сверхмассивной чёрной дыры. Результаты

работы планируется развивать в следующих направлениях: связать особенности относительного движения звёзд и движения центра масс; выяснить, в каких вращающихся координатах Ферми закон движения имеет наиболее простой вид; решить задачу о реконструкции относительного движения звёзд.

### Литература

1. Бисноватый-Коган, Г.С. / Г.С. Бисноватый-Коган // УФН. – 2006. – Т. 176. – № 1. – С. 59–75.
2. Blanchet, L. / L. Blanchet // Living Rev. Relativity. – 2006. – Vol. 9. – P. 4. <http://www.livingreviews.org/lrr-2006-4>.
3. M. P. Muno [et. al.] // Astrophys. J. – 2005. – Vol. 622. – L133.
4. Einstein, A. / A. Einstein, L. Infeld, B. Hoffmann // The Annals of Mathematics, Second Series. – 1938. – Vol. 39. – № 1. – P. 65–100.
5. Gorbatsievich, A. / A. Gorbatsievich, A. Bobrik // AIP Conf. Proc. 1205. – 2010. – P. 87–96.
6. Tarasenko, A. / A. Tarasenko // Phys. Rev. D. – 2010. – Vol. 81. – P. 123005.

**А.В. Гулов<sup>1</sup>, А.А. Панков<sup>2</sup>, В.В. Скалзуб<sup>1</sup>, А.В. Цитринов<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Днепропетровский национальный университет  
имени Олеса Гончара, Украина

<sup>2</sup> Филиал Международного центра теоретической физики  
имени Абдуса Салама при УО «Гомельский государственный техни-  
ческий университет имени П.О. Сухого», Беларусь

### ИДЕНТИФИКАЦИЯ НОВЫХ НЕЙТРАЛЬНЫХ КАЛИБРОВОЧНЫХ БОЗОНОВ НА БОЛЬШОМ АДРОННОМ КОЛЛАЙДЕРЕ

На протяжении последних десятилетий мы являемся свидетелями поистине грандиозного триумфа Стандартной модели сильных, электромагнитных и слабых взаимодействий элементарных частиц (СМ), основанной на калибровочной группе  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ , теоретические основы которой были разработаны во второй половине XX-го столетия. Была доказана перенормируемость и унитарность  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  янг-миллсовского лагранжиана, включающего хиггсовский механизм нарушения электрослабой симметрии. Примерно в это же время открыто свойство асимптотической свободы КХД, описывающей сильные взаимодействия элементарных частиц. Вме-

сте с тем, СМ, несмотря на свою внутреннюю самосогласованность (перенормируемость, отсутствие аномалий) и безусловный успех в описании существующих экспериментальных данных, оставляет открытыми достаточно много вопросов и имеет целый ряд принципиальных проблем теоретического характера. В частности, лагранжиан СМ для числа поколений лептонов, равном 3, содержит восемнадцать свободных параметров. До сих пор отсутствуют экспериментальные доказательства существования хиггсовского бозона. Упомянем также проблему калибровочной иерархии, связанную с сильно отличающимися энергетическими масштабами, планковским и электрослабым. В силу этих (и ряда других) причин естественно предположить, что СМ является скорее низкоэнергетическим пределом некоторого более фундаментального построения, низкоэнергетический предел которой совпадает с СМ, нежели окончательной теоретической базой в описании микромира вплоть до планковского масштаба. К числу подобных теоретических построений относятся, например, модели с расширенным калибровочным сектором, такие как лево-правосимметричные модели (LR), альтернативные лево-правосимметричные модели (ALR),  $E_6$ -модели и другие [1–3]. Их исследование (теоретическое и экспериментальное) представляет значительный интерес. Эти модели являются одними из простейших расширений СМ, характеризующихся элементарной структурой хиггсовского сектора. Общим для данных моделей является то, что они предсказывают новые физические объекты и явления на масштабе энергий  $\sim 1$  ТэВ, связанные, например, с наличием тяжелых нейтральных  $Z'$  калибровочных бозонов, обусловленных дополнительными калибровочными симметриями  $U(1)'$ . Обобщением моделей с расширенным калибровочным сектором являются недавно предложенные теоретические построения [4], основанные на общем принципе перенормируемости взаимодействий новых  $Z'$ -бозонов. В рамках этих общих подходов предсказывается существование так называемого «абелевого»  $Z'$ -бозона, для которого фермионные константы связи не являются фиксированными величинами, а рассматриваются как свободные параметры. Вместе с тем, ренормгрупповые требования для амплитуд рассеяния приводят к универсальным соотношениям для фермионных констант связи абелевого  $Z'$ -бозона, а также к уменьшению свободных параметров (констант связи) теории. Все упомянутые выше теоретические предсказания интересны с точки зрения изучения физических эффектов, выходящих за рамки СМ, или так называемой «новой» физики.

На основе данных, полученных из низкоэнергетических экспери-

ментов по нейтральным токам, результатов на  $e^+e^-$  - коллайдере LEP, а также поиска прямого адронного рождения  $Z'$ -бозонов на коллайдере TEVATRON, установлено, что для большинства расширенных калибровочных моделей граничные значения на массы дополнительных  $Z'$ -бозонов лежат, как правило, выше 800–1000 ГэВ [3].

В программах современных адронных (TEVATRON, LHC) коллайдеров вопросу поиска физики, выходящей за рамки СМ, традиционно уделяется большое внимание. Достижение порога рождения  $Z'$ -бозона явилось бы прямым доказательством проявления «новой» физики. Следует иметь в виду, что рождение резонансов (например,  $Z'$ -бозонов) с массой  $\geq 1$  ТэВ и их последующий распад в лептонную пару ( $l=e, \mu$ ) в процессе Дрелла-Яна

$$p + p \rightarrow \gamma, Z, Z' \rightarrow l^+l^- + X, \quad (1)$$

весьма вероятно станет первым сигналом «новой» физики, обнаруженным в экспериментах на Большом адронном коллайдере LHC в ЦЕРНе, в силу сравнительно простой кинематики процесса, возможности регистрации лептонов с высокой эффективностью и из-за значительной подавленности фоновых процессов [3]. Для установления теоретической модели, предсказывающей существование новых резонансов, необходимо определить их динамические характеристики (массу, спин и константы связи). Масса резонансов определяется по положению пика в распределении инвариантных масс лептонных пар, а спин резонанса можно установить из характерных угловых распределений продуктов распада резонансов. Определение констант связи в адронных столкновениях является существенно более сложной задачей, так как адронные процессы, включающие в себя, как правило, несколько партонных подпроцессов, зависят в общем случае от большого числа констант связи. В настоящей работе исследуются возможности Большого адронного коллайдера LHC по обнаружению новых нейтральных калибровочных  $Z'$ -бозонов, предсказываемых моделями с расширенным калибровочным сектором, а также принадлежащих обобщенному классу абелевых  $Z'$ -бозонов. Кроме того, исследуются возможности идентификации спина  $Z'$ -бозонов на основе углового анализа лептонов в процессе (1). В работе рассматриваются  $Z'$ -бозоны, возникающие в моделях с расширенным калибровочным сектором, лево-правые LR, альтернативные лево-правосимметричные модели ALR,  $E_6$ -модели ( $\psi, \chi, \eta$ ), а также так называемая «последовательная стандартная модель» (SSM). Соответствующие константы связи  $Z'$ -бозонов можно найти, например, в [5].

Как отмечалось выше, требование перенормируемости, налагаемое на обобщенную теорию, предсказывающую существование абеле-

левых  $Z'$ -бозонов, приводит к появлению связей между векторными и аксиальными фермионными константами связи [4]. А именно, разность векторных и аксиальных фермионных констант связи,  $v'_f - a'_f$ , а также сама аксиальная константа связи,  $a'_f$ , абелевого  $Z'$ -бозона являются универсальными для всех фермионных дублетов, входящих в теорию.

Для определения порога рождения векторного резонанса с уровнем достоверности  $5\sigma$  используется условие, согласно которому минимальное число резонансных событий  $N_{min}$ , необходимое для детектирования резонанса над дрелл-яновским фоном  $N_B$ , обеспечивающим заданную статистическую значимость резонансного сигнала, можно представить как  $N_{min} = \max\{5 \cdot \sqrt{N_B}, 10\}$  [5]. Для экспериментов на ЛНС с номинальной энергией и светимостью,  $\sqrt{s} = 14$  ТэВ и  $L_{int} = 100$  фбн<sup>-1</sup>, нижняя граница на массу  $Z'$ -бозона (порог рождения) лежит в интервале  $\sim 4-5$  ТэВ для популярных расширенных моделей ( $E_6$ , LR, ALR, SSM), в то время как для абелевых  $Z'$ -бозонов она простирается до  $\sim 8$  ТэВ (см. рисунок 1). При оценке порогов рождения для абелевых  $Z'$ -бозонов были использованы ограничения на параметры (константы связи и массу)  $Z'$ -бозонов, полученные из экспериментальных данных на коллайдере LEP2 [6].

Следует отметить, что область масс, лежащая выше 8 ТэВ, исключена для всех классов  $Z'$ -бозонов. Иными словами, если обнаруженный в дрелл-яновском канале резонанс имеет массу выше этого предельного значения, то можно будет с уверенностью утверждать, что это не векторный резонанс  $Z'$ .

Если  $Z'$ -бозон будет обнаружен, например, в эксперименте АТ-ЛАС на ЛНС в распределении по инвариантной массе лептонных пар, то в первую очередь необходимо будет определить его спин. Для этой цели можно использовать угловое распределение вылета лептонов. Предположим, что измеренное в эксперименте угловое распределение лептонов согласуется с соответствующим распределением, характерным для распада резонансов со спином-1.

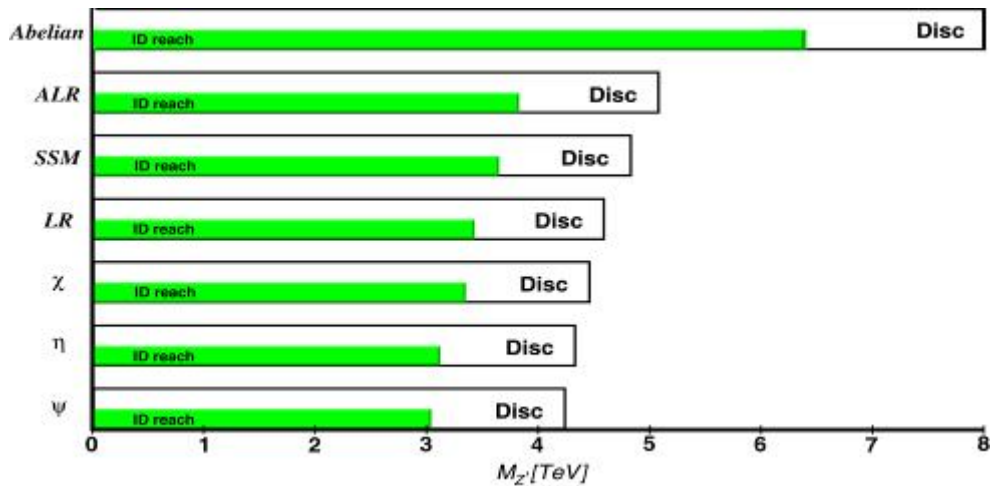


Рисунок 1 – Пороги рождения (Disc) и идентификации (ID reach) на массу  $Z'$ -бозонов для моделей с расширенным калибровочным сектором, полученные из анализа процесса (1) на LHC при  $L_{int} = 100 \text{ фбн}^{-1}$  и  $\sqrt{s} = 14 \text{ ТэВ}$

В этом случае для идентификации спина  $Z'$ -бозонов необходимо определить область в пространстве резонансного числа событий, для которой альтернативные гипотезы резонансов со спином -0 и -2 будут исключены. Здесь речь идет о скалярном состоянии снейтрино, предсказываемом суперсимметричными теориями с нарушенной  $R$ -четностью, а также тензорном гравитоне в теориях Калуцы-Клейна с дополнительными пространственными измерениями. Исключение альтернативных гипотез для резонансов со спином -0 и -2 осуществлялось с помощью асимметрии центр-край [5] с использованием статистических методов ( $\chi^2$ -анализ), которые позволили получить оценку порогов идентификации моделей  $Z'$  с заданным уровнем достоверности (95 %), представленных на рисунке 1. Итак, идентификация спина исследуемых моделей  $Z'$ -бозонов для номинальной энергии и светимости LHC возможна вплоть до масс  $Z'$  порядка 3,1–6,5 ТэВ.

### Литература

1. Hewett, J. L. Low-Energy Phenomenology Of Superstring Inspired E(6) Models / J.L. Hewett and T.G. Rizzo, Phys. Rept. – 1989. – Vol. 183. – P. 193–381.
2. Leike, A. The phenomenology of extra neutral gauge bosons / A. Leike // Phys. Rept. – 1999. – Vol. 317. – P. 143–250.
3. Rizzo, T.G. Z-prime phenomenology and the LHC / T.G. Rizzo // Lectures given at Exploring New Frontiers Using Colliders and Neutrinos (TASI 2006), Boulder, Colorado, 4–30 Jun 2006 : Boulder 2006, Colliders and neutrinos, P. 537.
4. Gulov, A.V. Model-independent search for the Abelian Z-prime bos-

on in the Bhabha process / A.V. Gulov, V.V. Skalozub // Phys. Rev. D. – 2004. – Vol. 70. – P. 115010; Gulov, A.V. Hint of a Z-prime boson from the CERN LEP II data / A.V. Gulov, V.V. Skalozub // Phys. Rev. D. – 2007. – Vol. 76. – P. 075008; Gulov, A.V. Fitting of Z' parameters / A.V. Gulov, V.V. Skalozub // Int. J. Mod. Phys. A. – 2010. – Vol. 25. – P. 5787–5815.

5. Osland, P. Spin identification of the Randall – Sundrum resonance in lepton-pair production at the LHC / P. Osland, A.A. Pankov, A.V. Tsytrinov and N. Paver // Phys. Rev. D. – 2008. – Vol. 78 – P. 035008; Osland, P. Spin and model identification of Z' bosons at the LHC / P. Osland, A.A. Pankov, A.V. Tsytrinov and N. Paver // Physical Review D. – 2009. – Vol. 79. – P. 115021; Osland, P. Sneutrino identification in dilepton events at the LHC / P. Osland, A.A. Pankov, A.V. Tsytrinov and N. Paver // Physical Review D. – 2010. – Vol. 82. – P. 115017.

6. Abbiendi, G. Tests of the standard model and constraints on new physics from measurements of fermion pair production at 189-GeV to 209-GeV at LEP / G. Abbiendi *et al.* [OPAL Collab.] // Eur. Phys. J. C. – 2004. – Vol. 33. – P. 173–212; Abdallah, J. Measurement and interpretation of fermion-pair production at LEP energies above the Z resonance / J. Abdallah *et al.* [DELPHI Collab.] // Eur. Phys. J. C. – 2006. – Vol. 45. – P. 58–632.

**Е.А. Дей**

**УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Беларусь**

## **ДВУХЧАСТИЧНЫЕ СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ В ФОРМАЛИЗМЕ УРАВНЕНИЯ СОЛПИТЕРА**

Для исследования свойств мезонов как связанных состояний кварка и антикварка в настоящее время применяется широкий набор методов и подходов, от нерелятивистских моделей до решеточных вычислений. Одним из способов учета релятивистских свойств кварков является одновременное приближение для уравнения Бете-Солпитера, приводящее к уравнению Солпитера [1].

Наиболее широко для численного решения уравнения Солпитера применяется вариационный метод по системе функций, построенных по полиномам Лагерра [2], и метод кубических В-сплайнов [3]. В данной работе уравнение Солпитера для состояний с квантовыми

числами  $0^+$  решается численно методом коллокации в базисе линейных конечных элементов.

Уравнение Бете-Солпитера для системы кварк-антикварк имеет общий вид [2–4]

$$(p_1 - m_1)\chi(p)(p_2 + m_2) = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} V(P, p, k)\chi(k) \quad (1)$$

где  $P, p$  – полный и относительный импульсы частиц в системе,  $V(P, p, k)$  – оператор взаимодействия,  $p_1 = \alpha_1 P + p$ ,  $p_2 = \alpha_2 P - p$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ . Для систем, состоящих из кварков одного аромата,  $m_1 = m_2 = m$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$ .

Одновременное приближение для уравнения (1) означает, что ядро уравнения зависит только от трехмерных импульсов  $V \equiv V(\vec{p} - \vec{k})$ . Как следствие волновая функция Солпитера в системе центра масс  $\vec{P} = 0$ ,  $P = M$  определяется соотношением

$$\varphi(\vec{p}) = i \int \frac{dp_0}{2\pi} \chi(p). \quad (2)$$

В результате такого одновременного приближения теоретическое описание системы становится во многом аналогичным формализму квантовой механики в импульсном представлении.

Для описания кварк-антикваркового взаимодействия обычно используют суперпозицию потенциала одноглюонного обмена, запирающего потенциала, соответствующего линейному поведению в координатном представлении, и постоянной составляющей [4]

$$V(\vec{p} - \vec{k}) = \frac{4\pi\bar{\alpha}_s}{(\vec{p} - \vec{k})^2} \gamma_\mu^{(1)} \gamma_\mu^{(2)} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} \left( \frac{4\pi\lambda}{(\vec{p} - \vec{k})^2 + \varepsilon^2} \right) + u. \quad (3)$$

Здесь  $\bar{\alpha}_s$  – константа одноглюонного обмена,  $\lambda$  – интенсивность запирающего взаимодействия,  $u$  – постоянная составляющая.

Учет квантовых чисел мезона выполняется разложением оператора взаимодействия по полной системе инвариантов алгебры Дирака и выделением в полной волновой функции скалярных амплитуд и множителей, определяющих ее трансформационные свойства. Так, для состояния  $0^+$  волновая функция имеет общую структуру [4]

$$\varphi(\vec{p}) = \varphi_1(p)\gamma^5 + \varphi_2(p) \left( \gamma^0 \gamma^5 + \gamma^5 \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{p}}{m} \right), \quad (4)$$

Для скалярных функций  $\psi_1(p) = p\varphi_1(p)$ ,  $\psi_2(p) = p\varphi_2(p)$  в результате парциального разложения оператора взаимодействия получается система интегральных уравнений с симметричными ядрами ( $\omega(p) = \sqrt{p^2 + m^2}$ )



$$M\psi_1(p) = \left[ \frac{2\omega^2(p)}{m} + u \frac{m}{\omega(p)} \left( 1 - \frac{p^2}{m^2} \right) \right] \psi_2(p) + \frac{m}{\omega(p)} \int_0^\infty \frac{dk}{(2\pi)^3} pk V_2(p, k) \psi_2(k); \quad (5)$$

$$M\psi_2(p) = m \left( 2 + \frac{u}{\omega(p)} \right) \psi_1(p) + \frac{m}{\omega(p)} \int_0^\infty \frac{dk}{(2\pi)^3} pk V_1(p, k) \psi_1(k).$$

и соответствующее условие нормировки

$$\frac{8}{m} \int_0^\infty \frac{dp}{(2\pi)^3} \omega(p) \psi_1(p) \psi_2(p) = 2M. \quad (6)$$

Оператор взаимодействия в (5) содержит компоненты

$$V_1(p, k) = V_0^S(p, k) - 4V_0^V(p, k); \quad V_2(p, k) = V_0^S(p, k) - \frac{pk}{m^2} V_1^S(p, k) + 2V_0^V(p, k); \quad (7)$$

$$V_{0,1}^S(p, k) = \frac{8\pi^2 \lambda}{pk} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} Q_{0,1} \left( \frac{p^2 + k^2 + \varepsilon^2}{2pk} \right); \quad V_0^V(p, k) = \frac{8\pi^2 \bar{\alpha}_s}{pk} Q_0 \left( \frac{p^2 + k^2}{2pk} \right).$$

Величины  $V_0^S(p, k)$ ,  $V_1^S(p, k)$  и  $V_0^V(p, k)$  – элементы парциального разложения запирающей и одноглюонной компонент оператора взаимодействия (3), выражающиеся через функции Лежандра второго рода  $Q_0(z)$ ,  $Q_1(z)$ .

Для численного решения область изменения аргументов ограничивалась достаточно большим значением  $0 \leq p \leq p_{\max}$  и разбивалась на  $N$  равных конечных элементов. Искомые волновые функции выражались через функции формы  $F_i(p)$  конечных элементов

$$\psi_1(p) = \sum_{i=1}^N \psi_i F_i(p); \quad \psi_2(p) = \sum_{i=1}^N \psi_{N+i} F_i(p). \quad (8)$$

Преимущество метода конечных элементов состоит в том, что все интегралы вычисляются не от неизвестных функций  $\psi_1(k)$ ,  $\psi_2(k)$ , а от функций формы, имеющих простой явный вид, так что большинство интегралов может быть вычислено аналитически.

В соответствии с методом коллокаций, в каждом узле невязка точного и численного решения системы уравнений (5) должна обращаться в ноль. В качестве узлов коллокации использовались центральные точки конечных элементов. С учетом выражений (8) при этом получаем систему линейных уравнений относительно неизвестных значений волновой функции в узлах конечных элементов. Полученная система линейных уравнений образует стандартную задачу на собственные значения  $M$  квадратной матрицы  $A$ , действующей на объединенный вектор  $\psi = (\psi_1, \psi_2) = (\psi_{1,1}, \dots, \psi_{1,N}, \psi_{2,1}, \dots, \psi_{2,N})$ :

$$\sum_{j=1}^{2N} A_{i,j} \psi_j = M \psi_i; \quad i = 1..2N. \quad (9)$$

Для расчета элементов матрицы использовались программные блоки, составленные в системе Mathcad. Собственные значения и

собственные векторы вычислялись с помощью встроенных функций.

Для системы  $c\bar{c}$  (чармоний) параметры расчета подбирались по массе состояния  $1S$   $M_{\eta_c} = 2,9803$  ГэВ [5]. Вычисленные значения массы последующих состояний при значениях  $r_{\max}=16$ ,  $N=200$ ,  $m_c=1,28$ ,  $u=0,042$ ,  $\alpha_s=0,288$ ,  $\lambda=0,28$  приведены в таблице 1. Там же приведены результаты расчетов массы  $b\bar{b}$ -системы (параметры расчета  $m_b=4,96$ ,  $u=-0,794$ ,  $\alpha_s=0,23$ ,  $\lambda=0,28$ ). Для сравнения в таблице 1 приведены также экспериментальные данные для спектра масс  $\eta_c$  [5] и результаты работы [6], в которой использована иная параметризация взаимодействия, для спектра  $\eta_b$ .

Таблица 1 – Спектр масс псевдоскалярных мезонов

Состояние	$M(\eta_c)$	$M(\eta_c)$ [5]	$M(\eta_b)$	$M(\eta_b)$ [6]
1S	2,980	2,9803	9,39	9,39
2S	3,642	3,637	9,94	9,95
3S	4,049		10,326	10,311
4S	4,353		10,645	

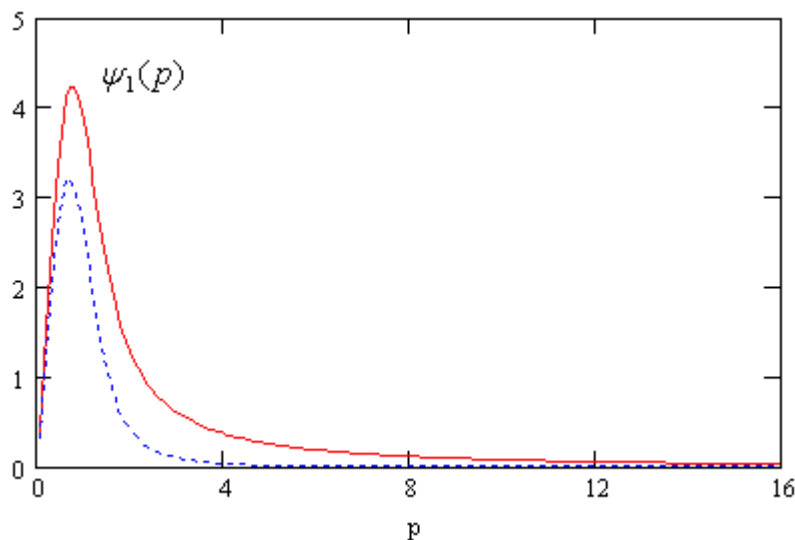


Рисунок 1 – График волновых функций  $\psi_1(p)$ ,  $\psi_2(p)$  для  $\eta_c(2980)$

Собственный вектор  $\psi$ , вычисляемый из (9) для отдельного собственного значения, содержит компоненты обеих волновых функций. В качестве примера на рисунке 1 приведен график вычисленных волновых функций  $\psi_1(p)$ ,  $\psi_2(p)$  для состояния  $\eta_c(1S)$ , нормированных в соответствии с условием (6).

Таким образом, метод коллокации по системе конечных элементов является удобным инструментом для численного решения уравнения Солпитера. Дальнейшее повышение точности численных результатов может быть достигнуто, во-первых, использованием конечных элементов высших порядков и, во-вторых, использованием эрмитовых конечных элементов, обеспечивающих непрерывность не только вол-

новой функции, но и ее первых производных.

### Литература

1. Salpeter, E.E. / E.E. Salpeter // *Physical Review*. – 1952. – Vol. 87 – P. 328.
2. Resag, J. / J. Resag, C.R.Münz // *Nuclear Physics*. – 1995. – Vol. A590. – P. 735.
3. Spence, J.L. / J.L. Spence, J.P.Vary // *Physical Review*. – 1993. – Vol. C47. – P. 1282.
4. Linde, J. / J. Linde, H. Snellman // *Nuclear Physics*. – 1977. – Vol. A619. – P. 346.
5. Nakamura, K. / K. Nakamura et.al. Particle Data Group. // *Journal of Physics*. – 2010. – Vol. G37.
6. Chang, C.-H. / C.-H. Chang, G.-L. Wang // *arXiv.org*, hep-ph/1003.3827.

**В.А. Длугунович, Ю.А. Курочкин, А.В. Холенков**

**Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси, Беларусь**

### **ВЕКТОР-ПАРАМЕТР Ф.И. ФЕДОРОВА ДЛЯ СИСТЕМЫ ПОЛЯРИЗАТОРОВ**

В работах [1–3] показано, что представление матрицы когерентности (поляризационной матрицы плотности) пучков электромагнитных волн как бикватерниона, соответствующего 4-вектору псевдоевклидова пространства, компонентами которого являются интенсивность и параметры Стокса, дает возможность ввести группу преобразований этих величин, изоморфную группе  $SO(3,1)$ . Данные преобразования являются подмножеством множества поляризационных матриц Мюллера, вообще говоря, образующих полугруппу с единицей. Сужение полугруппы матриц Мюллера до группы преобразований открывает возможность использовать векторную параметризацию Ф.И. Федорова [4,5] преобразований группы  $SO(3,1)$  для интерпретации полярного разложения матриц Мюллера.

Как известно, матрица Мюллера  $M$  определяется как матрица, преобразующая набор параметров Стокса, объединенных в 4-вектор  $S$ , которые описывают поляризацию электромагнитной волны, либо пучка волн до ее (его) преобразования рассеивающим объектом, в набор параметров Стокса (4-вектор)  $S'$ , описывающих поляризацию рассеянного излучения так, что

$$S' = MS. \quad (1)$$

По своей физической природе матрицы Мюллера не обязательно имеют обратную, и поэтому, их множество не образует группу, однако многие случаи применения матриц Мюллера демонстрируют возможность и плодотворность сужения множества этих матриц до группы. Плодотворность сужения множества преобразований (1) до группы оказывается особенно важной в интерпретации полярного разложения матриц Мюллера, которое подробно разрабатывается применительно к оптическим проблемам в работе [6] и все шире используется в оптических расчетах. В частности, в работах, использующих полярное разложение матриц Мюллера на ортогональную и симметричную матрицы в общем случае и на матрицу трехмерных вращений и эрмитову, когда множество матриц Мюллера сужено до множества матриц преобразований группы, изоморфной группе  $SO(3,1)$ , показывается, что матрицам вращений такого разложения соответствуют оптические элементы – фазовые пластинки, а симметричной (эрмитовой) матрице – поляризаторы. С точки зрения векторной параметризации Ф.И. Федорова фазовым пластинкам соответствуют вещественные трехмерные вектор-параметры, а поляризаторам – чисто мнимые вектор-параметры.

Последовательности оптических элементов при этом могут описываться эффективным, вообще говоря, комплексным вектор-параметром, определяющим соответствующие эффективные матрицы Мюллера данной последовательности. Эффективный вектор-параметр, в свою очередь, выражается через вектор-параметры отдельных элементов с помощью формулы композиции вектор-параметров, которая для пары элементов есть формула композиции вектор-параметров Федорова [4,5]

$$\vec{q}'' = \langle \vec{q}', q \rangle = \frac{\vec{q}' + \vec{q} + \vec{q}' \times \vec{q}}{1 - (\vec{q}' \vec{q})}. \quad (2)$$

Таким образом, в терминах вектор-параметров матрица Мюллера  $M$  оптического элемента, включающего фазовую пластинку и поляризатор, представленная в виде полярного разложения, является произведением

$$M = T_u L(\vec{c}) L(i\vec{u}) = T_u L(\langle \vec{c}, i\vec{u} \rangle), \quad (3)$$

где  $\vec{q} = \langle \vec{c}, i\vec{u} \rangle$  – композиция (2) вещественного вектор-параметра  $\vec{c}$ , отвечающего фазовому элементу и чисто комплексного вектор-параметра  $i\vec{u}$ , отвечающего поляризатору,  $T_u$  – ослабление. Вектор-параметры  $\vec{c}$  и  $i\vec{u}$  связаны с характеристиками оптических элементов. Вещественный вектор-параметр  $\vec{c}$  связан с вектором  $\vec{R}$ , характеризующим эффекты задержки (изменения фазы) и определяется для фазо-

вых пластинок, в которых оси собственных поляризаций задаются 4-вектором Стокса

$$r = (i, \vec{r}), \quad \vec{R} = R\vec{r}, (\vec{r}^2) = 1. \quad (4)$$

При этом

$$\vec{c} = \vec{r} \operatorname{tg} \frac{R}{2}. \quad (5)$$

Вектор  $\vec{D}$  определяется как произведение амплитудной анизотропии  $D$  на вектор Стокса, описывающий собственную поляризацию поляризатора. Такой вектор является векторной частью 4-вектора Стокса (бикватерниона), нормированного на интенсивность падающего излучения  $s = (i, \vec{s})$  [2,3]

$$\vec{D} = D\vec{s}, \quad (\vec{s}^2) = 1, \quad (6)$$

а соответствующая матрица Мюллера такого оптического элемента, введенная, например, авторами [6], «бустом», умноженным на пропускание  $T_u$  неполяризованного света. Чисто мнимый вектор-параметр  $i\vec{u}$  такого преобразования выражается следующим образом через вектор  $\vec{D}$ :

$$\vec{u} = \frac{\vec{D}}{1 + \sqrt{1 - (\vec{D}^2)}}. \quad (7)$$

Связь между вектор-параметрами и соответствующими матрицами Мюллера может быть построена в соответствии с выражениями [2, 3], следующими из общих формул, полученных в [5]. Четырехмерные векторы (бикватернионы) Стокса  $S_D = (i, \pm \vec{D})$  и  $S_R = (i, \pm \vec{R})$  являются собственными векторами матриц Мюллера, определенных вектор-параметрами (5) и (7) соответственно. В первом из них знак «плюс» соответствует максимуму пропускания, «минус» – минимуму, во втором случае знак «плюс» соответствует быстрой оси собственной поляризации, «минус» – медленной оси. Как известно [7], если есть последовательность фазовых пластинок, то матрица Мюллера системы есть произведение матриц Мюллера отдельных пластинок. Используя векторную параметризацию, с помощью композиции (2) вектор-параметров типа (5) можно найти общий вектор-параметр системы независимо от взаимной ориентации осей, соответствующих собственным поляризациям. В силу групповых свойств такой операции следует, что при этом преобразование пучка будет связано только с изменением фазы. При комбинации нескольких поляризаторов с различными взаимными направлениями собственных поляризаций должен наблюдаться эффект не только ослабления, но изменение фазы – аналог явления, приводящего к прецессии Томаса в релятивистской

механике. Это следует из негрупповых свойств композиции чисто мнимых векторов типа (7), соответствующей произведению матриц Мюллера различных поляризаторов. Данное положение находится в соответствии с известной теоремой Джонса [7], согласно которой для света с определенной длиной волны произвольный набор частичных поляризаторов (линейных амплитудных элементов) и вращателей эквивалентен оптической системе, содержащей один вращатель и один развернутый частичный поляризатор. Развитый выше подход дает простой метод расчета собственных поляризаций эквивалентной оптической системы. Так, в частности, для системы двух поляризаторов с произвольно ориентированными осями собственных поляризаций  $\vec{D}^{(1)}$  и  $\vec{D}^{(2)}$  получены следующие выражения для эффективных  $\vec{c}$  и  $\vec{D}$ :

$$\vec{c} = -\frac{\vec{D}^{(1)} \times \vec{D}^{(2)}}{(1 + \sqrt{1 - (\vec{D}^{(1)})^2})(1 + \sqrt{1 - (\vec{D}^{(2)})^2}) + (\vec{D}^{(1)} \vec{D}^{(2)})} = \vec{r} \operatorname{tg} \frac{R}{2}, \quad (8)$$

где, как и в случае (4), единичный вектор, определяющий собственную поляризацию получившегося эквивалентного фазового элемента.

$$\vec{D} = \frac{\vec{D}^{(1)}(\sqrt{1 - (\vec{D}^{(2)})^2}) + \vec{D}^{(2)}[1 + (\vec{D}^{(1)} \vec{D}^{(2)}) / (1 + \sqrt{1 - (\vec{D}^{(2)})^2})]}{1 + (\vec{D}^{(1)} \vec{D}^{(2)})}.$$

(9)

В НИЛЛТП Института физики проведен эксперимент по проверке выражений (8) и (9) (см. таблицу 1). Взяты два идеальных линейных поляризатора с векторами Стокса  $S^{(1)} = (i, \vec{D}^{(1)}) = (i, 1, 0, 0)$  и  $S^{(2)} = (i, \vec{D}^{(2)}) = (i, 1, 0, 0)$ , через которые пропускался пучок лазерного излучения.

Таблица 1 – Результаты сравнения выражений для эффективных  $\vec{D}$ , полученных в эксперименте (первая цифра) и рассчитанных по формуле (9) (вторая)

550+1250	0+0	0+15	0+30	0+45	0+0+0	0+15+30
$D_1$	0,999	0,84 0,87	0,47 0,5	0 0	0,999	0,47 0,5
$D_2$	0,021	0,49 0,5	0,85 0,87	0,999 0,999	0,019	0,85 0,87
$D_3$	0,018	0 0	0 0	0 0	0,016	0,02

В пределах неопределенности измерений расчетные значения совпадают с экспериментальными. Значения  $R$ , рассчитанные по форму-

ле (8) для приведенных в таблице углов скрещивания осей поляризаторов, получились равными удвоенным значениям данных углов. Таким образом, их значения совпадают со значениями углов поворота для компонентов векторов Стокса при преобразованиях вращения. Авторы благодарят Е.А. Толкачева за полезные замечания.

### Литература

1. Бикватернионы и матрицы Мюллера / Богуш А.А. [и др.] // Доклады НАН Беларуси. – 2007. – Т. 51, № 5. – С. 71–76.
2. Длугунович, В.А. Векторная параметризация преобразований Лоренца и полярное разложение матриц Мюллера / В.А. Длугунович, Ю.А. Курочкин // Оптика и спектроскопия. – 2009. – Т. 107, № 2. – С. 312–317.
3. Dlugunovich, V.A. The Polar Decomposition and Vector Parametrization of the Mueller Matrices / V.A. Dlugunovich, Yu.A. Kurochkin // The Sun, The Stars, The Universe and General Relativity: Int. Conf. in Honor of Ya.B. Zeldovich's 95th Anniversary, AIP Conference Proceedings. – 2010. – Vol. 1205. – P. 65–71.
4. Федоров, Ф.И. О композиции параметров группы Лоренца / Ф.И. Федоров // Докл. АН СССР. – 1962. – Т. 143, № 1. – С. 56–59.
5. Федоров, Ф.И. Группа Лоренца / Ф.И. Федоров. – М.: УРСС, 2003. – 380 с.
6. Lu, Sh.-Y. Interpretation of Mueller matrices based on polar decomposition / Sh.-Y. Lu, R.A. Chipman // J. Opt. Soc. Am. A. – 1996. – Vol. 13, № 5. – P. 1106–1113.
7. Ищенко, Е.Ф. Поляризационная оптика / Е.Ф. Ищенко, А.Л. Соколов. – М.: Издательство МЭИ, 2005. – 335 с.

**Т.П. Желонкина, С.А. Лукашевич, В.Ф. Шолох**

**УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Беларусь**

### **ИНВАРИАНТНОСТЬ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ**

Один из виднейших физиков-теоретиков нашего времени Е. Вигнер в своей известной лекции по случаю вручения ему Нобелевской премии развивает концепцию о трех уровнях физического познания. Первый – отдельные факты (события), второй – законы природы, устанавливающие связи между фактами, и третий – принципы инвариантности, устанавливающие связи уже между законами приро-

ды. Если законы природы указывают, какие события возможны и какие нет, и позволяют продемонстрировать новые события, то принципы инвариантности служат пробным камнем для проверки истинности законов природы и позволяют отыскивать новые законы. Величайшим примером является открытие теории относительности.

Значение открытых законов природы в исследовании физического мира определяется тем, что они позволяют предвидеть одни события на основе того, что мы знаем о других событиях, играющих роль *начальных условий*. Начальными условиями Вигнер называет элементы поведения предметов (переменные свойства, определяющие состояние предмета), т. е. события, порождаемые предметом или системой, не определяемые законами природы. На основе этого необходимо четко разделить законы природы и начальные условия, что впервые было открыто в механике Ньютона.

Законы природы являются концентрированными выражениями порядка в явлении, регулярного и правильного, что имеется в поведении системы. Начальные условия выражают нерегулярность в элементах поведения системы. Выбор начальных условий не менее сложен, чем открытие закона. Из бесчисленного множества переменных свойств (элементов поведения) системы необходимо правильно выбрать подмножество переменных свойств, называемое *минимальным набором начальных условий*. Этот выбор затрудняется случайным характером элементов минимального набора, обусловленным множеством внешних взаимодействий. И если это множество внешних взаимодействий учесть невозможно, то тогда исключается возможность установить единый закон природы. Поэтому из всех возможных взаимодействий необходимо выделить то множество, которое в большей степени изменяет состояние системы и тем самым делает более определенным минимальный набор начальных условий. Множеству этих возможных взаимодействий отвечает определенное множество законов природы, открытие которых является целью физики.

Как выявить эти законы? Каким критериям должны удовлетворять эти законы? Существуют ли сверхзаконы, которым эти законы подчиняются?

На эти вопросы Вигнер отвечает: существуют такие сверхзаконы, которые относятся к законам также, как законы относятся к событиям. Эти сверхзаконы называются *принципами инвариантности*.

Принцип инвариантности требует, чтобы при минимальном наборе начальных условий *сохранились некоторые постоянные отношения, составляющие законы природы*. Принципы инвариантности применимы к законам природы, т. е. к корреляциям (соотношениям)



между событиями, а не к самим событиям (к событиям применимы законы). Они позволяют установить новые корреляции между событиями на основании уже установленных.

Если установлено, что события  $A, B, C, \dots$  влекут за собой событие  $X$ , то события  $A', B', C', \dots$  с необходимостью влекут за собой событие  $X'$  при условии, что  $A', B', C', \dots$  и  $X'$  получаются из  $A, B, C, \dots$  и  $X$  при действии одного из преобразований симметрии (инвариантности).

Существуют три категории таких преобразований симметрии.

1. *Евклидовы преобразования.* Явления  $A', B', C', \dots X'$  происходят в различных точках пространства, но находятся в том же отношении друг к другу, что и события  $A, B, C, \dots$  и  $X$ .

2. *Сдвиги во времени.* События  $A', B', C', \dots X'$  происходят в разное время, но отделены друг от друга такими же интервалами времени, как события  $A, B, C, \dots$  и  $X$ .

3. *Равномерное прямолинейное движение.* В системе координат, движущейся равномерно и прямолинейно, события  $A', B', C', \dots$  и  $X'$  происходят также, как и события  $A, B, C, \dots X$  [1].

Евклидовы преобразования образуют группу движения пространства, сдвиги (трансляции) и повороты (вращения). Сдвиги пространства эквивалентны переносу начала системы координат без изменения их направления, а повороты – вращению осей координат без изменения начала. Эти преобразования основываются на постулатах *однородности и изотропности* пространства. Однородность пространства означает, что параллельный перенос замкнутой физической системы как целого не изменяет ее свойства, а изотропность – это такое свойство, благодаря которому свойства замкнутой физической системы не изменяются при любых ее поворотах как целого. Распространение света в однородном и изотропном пространстве происходит прямолинейно и с постоянной скоростью.

Преобразования движения пространства носят название преобразования симметрии пространства. А сохранение постоянства отношения между событиями при преобразованиях возводится в ранг *принципа симметрии пространства*. Если при преобразовании симметрии пространства физические величины (например, импульс, момент импульса), характеризующие систему не изменяются, то говорят об их *инвариантности* относительно преобразований. Инвариантность физических величин относительно преобразований симметрии обобщается в *принцип инвариантности*.

Преобразование сдвига во времени или преобразование симметрии времени основано на постулате *однородности времени*: сдвиг во

времени сохраняет отношение между событиями неизменным. Если события А, В, С, ... произошли в моменты времени  $t_1, t_2, t_3, \dots$ , то промежутки времени между ними  $\Delta t_{12}, \Delta t_{23}, \dots$  не изменятся при изменении начала отсчета времени, т.е. и в моменты времени  $t_1 + \Delta t; t_2 + \Delta t, \dots$ , где  $\Delta t$  – произвольный промежуток времени. В этом случае отношения между событиями удовлетворяют *принципу симметрии времени*. Физические величины (например, энергия), сохраняющиеся при преобразованиях сдвига во времени, удовлетворяют соответствующему принципу инвариантности.

Третий вид преобразования состоит в переходе от одной системы отсчета, движущейся равномерно прямолинейно, к другой системе отсчета, движущейся относительно первой также равномерно прямолинейно. С этими преобразованиями связан *постулат независимости протекания событий от скорости равномерного прямолинейного движения*. В данном случае – это *принцип симметрии равномерного прямолинейного движения системы отсчета*.

Имеются физические величины (скорость света, интервал, собственное время и др.), инвариантные относительно преобразования инерциальных систем отсчета, которые удовлетворяют некоторому *принципу инвариантности*.

Если бы мы перенесли рассмотрение всех трех категорий преобразований пространство–время, то они оказались бы частными случаями преобразований системы координат пространство–время, т.е. преобразований движения псевдоевклидова пространства. Их можно назвать *псевдоевклидовыми преобразованиями*.

Существуют физические величины (геометрические и физические), инвариантные относительно псевдоевклидовых преобразований, т.е. подчиняющихся соответствующим принципам инвариантности. Эти принципы инвариантности Вигнер назвал *геометрическими, или классическими, принципами инвариантности*.

Характерной особенностью геометрических принципов инвариантности является то, что «соответствующие преобразования симметрии изменяют не события, а «лишь их положение в пространстве и времени».

Кроме этих геометрических принципов, в современной физике известны *неклассические, или динамические*, как их называет Вигнер, *принципы инвариантности*. Каждый динамический принцип инвариантности непосредственно относится к определенному типу взаимодействий. Например, электрический заряд сохраняется при электромагнитных взаимодействиях, т. е. закон сохранения электрического заряда есть следствие *градиентной, или калибровочной, инвариант-*

ности потенциалов электромагнитного поля.

Самые общие и важные законы физики – это законы сохранения. Законы сохранения являются формой выражения принципов инвариантности. Закон сохранения энергии выражает инвариантность к смещению системы отсчета во времени (однородность времени). Закон сохранения импульса выражает инвариантность по отношению к сдвигу системы отсчета в пространстве (однородность пространства). Закон сохранения момента количества движения выражает инвариантность по отношению к вращению в пространстве (изотропность пространства). Инвариантность к преобразованиям симметрии физики склонны формулировать как законы сохранения особых физических величин, получивших название *четностей*.

Исходя из сказанного, можно сделать следующие выводы:

- каждому типу инвариантности в природе соответствует определенный класс законов сохранения;
- закон природы считается правильным, если постулируемые им корреляции событий согласуются с принятыми принципами инвариантности, играющими роль пробного камня при проверке предполагаемого закона [1].

### Литература

1. Вигнер, Е. Этюды о симметрии / Е. Вигнер. – М.: Мир, 1971. – 318 с.

**В.А. Зыкунов**

**УО «Белорусский государственный университет транспорта»,  
Беларусь**

### МЁЛЛЕРОВСКОЕ РАССЕЙНИЕ ОТ ЭНЕРГИЙ JLab ДО ILC

В этой работе сделан обзор современного состояния прецизионных измерений в экспериментах по поляризационному мёллеровскому рассеянию

$$e^- + e^- \rightarrow e^- + e^- (+\gamma),$$

которое по многим причинам представляет интерес для физиков, как с теоретической, так и с экспериментальной стороны. Во-первых, экспериментальная реализация мёллеровского рассеяния полезна для точного определения поляризации электронного пучка, которое

осуществлялось, например, в таких экспериментах как SLC [1], E-143 [2] и E-154 [3] в SLAC, в нескольких экспериментах Лаборатории им. Джефферсона (JLab) [4] и MIT-Bates [5]. Мёллеровский поляриметр также может быть использован в планируемых экспериментах на ИС [6]. Далее, эксперимент E-158 в SLAC [7], в котором изучалось мёллеровское рассеяние поляризованных электронов с энергиями 45–48 ГэВ на неполяризованных электронах водородной мишени, позволил получить с беспрецедентной точностью значение одного из важнейших параметров стандартной модели – синуса угла Вайнберга – в области низких энергий [8]. Эксперимент следующего поколения MØLLER [9] с 11-ГэВным электронным пучком, который планируется осуществить в скором будущем в JLab, позволит измерить наблюдаемую асимметрию на новом уровне чувствительности  $0,73 \times 10^{-9}$ . Это дает возможность измерить слабый заряд электрона с относительной погрешностью 2,3 % и определить угол Вайнберга с точностью  $\pm 0,00026$  (стат.)  $\pm 0,00013$  (сист.).

Мёллеровское рассеяние – очень «чистый» процесс с хорошо выраженной возможностью детектирования конечных частиц и легко подавляемым фоном, поэтому отклонения от стандартной модели (т. е. сигналы новой физики) достаточно легко зафиксировать. Спектр новых явлений, которые могут быть открыты при прецизионном изучении мёллеровского рассеяния, чрезвычайно широк: суперсимметрия, дополнительный нейтральный  $Z'$ -бозон, композитность лептонов, эффекты аномального анапольного момента, скаляры с двойным зарядом, проявления дополнительных размерностей, билептоны, контактные взаимодействия и т. д. [10, 11]. Мёллеровское рассеяние, таким образом, представляет существенный интерес в физике на масштабе ТэВ-ных энергий и играет существенную дополнительную роль к программе исследований Большого адронного коллайдера (LHC).

Очевидно, что для того чтобы получить надежную информацию из экспериментальных данных, совершенно необходимо учесть все существующие вклады в наблюдаемые величины, более сложные по структуре (так называемые эффекты высших порядков), но экспериментально от него неотличимые. Эта процедура (так называемая процедура радиационной поправки) является неотъемлемой частью любого современного эксперимента, тем более для такого «чистого» процесса, как мёллеровское рассеяние, и при низких энергиях (ультраточный 11 ГэВ-ный эксперимент MØLLER в JLab), и при высоких энергиях планируемых экспериментов в

мёллеровской моде на ПС.

Один из первых расчетов электрослабых поправок (ЭСП) к наблюдаемым величинам мёллеровского рассеяния был сделан Марсиано и Чарнецким в работе [11]. В соответствии с этим расчетом нарушающая четность асимметрия

$$A_{PV} = \frac{\sigma_{LL} + \sigma_{LR} - \sigma_{RL} - \sigma_{RR}}{\sigma_{LL} + \sigma_{LR} + \sigma_{RL} + \sigma_{RR}}$$

в кинематической области эксперимента E-158 должна уменьшаться за счет ЭСП на  $40\% \pm 3\%$  (здесь  $\sigma \equiv d\sigma / d\cos\theta$  – дифференциальное сечение по полярному углу  $\theta$  с двойным нижним индексом, означающим степени поляризации электронов пучка и мишени). В работе Деннера и Поццорини [12], где ЭСП изучались для произвольной энергии начальных электронов, включая большие значения (планируемая область ПС), для ЭСП было получено примерно такое же значение. В вышеназванных работах были использованы различные ренормализационные схемы: в [11] –  $\overline{MS}$ , а в [12] – ренормализационная схема на массовой поверхности (РМП). Стоит заметить, что в этих работах были включены не все вклады в ЭСП, например, полностью игнорировался вклад жесткого тормозного излучения, которое впервые для интересующего нас процесса (в эксперименте E-158) было учтено в работе Петриелло [13]. Позднее, в работах [14], [15] и [16], также посвященных расчету ЭСП для эксперимента E-158, и где применялся ковариантный метод выделения инфракрасной расходимости [17] и РМП, было получено хорошее согласие с [11–13] для основных вкладов в ЭСП. Наконец, в работе [18] впервые рассчитаны ЭСП для эксперимента MOLLER, там применялась РМП с перенормировочными условиями Деннера. Расчет ЭСП к мёллеровскому рассеянию для высоких энергий ПС был позднее предпринят также в работе [19]. Там, как и в работах [12, 13], был использован параметр  $\omega$ , который разделяет области мягких и жестких фотонов и применялась Монте-Карло техника для интегрирования по фазовому пространству жесткого фотона, что существенно расширило возможности применения данного подхода. Для оценки наиболее важной при высокой энергии части ЭСП, соответствующей боксам с двумя массивными бозонами, применялся асимптотический подход, численно было получено хорошее согласие результатов [19] и [12].

Электромагнитная часть ЭСП, которая доминирует в области невысоких энергий над слабой частью, но, взятая отдельно, не дает вклада в нарушающие четность наблюдаемые и важна, например, для целей поляриметрии, была оценена впервые в работе [20]. Другой

расчет был предпринят в [21], где основное внимание уделено нахождению компактных, удобных для численной оценки выражений и исследованию эффектов зависимости от экспериментальных ограничений на неупругость (inelasticity) или квадрат потерянной массы (missing mass square). На основе этого расчета был построен Монте-Карло генератор MERADGEN [22], полезный для определения поляризации электронного пучка.

«Чистота» мёллеровского рассеяния позволит не только получить значения важнейших параметров стандартной модели с беспрецедентной точностью, но и, возможно, открыть доступ к новой физике. Новый ультраточный эксперимент MØLLER по измерению угла смешивания с 11 ГэВ-ными электронами, который начнется в ближайшее время в JLab, и планируемые эксперименты на ИС в мёллеровской моде требуют учета эффекта высших поправок все с большей точностью. В работе [23] рассчитаны электрослабые радиационные поправки к наблюдаемой асимметрии мёллеровского рассеяния к этим двум экспериментам. Результаты получены в аналитической (компактной) и численной (компьютерные коды) форме. Численный анализ показывает значительный масштаб полученных эффектов (в кинематике JLab асимметрия понижается на ~70 %, для коллайдерной постановки этого эксперимента, например, при  $\sqrt{s}=1$  ТэВ имеет место понижение на ~ 60 %) и их сильную зависимость от экспериментальных ограничений. Важным результатом работы [23] является установление независимости полных ЭСП от ренормализационных условий в рамках РМП и от выбора схемы расчета. Отдельный интерес представляет доказательство независимости конечного результата от каких-либо нефизических параметров.

Выработанная в работе [23] стратегия расчета однопетлевых ЭСП безусловно будет полезна для вычисления двухпетлевых ЭСП, учет которых, например, для условий эксперимента MØLLER в JLab совершенно необходим в связи с высокой планируемой точностью этого эксперимента.

### Литература

1. Observation of target electron momentum effects in single-arm Møller polarimetry / M. Swartz et. al. // Nucl. Instrum. Methods A. – 1995. – V. 363. – P. 526.
2. A high-rate coincidence Møller polarimeter / P. Steiner [et al.] // Nucl. Instrum. Methods A. – 1998. – V. 419. – P. 105.
3. A Møller polarimeter for high energy electron beams / H. Band [et al.] // Nucl. Instrum. Methods A. – 1997. – V. 400. – P. 24.

4. A high-precision polarimeter / M. Hauger [et al.] // Nucl. Instrum. Methods A. – 2001. – V. 462. – P. 382.
5. A variable energy Møller polarimeter at the MIT-Bates Linear Accelerator Center / J. Arrington [et al.] // Nucl. Instrum. Methods A. – 1992. – V. 311. – P. 39.
6. Alexander, G. Møller scattering polarimetry for high-energy  $e^+e^-$  linear colliders / G. Alexander, I. Cohen // Nucl. Instrum. Methods A. – 2002. – V. 486. – P. 552 [hep-ex/0006007].
7. Precision low-energy weak neutral current experiments / K.S. Kumar [et al.] // Mod. Phys. Lett. A. – 1995. – V. 10. – P. 2979; Kumar, K.S. The E158 experiment / K.S. Kumar // Eur. Phys. J. A. – 2007. – V. 32. – P. 531; Observation of parity nonconservation in Møller scattering / SLAC E158 Collab. P.L. Anthony [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2004. – V. 92, 181602 [hep-ex/0312035].
8. Erler, J. The weak mixing angle at low energies / J. Erler, M. Ramsey-Musolf // Phys. Rev. D. – 2005. – V. 72, 073003 [hep-ph/0409169].
9. Benesch, J. [et al.] An ultra-precise measurement of the weak mixing angle using Møller Scattering [электрон. ресурс]. – JLab, 2008. – Режим доступа: [www.jlab.org/~arnd/moller\\_proposal.pdf](http://www.jlab.org/~arnd/moller_proposal.pdf)
10. Heusch, C.A. The international linear collider in its electron-electron version / C.A. Heusch // Int. J. Mod. Phys. A. – 2005. – V. 20. – P. 7289; Feng, J.L. / J.L. Feng // Int. J. Mod. Phys. A. – 2000. – V. 15. – P. 2355.
11. Czarnecki, A. Electroweak radiative corrections to polarized Møller scattering asymmetries / A. Czarnecki, W. Marciano // Phys. Rev. D, – 1996. – V. 53. – P. 1066.
12. Denner, A. Electroweak radiative corrections to polarized Møller scattering at high energies / A. Denner, S. Pozzorini // Eur. Phys. J. C. – 1999. – V. 7. – P. 185.
13. Petriello, F.J. Radiative corrections to fixed target Møller scattering including hard bremsstrahlung effects / F.J. Petriello // Phys. Rev. D 67. – 2003, 033006 [hep-ph/0210259].
14. Зыкунов, В.А. Электрослабые радиационные эффекты в поляризованном меллеровском рассеянии / В.А. Зыкунов // Ядерная физика. – 2004. – Т. 67. – С. 1366.
15. Electroweak radiative corrections to parity-violating asymmetry in Møller scattering / Yu. Kolomensky [et al.] // Int. J. Mod. Phys. A. – 2005. – V. 20. – P. 7365.
16. First order QED corrections to the parity-violating asymmetry in Møller scattering / V.A. Zykunov [et al.] // SLAC-PUB-11378. – 2005. – [hep-ph/0507287v1].

17. Bardin, D.Yu. On an exact calculation of the lowest order electromagnetic correction to the point particle elastic scattering / D.Yu. Bardin, N.M. Shumeiko, Nucl. Phys. B. – 1977. – V. 127. – P. 242; Бардин, Д.Ю. Теоретическая оценка систематических эффектов в экспериментах по глубоконеупругому  $l^\pm N$  –рассеянию / Д.Ю. Бардин // Ядерная физика. – 1979. – Т. 29. – С. 969.

18. Electroweak radiative corrections for polarized Møller scattering at future 11 GeV JLab experiment / A. Aleksejevs [et al.] // Phys. Rev. D. – 2010. – V. 82. – P. 093013.

19. Зыкунов, В.А. Полный расчет электрослабых поправок для поляризационного меллеровского рассеяния при высоких энергиях / В.А. Зыкунов // Ядерная физика. – 2009. – Т. 72. – С. 1540.

20. Shumeiko, N.M. The QED lowest-order radiative corrections to the two polarized identical fermion scattering / N.M. Shumeiko, J.G. Suarez // J. Phys. G. – 2000. – V. 26. – P. 113.

21. Ilyichev, A.N. Lowest order QED radiative corrections to longitudinally polarized Møller scattering / A.N. Ilyichev, V.A. Zykunov // Phys. Rev. D. – 2005. – V. 72, 033018 [hep-ph/0504191].

22. Afanasev, A. MERADGEN 1.0: Monte Carlo generator for the simulation of radiative events in parity conserving doubly-polarized Møller scattering / A. Afanasev, Eu. Chudakov, A. Ilyichev, V. Zykunov // Comput. Phys. Commun. – 2007. – V. 176. – P. 218 [hep-ph/0603027].

23. Алексеев, А.Г. Прецизионный расчет наблюдаемых поляризационного меллеровского рассеяния: от энергии JLab до ILC / А.Г. Алексеев, С.Г. Барканова, В.А. Зыкунов // Ядерная физика. – 2011. – Т. 74. – С. 1.

**В.Н. Капшай, Ю.А. Гришечкин, М.С. Данильченко**

**УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Беларусь**

### **ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ ДЛЯ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ**

В работе найдены численные решения интегральных уравнений теории поля, описывающих связанные  $s$ -состояния: одночастичного уравнения Клейна-Гордона-Фока (КГФ) [1] и двухчастичных уравне-



ний квазипотенциального типа [2, 3]. Уравнение КГФ рассмотрено в обычном координатном представлении, а двухчастичные – в релятивистском конфигурационном представлении (РКП) [4], которое, по сути, является релятивистским обобщением обычного координатного представления квантовой механики.

Решения уравнений получены в случае модельного потенциала следующего вида ( $\lambda$ ,  $a$ ,  $\beta$  – константы):

$$U(r) = \lambda V(r) = \lambda(r^2 - a^2) \exp(-\beta r), \quad (1)$$

где величина  $r$  в случае одночастичного уравнения является модулем радиус-вектора в обычном координатном представлении, а в случае двухчастичных уравнений – модулем радиус-вектора в РКП. Рассмотрение потенциала (1) интересно по следующим причинам. Во-первых, вид этого потенциала при  $\lambda > 0$  (рисунок 1) указывает на возможность существования как связанных, так и резонансных состояний. Во-вторых, потенциал (1) аналитичен, а значит, для его исследования на наличие резонансных состояний можно применить метод комплекс-скейлинга [5, 6]. И, в-третьих, этот потенциал может иметь связанные (и/или резонансные) состояния и при  $\lambda < 0$ .

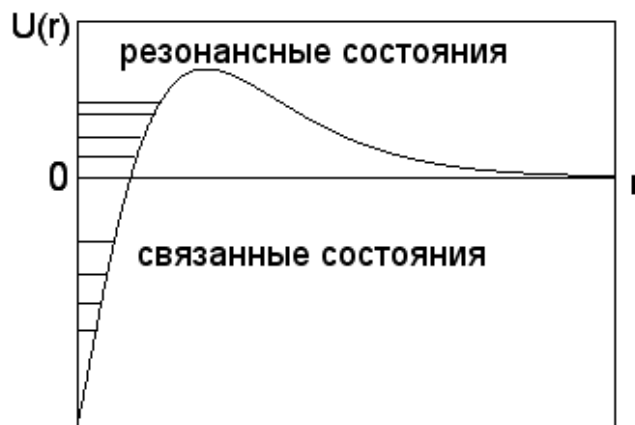


Рисунок 1 – Возможность существования связанных и резонансных состояний

Интегральные уравнения, описывающие связанные  $s$ -состояния, имеют следующий вид (индекс  $j = \overline{1,5}$  соответствует пяти вариантам релятивистских уравнений):

$j = 1 (j = 3)$  – уравнение Логунова-Тавхелидзе (модифицированное),

$j = 2 (j = 4)$  – уравнение Кадышевского (модифицированное),

$j = 5$  – уравнение Клейна-Гордона-Фока):

$$\psi^{(j)}(r) = \lambda \int_0^{\infty} dr' g^{(j)}(w, r, r') V(r') \psi^{(j)}(r'), \quad r \geq 0, \quad (2)$$

где  $\psi^{(j)}(r)$  – волновая функция,  $g^{(j)}(w, r, r')$  – функция Грина (ФГ), величина  $w \in (0, \pi/2)$  связана с энергией частицы  $E$  соотношением  $E = m \cos w$  [7] ( $m$  – масса каждой частицы). ФГ уравнения Логунова-Тавхелидзе имеет следующий вид (все ФГ при  $j=1,2,3,4$  можно найти в [7])

$$g^{(1)}(w, r, r') = \frac{-1}{m \sin 2w} \left[ \frac{\text{sh}[\pi/2 - w] m(r - r')}{\text{sh}[\pi m(r - r')/2]} - \frac{\text{sh}[\pi/2 - w] m(r + r')}{\text{sh}[\pi m(r + r')/2]} \right],$$

(3)

а функция Грина уравнения КГФ –

$$g^{(5)}(w, r, r') = \frac{-1}{2m \sin w} [\exp(-|r - r'| m \sin w) - \exp(-|r + r'| m \sin w)].$$

Решение интегральных уравнений (2) найдено методом квадратур [8]. Замена верхнего бесконечного предела в уравнении некоторой большой величиной  $R$  и представление в нём интеграла в виде суммы согласно одной из квадратурных формул с  $N$  узлами на отрезке  $[0; R]$  даёт ( $r_k, C_k$  – узлы и веса соответственно)

$$\psi^{(j)}(r) = \lambda \sum_{k=1}^N C_k g^{(j)}(w, r, r_k) V(r_k) \psi^{(j)}(r_k). \quad (4)$$

Взяв формулу (4) в точках  $r = r_n, n = \overline{1, N}$ , получим линейную систему алгебраических однородных уравнений, которая имеет следующий вид:

$$\sum_{k=1}^N K_{kn}^{(j)} \psi_k^{(j)} = \lambda^{-1} \psi_n^{(j)}; \quad K_{kn}^{(j)} = C_n V(r_n) g^{(j)}(w, r_k, r_n); \quad \psi_k^{(j)} = \psi^{(j)}(r_k)$$

(5)

Контроль точности нахождения собственных значений константы связи  $\lambda$  при фиксированном значении энергии (параметра  $w$ ) проводился параллельным решением: для двухчастичных уравнений (2) – соответствующих им уравнений в импульсном представлении, для одночастичного уравнения (2) – соответствующего ему дифференциального уравнения.

На рисунках 2 и 3 приведены результаты численных расчётов условий существования связанных состояний (все вычисления проводились для параметров  $m=1, a=5, \beta=1$ ). Результаты численных расчётов собственных значений найдены с точностью до  $10^{-5}$  и выше для всех случаев, кроме второго возбужденного состояния в случае уравнения КГФ (с точностью до  $10^{-3}$ ).

На рисунках 4 и 5 приведены результаты численных расчётов для

волновых функций при  $w = 0.4$ : а)  $\lambda > 0$ ; б)  $\lambda < 0$  (основные состояния обозначены сплошной линией, первые возбужденные состояния – штриховой линией, вторые возбужденные состояния – пунктирной линией). На рисунке видно, что число нулей волновой функции при  $r \neq 0$  равно номеру возбуждённого состояния (в основном состоянии нулей нет).

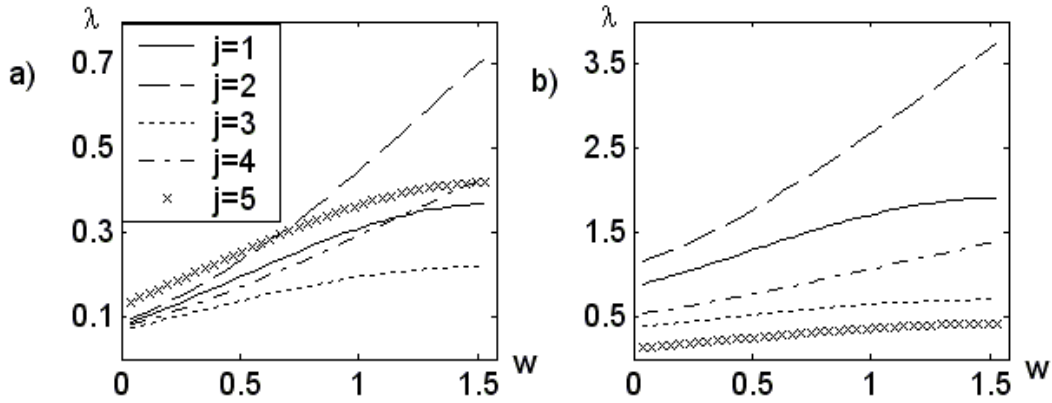


Рисунок 2 – Условия существования связанных состояний для  $\lambda > 0$ : а) основные состояния, б) первые возбуждённые состояния

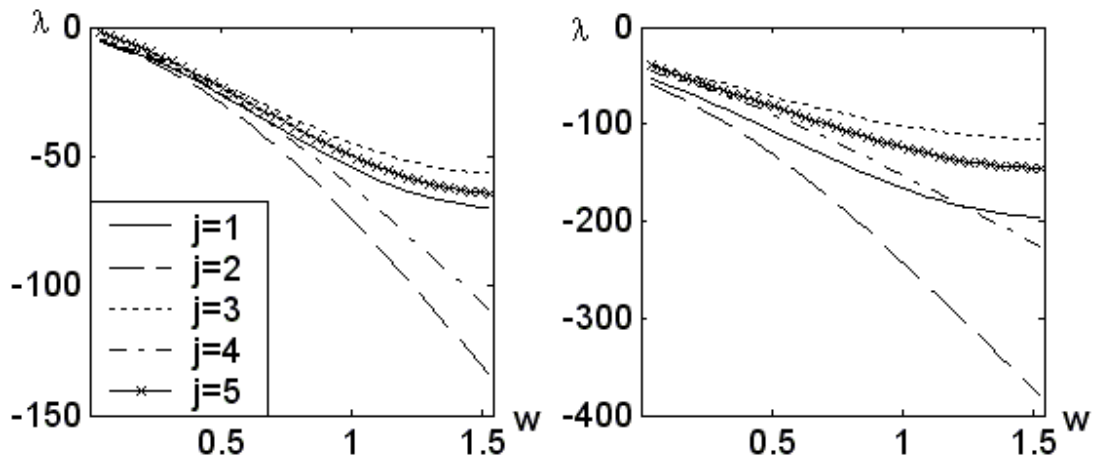


Рисунок 3 – Условия существования связанных состояний для  $\lambda < 0$ : а) основные состояния, б) первые возбуждённые состояния

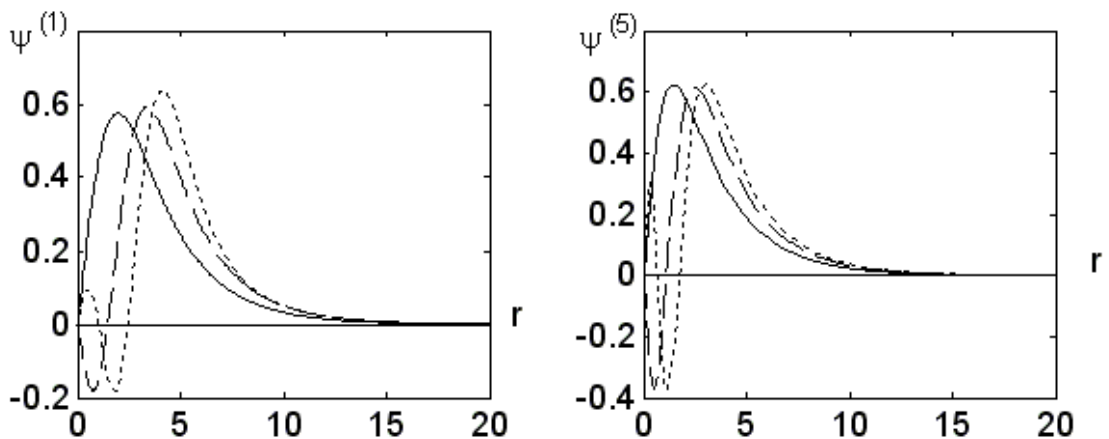


Рисунок 4 – Волновые функции при  $\lambda > 0$ : а)  $j = 1$ , б)  $j = 5$

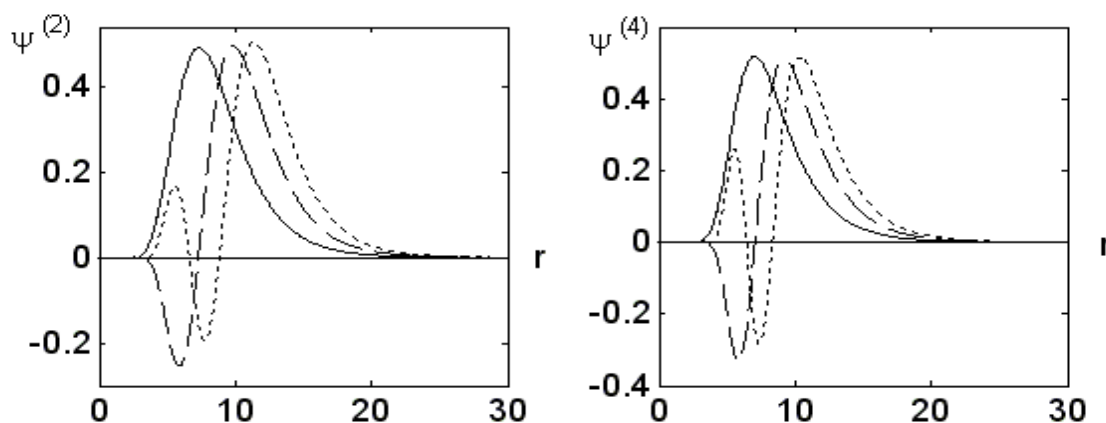


Рисунок 5 – Волновые функции при  $\lambda < 0$ : а)  $j = 2$ , б)  $j = 4$

Отметим, что использованный метод интегральных уравнений в РКП позволяет находить решения однозначно, что выгодно отличает его от других методов и позволяет надеяться на его эффективность для состояний рассеяния.

### Литература

1. Мессиа, А. Квантовая механика / А. Мессиа. – Том 2. – Москва: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1979. – 588 с.
2. Logunov, A.A. Quasi-Optical Approach in Quantum Field Theory / A.A. Logunov, A.N. Tavkhelidze // *Nuovo Cimento*. – 1963. – Vol. 29, № 2. – P. 380–399.
3. Kadyshevsky, V.G. Quasipotential type equation for the relativistic scattering amplitude / V.G. Kadyshevsky // *Nucl. Phys.* – 1968. – Vol. B6, № 1. – P. 125–148.
4. Кадышевский, В.Г. Трёхмерная формулировка релятивистской проблемы двух тел / В.Г. Кадышевский, Р.М. Мир-Касимов, Н.Б. Скачков // *ЭЧАЯ*. – 1972. – Т. 2, № 3. – С. 635–690.
5. Nuttal, J. Method of Complex Coordinates for Three-Body Calculations above the Breakup Threshold / J. Nuttal, H.L. Cohen // *Phys. Rev.* – 1969. – Vol. 188. – P. 1542–1544.
6. Balslev, E. Spectral properties of many body Schrodinger operators with dilation-analytic interactions / E. Balslev, J.M. Combes // *Commun. Math. Phys.* – 1971. – Vol. 22. – P. 280–294.
7. Alferova, T.A. Expansion in terms of matrix elements of the Lorentz group unitary irreducible representations and integral equations for scattering states relativistic wave functions / T.A. Alferova, V.N. Kapshai // *Non-linear phenomena in complex systems: Proc. of the Sixth Annual Seminar NPCS'97 / Academy of Sciences of Belarus. Inst. of Phys.* – Minsk. – 1998. – P. 78–85.

8. Бахвалов, Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – 6-е изд. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 636 с.

**В.Н. Капшай, К.П. Шилева**

**УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Беларусь**

## **ВЫЧИСЛЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ РЕЗОНАНСНЫХ БЫСТРОТ ДЛЯ МОДЕЛЬНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ПОТЕНЦИАЛОВ**

В релятивистском конфигурационном представлении интегральные уравнения (ИУ), описывающие  $s$ -состояния рассеяния системы двух частиц с нулевым спином, имеют следующий вид [1]:

$$\psi_{(j)}(\chi_q, r) = \sin \chi_q m r + \int_0^{\infty} dr' G_{(j)}(\chi_q; r, r') V(r') \psi_{(j)}(\chi_q, r'). \quad (1)$$

Здесь индекс  $j=1,2,3,4$  соответствует одному из четырех вариантов уравнений: 1 – Логунова-Тавхелидзе, 2 – Кадышевского, 3 – модифицированное уравнение Логунова-Тавхелидзе, 4 – модифицированное уравнение Кадышевского,  $\chi_q$  – вещественная быстрота,  $\psi_{(j)}(\chi_q, r)$  – волновая функция,  $V(r)$  – релятивистский потенциал,  $G_{(j)}(\chi_q; r, r')$  – функция Грина (ФГ). Быстрота  $\chi_q$  связана с релятивистской энергией  $2E_q$  соотношением  $2E_q = 2m \cosh \chi_q$ . При  $j=1$

$$G_{(1)}(\chi_q; r, r') = \frac{-i}{m \sin 2\chi_q} \left[ \frac{\sinh[(\pi/2 + i\chi_q)m(r-r')]}{\sinh[\pi m(r-r')/2]} - \frac{\sinh[(\pi/2 + i\chi_q)m(r+r')]}{\sinh[\pi m(r+r')/2]} \right],$$

аналогичный вид имеют и остальные ФГ (см. [1]).

По аналогии с нерелятивистским случаем ИУ для резонансных состояний должно быть однородным, его решения будут существовать только для дискретных комплексных значений энергии (быстроты). Интегральное уравнение для резонансных состояний запишем в виде ( $\chi_q = \xi_q + iw_q$ )

$$\psi_{(j)}(\xi_q + iw_q, r) = \int_0^{\infty} dr' G_{(j)}(\xi_q + iw_q; r, r') V(r') \psi_{(j)}(\xi_q + iw_q, r'). \quad (2)$$

Численное решение ИУ (2) возможно лишь для достаточно быстро убывающих при  $r \rightarrow \infty$  потенциалов, так как ФГ и волновая функция,

вообще говоря, не убывают при  $r \rightarrow \infty$ . Более того, даже для таких потенциалов решение ИУ (2) возможно лишь в некоторой полосе  $w_{min} \leq w_q \leq w_{max}$ , зависящей от параметров потенциала. Между тем, резонансные быстроты как правило оказываются за пределами этой полосы. Для того чтобы решить ИУ (2) в области комплексных  $\chi_q$ , отличной от первоначальной полосы, воспользуемся хорошо известным в нерелятивистской теории методом комплексного поворота [2, 3]: перейдем от вещественных переменных  $r, r'$  к комплексным  $z = r \exp(i\theta)$ ,  $z' = r' \exp(i\theta)$ ,  $0 \leq \theta \leq \theta_{max}$  и представим уравнение (2) в виде

$$\psi_{(j)}^{(\theta)}(\xi_q + iw_q, r) = \int_0^\infty dr' G_{(j)}^{(\theta)}(\xi_q + iw_q; r, r') V^{(\theta)}(r') \psi_{(j)}^{(\theta)}(\xi_q + iw_q, r'), \quad (3)$$

где введены следующие обозначения:

$$\psi_{(j)}^{(\theta)}(\chi_q, r) = \psi_{(j)}(\chi_q, z), \quad V^{(\theta)}(r') = \exp(i\theta)V(z'), \quad G_{(j)}^{(\theta)}(\chi_q; r, r') = G_{(j)}(\chi_q; z, z').$$

Для численного решения уравнения (3) заменим интегрирование суммированием, используя аппроксимацию  $\int_a^b f(r)dr \cong \sum_{k=1}^N f(r_k)\omega_k$ .

Координаты узлов  $r_k$  и веса  $\omega_k$  зависят от способа приближения. В этой работе использованы аппроксимации прямоугольниками и Гаусса-Лежандра [4]. В результате получим систему однородных алгебраических уравнений для каждого индекса  $j$ :

$$\mathbf{M}^{(j)}\Psi^{(j)} = 0, \quad (4)$$

где  $\Psi^{(j)}$  – вектор значений функции  $\psi_{(j)}^{(\theta)}(\chi_q, r)$  в точках  $r = r_k$ ,  $\mathbf{M}^{(j)}$  – матрица

$$M_{nk}^{(j)} = \delta_{nk} - \omega_k G_{(j)}^{(\theta)}(\chi_q, r_n, r_k) V^{(\theta)}(r_k).$$

Система (4) имеет нетривиальное решение только при выполнении условия

$$d_{(j)}(\chi_q) = d_{(j)}(\xi_q + iw_q) = \det(\mathbf{M}_{(j)}) = 0. \quad (5)$$

Выделяя действительную и мнимую часть функции  $d_{(j)}(\chi_q)$ , уравнение (5) можно свести к системе нелинейных уравнений

$$\text{Re}[d_{(j)}(\chi_q)] = 0, \quad \text{Im}[d_{(j)}(\chi_q)] = 0. \quad (6)$$

Вычисляя  $d_{(j)}(\chi_q)$  при различных значениях быстроты (на сетке в плоскости  $\chi_q$ ), можно определить приблизительное положение нулей детерминанта, которые затем играют роль стартовых при решении системы (6) с использованием программы, основанной на непрерывном аналоге метода Ньютона [5].

Рассмотрим решение ИУ (6) в случае потенциала ( $V_0, a$  – пара-

метры)

$$V(r) = V_0(r^2 - a^2)\exp(-r). \quad (7)$$

На рисунке 1 представлены результаты вычислений нулей определителя  $d_{(j)}(\chi_q)$  (при  $m=1$ ), сплошные линии соответствуют нулям его действительной части, штриховые линии – нулям мнимой части, в точках их пересечения выполняется условие (5). Отметим, что для потенциала (7) с параметрами  $V_0 = 15$ ,  $a = 1$  при  $j=3$  кроме резонансных состояний наблюдается также связанное состояние с чисто мнимой быстротой. Результаты вычислений значений  $\chi_q$  для первых трех резонансов представлены в таблицах 1–3.

Рассмотрим также уравнение (6) с потенциалом

$$V(r) = V_0(r^2 - a^2) \frac{\text{ch}(\pi - 1)r}{\text{ch} \pi r}, \quad (8)$$

при вещественных  $r$  мало отличающихся от (7).

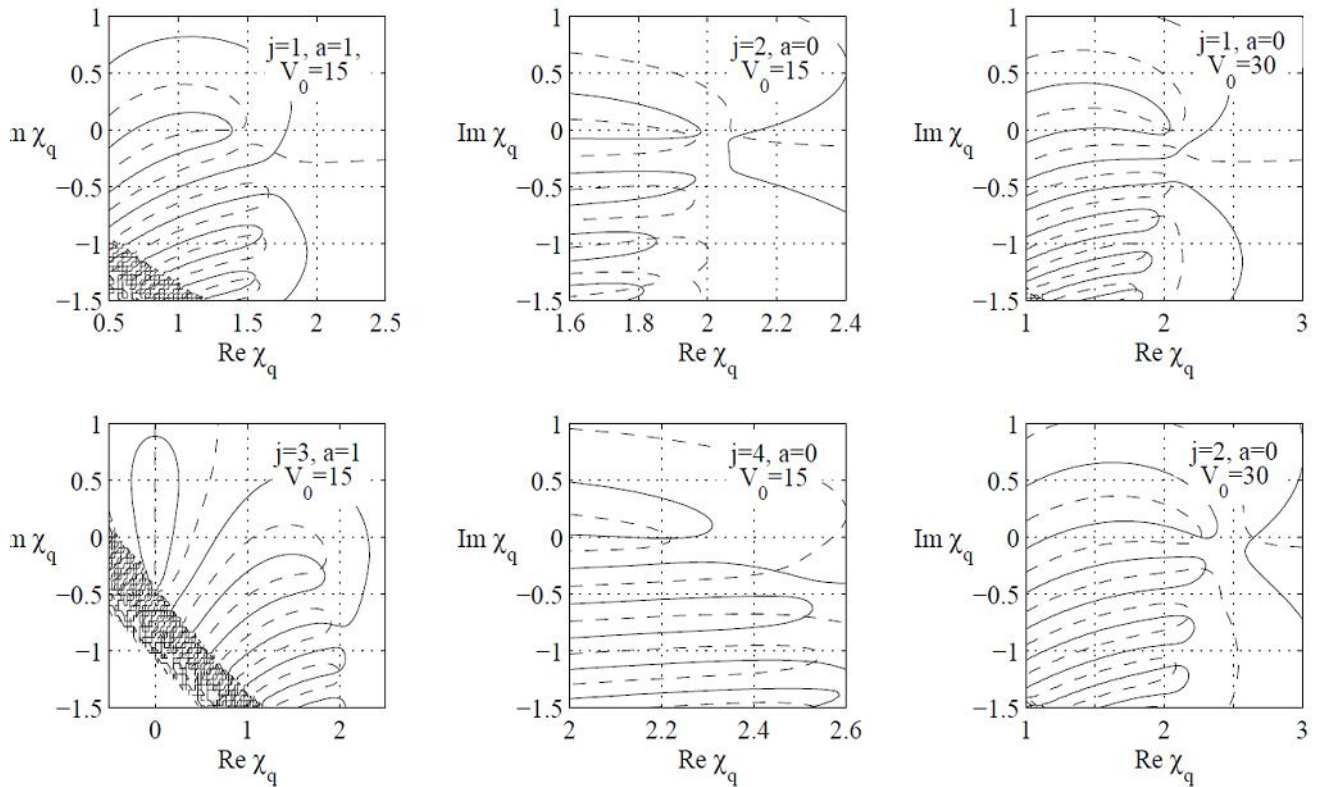


Рисунок 1 – Нули определителя  $d_{(j)}(\chi_q)$

Результаты вычислений резонансных быстрот для этого потенциала приведены в таблице 4. Отметим, что поведение потенциалов **Ошибка! Источник ссылки не найден.** и **Ошибка! Источник ссылки не найден.** с одинаковыми  $V_0$  и  $a$  на луче  $z = r \exp(i\theta)$  заметно отличается, но поскольку при вещественных  $r$

они практически совпадают, то резонансные значения  $\chi_q$  для этих двух потенциалов очень близки.

Таблица 1 – Резонансные быстроты  $\chi_q$  для потенциала  
**Ошибка! Источник ссылки не найден.** с  $V_0 = 15, a = 1$ .

$j=1$		$j=2$		$j=3$		$j=4$	
Re $\chi_q$	Im $\chi_q$	Re $\chi_q$	Im $\chi_q$	Re $\chi_q$	Im $\chi_q$	Re $\chi_q$	Im $\chi_q$
1,39155	-0,00001	1,47341	-0,00097	1,81261	-0,26866	1,11413	$-8,9 \times 10^{-9}$
1,69837	-0,19491	1,97900	-0,06809	1,90832	-0,76643	2,22619	-0,14146 -
1,65552	-0,56247	1,82156	-0,48127	2,00151	-1,17815	2,32451	0,59111



Таблица 2 – Резонансные быстроты  $\chi_q$  для потенциала  
**Ошибка! Источник ссылки не найден.** с  $V_0 = 15, a = 0$ .

$j=1$		$j=2$		$j=3$		$j=4$	
Re $\chi_q$	Im $\chi_q$	Re $\chi_q$	Im $\chi_q$	Re $\chi_q$	Im $\chi_q$	Re $\chi_q$	Im $\chi_q$
1,75242	-0,01898	1,95799	-0,05449	1,85798	-0,08847	2,22129	-0,00872
1,80414	-0,27212	2,08837	-0,05025	2,01771	-0,51116	2,44637	-0,29588
1,75427	-0,59240	1,92227	-0,52186	2,12108	-0,90929	2,51247	-0,70037

Таблица 3 – Резонансные быстроты  $\chi_q$  для потенциала  
**Ошибка! Источник ссылки не найден.** с  $V_0 = 30, a = 0$ .

$j=1$		$j=2$		$j=3$		$j=4$	
Re $\chi_q$	Im $\chi_q$	Re $\chi_q$	Im $\chi_q$	Re $\chi_q$	Im $\chi_q$	Re $\chi_q$	Im $\chi_q$
2,04169	-0,00224	2,26757	-0,00039	2,17001	-0,06651	2,67137	-0,00008
2,11460	-0,17905	2,64648	-0,00632	2,35047	-0,46436	2,98749	-0,15071
2,05348	-0,45659	2,29731	-0,28369	2,47000	-0,85341	3,03771	-0,49465

Таблица 4 – Резонансные быстроты  $\chi_q$  для потенциала  
**Ошибка! Источник ссылки не найден.** с  $V_0 = 30, a = 0$ .

$j=1$		$j=2$		$j=3$		$j=4$	
Re $\chi_q$	Im $\chi_q$	Re $\chi_q$	Im $\chi_q$	Re $\chi_q$	Im $\chi_q$	Re $\chi_q$	Im $\chi_q$
2,04487	-0,00255	2,27279	-0,00057	2,17362	-0,06901	2,68320	-0,00011
2,11542	-0,18014	2,64719	-0,00618	2,35322	-0,46746	2,98860	-0,15278
2,05456	-0,45702	2,29805	-0,28482	2,47348	-0,85466	3,03932	-0,49605

Таким образом, метод поиска резонансов, использовавшийся ранее для нерелятивистских систем [6], дает положительные результаты при его обобщении на релятивистский случай.

## Литература

1. Alferova, T.A. Expansion in terms of matrix elements of the Lorentz group unitary irreducible representations and integral equations for scattering states relativistic wave functions / T.A. Alferova, V.N. Kapshai // Non-linear phenomena in complex systems: Proceed. of the Sixth Annual Seminar NPC'S'97; Academy of Sciences of Belarus. Inst. of Phys. – Minsk. – 1998. – P. 78–85.
2. Nuttal, J. Method of Complex Coordinates for Three-Body Calculations above the Breakup Threshold / J. Nuttal, H.L. Cohen // Phys Rev. – 1969. – Vol.188. – P. 1542–1544.
3. Balslev, E. Spectral properties of many body Schrödinger operators with dilation-analytic interactions / E. Balslev, J.M. Combes // Commun. Math. Phys. – 1971. – Vol. 22. – P. 280–294.
4. Numerical Recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Computing / W.H.Press [et al.] – 2nd ed. – Cambridge University Press, 2001. – 920 p.
5. Abrashkevich, A. CANM, a program for numerical solution of a system of nonlinear equations using the continuous analog of Newton's method / A.Abrashkevich, I.V. Puzynin // Comput. Phys. Commun. – 2004. – Vol. 156. – P. 154–170.
6. Капшай, В.Н. Определение влияния резонансов на сечение рассеяния на основе интегрального уравнения Фредгольма / В.Н. Капшай, К.П. Шиляева // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 4(5). – С. 10–17.

**В.В. Кисель<sup>1</sup>, Г.Г. Крылов<sup>2</sup>, Е.М. Овсиюк<sup>3</sup>,  
М. Амирфахриан<sup>4</sup>, В.М. Редьков<sup>4</sup>**

<sup>1</sup>УО «Белорусский государственный педагогический университет имени М. Танка», Беларусь,

<sup>2</sup>Белорусский государственный университет, Беларусь,

<sup>3</sup>УО «Мозырский государственный педагогический университет имени И.П. Шамякина», Беларусь,

<sup>4</sup>Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси, Беларусь

## **ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ ЧАСТИЦЫ С ПОЛЯРИЗУЕМОСТЬЮ В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ**

Рассмотрим задачу о волновых функциях для скалярной частицы с поляризуемостью [1], [2] во внешнем кулоновском поле. После разделения переменных задача о релятивистской скалярной частице в

кулоновском поле сводится к виду [3]

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \left( -K^2 + \frac{2\varepsilon\alpha}{r} - \frac{J^2}{r^2} + \frac{\Sigma^2}{r^4} \right) f(r) = 0, \quad (1)$$

$$\varepsilon^2 - M^2 = -K^2, \quad j(j+1) - \alpha^2 = J^2, \quad \sigma \frac{\alpha^2}{M^2} = \Sigma^2.$$

Исследуем поведение квадрата обобщенного радиального импульса  $P^2(r)$ .

Чтобы понять детали хода кривой  $P^2(r)$ , разложим выражение для  $P^2(r)$  на множители и найдем классические точки поворота:

$$P^2(r) = \frac{(\varepsilon^2 - M^2)(r - r_1)(r - r_2)(r - r_3)(r - r_4)}{r^4} = 0.$$

В результате получаем систему уравнений для корней полинома 4-й степени:

$$-\frac{2\varepsilon\alpha}{\varepsilon^2 - M^2} = r_1 + r_2 + r_3 + r_4, \quad (2a)$$

$$-\frac{J^2}{\varepsilon^2 - M^2} = r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_1 r_4 + r_2 r_3 + r_2 r_4 + r_3 r_4, \quad (2b)$$

$$0 = r_1 r_3 r_4 + r_2 r_3 r_4 + r_3 r_1 r_2 + r_4 r_1 r_2, \quad (2c)$$

$$\frac{\Sigma^2}{\varepsilon^2 - M^2} = r_1 r_2 r_3 r_4. \quad (2d)$$

Рассмотрим только случаи **связанных состояний**. В зависимости от знака величины  $\Sigma^2$  существуют две возможности.

$$I \quad \varepsilon^2 - M^2 < 0, \quad \Sigma^2 = \sigma(\alpha^2/M^2) < 0;$$

при этом из (2) следует, что из четырех корней два могут быть положительными и два отрицательными

$$r_1 < 0, \quad r_2 < 0, \quad r_3 > 0, \quad r_4 > 0.$$

Используя уравнения (2a) и (2b), можно выразить два корня  $r_1, r_2$  через два других  $r_3, r_4$  (классических точек поворота):

$$r_1 = \frac{1}{2} \left[ - \left( r_3 + r_4 - \frac{2\varepsilon\alpha}{M^2 - \varepsilon^2} \right) - \sqrt{\left( r_3 + r_4 - \frac{2\varepsilon\alpha}{M^2 - \varepsilon^2} \right)^2 + \frac{4\Sigma^2}{(M^2 - \varepsilon^2)r_3 r_4}} \right],$$

$$r_2 = \frac{1}{2} \left[ - \left( r_3 + r_4 - \frac{2\varepsilon\alpha}{M^2 - \varepsilon^2} \right) + \sqrt{\left( r_3 + r_4 - \frac{2\varepsilon\alpha}{M^2 - \varepsilon^2} \right)^2 + \frac{4\Sigma^2}{(M^2 - \varepsilon^2)r_3 r_4}} \right];$$

Второй возможный случай существования связанных состояний реализуется при положительном  $\Sigma^2$ :

$$II \quad \varepsilon^2 - M^2 < 0, \quad \Sigma^2 = \sigma \frac{\alpha^2}{M^2} > 0;$$

при этом из (2) следует, что три корня могут быть положительными и один отрицательным:

$$r_1 < 0, \quad r_2 > 0, \quad r_3 > 0, \quad r_4 > 0, \\ r_1 = -\frac{r_2 r_3 r_4}{r_3 r_4 + r_3 r_2 + r_4 r_2}, \quad r_1 = (r_2 + r_3 + r_4 - \frac{2\varepsilon\alpha}{M^2 - \varepsilon^2}) < 0.$$

Формулы, выражающие корни  $r_1$  и  $r_2$  через корни  $r_3, r_4$ , будут теми же, однако теперь параметр  $\Sigma^2 > 0$ , и соответственно корень  $r_2$  будет положительным. Возможна также ситуация, когда один корень положительный, три отрицательных

$$r_1 < 0, \quad r_2 > 0, \quad r_3 < 0, \quad r_4 > 0, \quad r_4 = -\frac{r_1 r_2 r_3}{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3};$$

Теперь обратимся к анализу дифференциального уравнения (1). Введем новую переменную

$$x = \frac{i(-K^2 \Sigma^2)^{1/4} r + \Sigma}{i(-K^2 \Sigma^2)^{1/4} r - \Sigma}, \quad r = -\frac{i\Sigma}{(-K^2 \Sigma^2)^{1/4}} \frac{(x+1)}{(x-1)}.$$

Легко установить, как в переменной  $x$  выглядят особенности  $r = 0$  и  $r = \infty$ :

$$r = \infty \Rightarrow x = +1, \quad r = 0 \Rightarrow x = -1.$$

В общем случае переменная  $x$  является комплексной:

$$x(r) = \frac{iAr + \Sigma}{iAr - \Sigma}, \quad (-K^2 \Sigma^2)^{1/4} = [(\varepsilon^2 - M^2) \Sigma^2]^{1/4} = A.$$

Возможны четыре варианта

$$(\varepsilon^2 - M^2, \Sigma^2) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} (+, +) & (+, -) \\ (-, +) & (-, -) \end{array} \right\}.$$

Дальше ограничимся только случаем возможных **связанных состояний**, когда нужно предполагать выполненным неравенство  $\varepsilon^2 - M^2 < 0$ . Это соответствует вариантам  $(-, +)$  и  $(-, -)$ . При положительном  $\Sigma^2$  переменная  $x$  будет комплексной (пробегающей некий контур на комплексной плоскости)

$$x(r) = \frac{iAr + \Sigma}{iAr - \Sigma} = -\frac{\Sigma^2 - A^2 r^2}{\Sigma^2 + A^2 r^2} - i \frac{2A\Sigma r}{\Sigma^2 + A^2 r^2} = e^{i\varphi(r)}, \quad |x(r)| = 1;$$

При отрицательных  $\Sigma^2 = -b^2 < 0$  (вариант  $(-, -)$ ) переменная  $x$  будет вещественной

$$x(r) = \frac{Ar + b}{Ar - b}, \quad x \in [-1, +1].$$

Уравнение (1) примет в переменной  $x$  следующий вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \Omega + \frac{2}{x-1} \frac{d}{dx} \Omega + \left( \frac{4K^2 \Sigma^2}{\sqrt{-K^2 \Sigma^2} (x+1)^4} + \frac{4K^2 \Sigma^2}{\sqrt{-K^2 \Sigma^2} (x-1)^4} - \right. \\ \left. - \frac{4i\varepsilon \alpha \Sigma}{(-K^2 \Sigma^2)^{1/4} (x-1)^3} - \frac{J^2}{(x+1)^2} + \frac{2i\varepsilon \alpha \Sigma - J^2 (-K^2 \Sigma^2)^{1/4}}{(-K^2 \Sigma^2)^{1/4} (x-1)^2} + \right. \\ \left. + \frac{i\varepsilon \alpha \Sigma - J^2 (-K^2 \Sigma^2)^{1/4}}{(-K^2 \Sigma^2)^{1/4} (x+1)} + \frac{-i\varepsilon \alpha \Sigma + J^2 (-K^2 \Sigma^2)^{1/4}}{(-K^2 \Sigma^2)^{1/4} (x-1)} \right) f(x) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

С использованием обозначений

$$(-K^2 \Sigma^2)^{1/4} = A, \quad -K^2 \Sigma^2 = A^4, \quad A^2 = \sqrt{-K^2 \Sigma^2} = \pm iK\Sigma,$$

уравнение (3) запишем так:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} f + \frac{2}{x-1} \frac{d}{dx} f + \left( -\frac{4A^2}{(x+1)^4} - \frac{4A^2}{(x-1)^4} - \frac{4i\varepsilon \alpha \Sigma}{A(x-1)^3} - \right. \\ \left. - \frac{J^2}{(x+1)^2} + \frac{2i\varepsilon \alpha \Sigma - J^2 A}{A(x-1)^2} + \frac{i\varepsilon \alpha \Sigma - J^2 A}{A(x+1)} + \frac{-i\varepsilon \alpha \Sigma + J^2 A}{A(x-1)} \right) f(x) = 0. \end{aligned}$$

Применяя подстановку

$$B = \frac{1}{2}, C = -\frac{1}{2}, D = \pm \frac{4iK\Sigma}{A} = \pm 4A, \quad f = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \exp\left(\frac{Dx}{(x+1)(x-1)}\right) F(x),$$

приходим к уравнению для функции  $F$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F}{dx^2} + \left[ \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} - \frac{D}{(x+1)^2} - \frac{D}{(x-1)^2} \right] \frac{dF}{dx} + \\ + \frac{1}{2A(x+1)^3(x-1)^3} \left[ (D^2 A - 8J^2 A - 2A - 16i\varepsilon \alpha \Sigma)x^2 + \right. \\ \left. + (8DA - 32i\varepsilon \alpha \Sigma)x + 2A - 16i\varepsilon \alpha \Sigma - D^2 A + 8J^2 A \right] F = 0. \end{aligned}$$

Это дважды вырожденное уравнение Гойна [3], [4] для функции  $H(\mu, \beta, \gamma, \delta, z)$ :

$$\frac{d^2 H}{dx^2} + \left( \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} - \frac{\mu}{2(x+1)^2} - \frac{\mu}{2(x-1)^2} \right) \frac{dH}{dx} + \frac{\beta x^2 + (\gamma + 2\mu)x + \delta}{(x+1)^3(x-1)^3} H = 0$$

с параметрами

$$\mu = 2D = \pm 8A, \quad \gamma = -\frac{16i\varepsilon \alpha \Sigma}{A},$$

$$\beta = -1 - 4J^2 + 8A^2 - 8i\varepsilon \alpha \frac{\Sigma}{A}, \quad \delta = +1 + 4J^2 - 8A^2 - 8i\varepsilon \alpha \frac{\Sigma}{A};$$

обращаем внимание на выполнение тождества  $\beta + \delta = \gamma$ .

Таким образом, исследована задача о волновых функциях

для скалярной частицы с поляризуемостью во внешнем кулоновском поле. Радиальное уравнение сведено к дважды вырожденному уравнению Гойна. Проведенный численный анализ подтверждает возможность существования связанных состояний в этой системе. Очевидно, что выполненный анализ не является исчерпывающим и требуются дополнительные исследования.

Авторы благодарны участникам научного семинара лаборатории теоретической физики Института физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси за обсуждение результатов работы и полезные советы.

### Литература

1. Федоров, Ф.И. Волновые уравнения с кратными представлениями группы Лоренца. Целый спин / Ф.И. Федоров, В.А. Плетюхов // Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1969. – № 6. – С. 81–88.
2. Плетюхов, В.А. Волновые уравнения с кратными представлениями для частицы со спином 0 / В.А. Плетюхов, Ф.И. Федоров // Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1970. – № 2. – С. 79–85.
3. Редьков, В.М. Тетрадный формализм, сферическая симметрия и базис Шредингера / В.М. Редьков. – Минск: Белорусская наука, 2011.
4. Heun's differential equation / Ed.: A. Ronveaux, F. Arscott. – Oxford: Oxford Univ. Press, 1995.
5. Slavyanov, S.Ju. Special functions. A unified theory based on singularities / S.Ju. Slavyanov, W. Lay. – Oxford: Oxford Univ. Press, 2000.

А.Л. Куиш

Республиканский институт высшей школы, Беларусь

### СВЯЗЬ ТЕОРИЙ В ОБЛАСТИ СИЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В АСПЕКТЕ ПРИНЦИПА СООТВЕТСТВИЯ

В 20-х годах XX века Н. Бором был сформулирован принцип соответствия. Благодаря этому принципу были заложены основы квантовой теории ([1], [2]). Однако этим его роль, как показали более поздние методологические исследования ([3], [4], [5] и др.), не ограничилась. Оказалось, что этот принцип является способом выражения особой связи между теориями, – отношения соответствия, обладающей собственными свойствами [5]. Основываясь на этих исследованиях,

мы проанализируем связь между существующими теориями в области сильного взаимодействия и сделаем выводы об особенностях этой связи, а также теориях, описывающих эту область физической реальности.

Обобщая результаты исследований принципа соответствия можно дать его следующее определение: *две теории, связанные отношением соответствия, являются самостоятельными, отличающимися друг от друга, обособленными структурами, обладающими собственными математическими аппаратами, языками, моделями и теоретическими схемами, содержательными частями и доменами. Вместе с тем, эти теории имеют общую границу, на что указывает стыковка их доменов и асимптотическое соответствие математических аппаратов в пограничных областях действия. Язык, модели описываемых явлений, математический аппарат новой теории, при определённых граничных условиях, переходят к соответствующим элементам теории старой. Между теориями существует преемственная связь, что позволяет использовать понятия, математический аппарат, методологию старой теории в создании теории новой [6].* Используем это определение для анализа связи существующих теорий в области сильного взаимодействия.

Ситуация с описанием сильного взаимодействия ещё недостаточно ясна, а теоретические и экспериментальные данные в этой области ещё недостаточно систематизированы. В качестве основной теории, наиболее полно описывающей сильное взаимодействие, принимается не совсем стройная и ясная теория высокоэнергетических сильных процессов – квантовая хромодинамика (КХД). Теорией адронных процессов является недостаточно полная, не обладающая хорошим математическим аппаратом квантовая мезодинамика (КМз), но которая считается в принципе верной и удовлетворительно качественно описывает эти процессы.

Квантовая мезодинамика была создана Юкавой в 1935 году и существовала для описания сильного взаимодействия в единственном числе достаточно долго, вплоть до начала 70-х годов, до создания основ КХД. Надо сказать, что эта теория почти исключительно качественная (серьёзных количественных результатов с её помощью получить не удалось) и выясняет только механизм действия сильного взаимодействия. Взаимодействие между протонами и нейтронами в этой теории реализуется с помощью промежуточной элементарной частицы, которая получила название мезона. Эта модель имеет также и полевою интерпретацию, в соответствии с которой сильное взаимодействие реализуется пионным полем, причём элементарными актами

этого взаимодействия являются акты излучения и поглощения квантов этого поля – пионов.

Квантовая хромодинамика представляет собой намного более функциональную теорию. Основы её были заложены в 1964 г. Гелл-Манном и Цвейгом. В этой теории предполагается, что нуклоны состоят из кварков (трёх), обладающих „цветом”, который характеризует их силовой заряд. Благодаря определённому сочетанию цветов кварков, из которых состоят адроны, последние являются белыми частицами, то есть, как целостные частицы, адроны цветового заряда не несут. Взаимодействие в этой теории рассматривается как взаимодействие между кварками и реализуется с помощью промежуточных переносчиков, которые называются глюонами. Они тоже обладают цветом, в результате чего взаимодействуют друг с другом. Механизм взаимодействия в этой теории, надо сказать, является достаточно сложным.

В среде физиков бытует мнение, что квантовая хромодинамика является основной и общей теорией сильных взаимодействий, в то время как квантовая мезодинамика рассматривается лишь как переходная теория в их описании. В связи с этим, КХД должна описывать не только область высоких энергий и малых расстояний, что она, вообще говоря, довольно успешно делает, но также и ядерные реакции при малых переданных импульсах и больших расстояниях. Однако на практике, в области адронной физики, как и в случае с квантовой мезодинамикой, она не имеет удовлетворительного количественного описания ядерных процессов.

Проанализируем механизмы взаимодействия в обеих теориях на предмет их корреспонденции. Как было сказано выше, действие ядерных сил в КМз рассматривалось как результат обмена нуклонов пионами. Благодаря квантовой хромодинамике, стало ясно, что в ядерном взаимодействии нуклон участвует не в качестве единого целого, а своими составными частями – кварками. При этом обмен нуклонов пионами не исключается и в квантовой хромодинамике, но его трактовка изменяется. Кварк, принадлежащий одному нуклону, переходит в другой нуклон, кварк, которого в свою очередь, переходит в первый нуклон. В итоге возникает эффективный обмен парой  $q\bar{q}$ , которая и есть пион [7].

На этом примере можно отчётливо наблюдать соответствие кваркового механизма взаимодействия в КХД мезонному механизму в КМз. Налицо его дальнейшая фактуализация (уточнение, углубление), с введением в его структуру кварков. Если теперь при переходе из области действия кварковой физики в область физики адронной



пренебречь параметрами кварков (о которых как известно в КМз речь не ведётся), то механизм взаимодействия КХД переходит в соответствующий механизм КМз.

Отношением соответствия связаны также представления о структуре адронов в КХД и КМз. Во внутреннюю структуру адрона, который представлял собой единую и неделимую частицу в адронной физике, в КХД вводятся дополнительные элементы, и он рассматривается как состоящий из кварков, взаимодействующих посредством глюонов. При этом модель внутренней структуры адронов, находится в соответствии с представлениями о его структуре в адронной физике.

Кроме фактуализации и дальнейшего обобщения механизма взаимодействия в КМз, её представлений о структуре адронов, в КХД получают своё дальнейшее развитие и обобщение, а также наполняются более конкретным содержанием основные понятия предыдущей теории, к которым можно отнести понятие ядерных сил, переносчиков взаимодействия, константы связи и др. Например, что касается понятия ядерных сил, которым оперирует адронная физика, то в КХД ему соответствует понятие сильного взаимодействия, которое имеет более универсальный и общий характер, поскольку относится к значительно большему классу сильных процессов. Кроме этого, в диапазоне высоких энергий имеет место его фактуализация, с введением в его структуру нового механизма, специальных понятий и т. п. То есть связь нового и старого понятий характеризуется отношением соответствия.

Аналогичную ситуацию мы имеем, когда обратимся к анализу констант взаимодействия в этих теориях. Так, в адронной физике для характеристики сильного заряда применяются две разные величины  $g$  и  $f$ , которые входят в структуры конкурирующих выражений для лагранжиана, описывающего ядерные силы [7]. В КХД, как известно, для описания сильного взаимодействия используется эффективная константа связи  $\alpha_s$ , которая имеет более общий и универсальный характер. Анализируя их взаимосвязь, можно сказать, что эффективная константа связи КХД и величины, характеризующие сильный заряд в адронной физике, находятся в отношении соответствия.

Вместе с тем, следует признать, что КХД и КМз являются описаниями различных областей физической действительности. Иными словами они описывают разные домены, отличающиеся как в энергетическом, так и в пространственно-временном масштабах, которые не пересекаются, но стыкуются, имея общую границу, характеристики которой указаны выше. Системы логически взаимосвязанных утверждений этих теорий представляют собой некорреспондирующие и отличные друг от друга структуры. К некорреспондирующим элемен-

там теорий относятся также упомянутые выше их частные понятия. Вместе с тем области описания обеих теорий можно включить в более широкую область, определяющую предмет сильного взаимодействия.

Результаты проведенного анализа связи теорий КХД и КМз указывают на то, что, за исключением строгого соответствия математических аппаратов этих теорий (за неимением такового в КМз), в целом представлены все остальные аспекты их отношения соответствия (корреспонденция моделей репрезентативных объектов, механизмов взаимодействия, общих понятий, теоретических представлений о константах взаимодействия и др.). Это позволяет сделать вывод о том, что данные теории находятся в отношении соответствия.

Анализируя ситуацию в области сильного взаимодействия, основываясь на результатах данного исследования, можно сказать, что существует два уровня сильного взаимодействия: высокоэнергетический и низкоэнергетический, можно так сказать, что существуют два типа сильного взаимодействия. Это означает, что в этой области должны, соответственно, существовать и две теории, описывающие эти уровни взаимодействия. Эти теории должны иметь различные модели и механизмы описываемых объектов и явлений, понятия их описывающие, математические аппараты, должно иметь место наличие границы применимости высокоэнергетических и низкоэнергетических математических описаний, и эти теории должны корреспондировать, или обобщая, находиться в отношении соответствия.

И вовсе не обязательно, чтобы ими были КХД или КМз, или их усовершенствованные версии. Даже не обязательно, что они будут построены на принципах квантовой теории поля (КТП). Однако факт, что, подобно слабому или электромагнитному взаимодействиям, в области сильного взаимодействия должны существовать две различные количественные теории: низкоэнергетическая и высокоэнергетическая, связанные принципом соответствия, является принципиальным.

Это утверждение, наряду со сделанными выше выводами в отношении связи этих теорий, должен стать для физиков направляющим их исследовательский поиск моментом, целью которого будет получение адекватного теоретического описания сильного взаимодействия, двух его разных уровней.

### Литература

1. Бор, Н. Квантовый постулат и новейшее развитие атомной теории. Избр. науч. труды. Т. 2 / Н. Бор. – М.: Наука, 1971.
2. Бор, Н. О строении атомов и молекул. Избр. научн. труды. Т. 1 / Н. Бор. – М.: Наука, 1970.

3. Кедров, Б.М. Принцип соответствия / под ред. Б.М. Кедрова, Н.Ф. Овчинникова. – М., 1979.

4. Кузнецов, И.В. Принцип соответствия в современной физике и его философское значение / И.В. Кузнецов. – М., 1948.

5. Krajewski, W. Correspondence Principle and Growth of Science / W.Krajewski. – Boston, USA, 1977.

6. Куиш, А.Л. Принцип соответствия: история и современные интерпретации / А.Л. Куиш // Научные труды РИВШ. Философско-гуманитарные науки: сборник научных статей под ред. В.Ф. Беркова. – Мн.: РИВШ, 2009. – Вып. 7(12). – С. 311–317.

7. Наумов, А.И. Физика атомного ядра и элементарных частиц / А.И. Наумов. – М.: Просвещение, 1984.

**М.И. Левчук<sup>1</sup>, А.И. Львов<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси, Беларусь,

<sup>2</sup>Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Россия

## **ПРАВИЛО СУММ БАЛДИНА ДЛЯ ПРОТОНА**

Правило сумм Балдина [1] связывает сумму электрической ( $\alpha$ ) и магнитной ( $\beta$ ) поляризуемостей нуклона с полным сечением неполяризованного фотопоглощения фотонов нуклоном  $\sigma_i(\nu)$ , взвешенным с фактором  $1/\nu^2$  ( $\nu$  – энергия фотона в лабораторной системе):

$$(\alpha + \beta)_N = \int_{\nu_{th}}^{\infty} \frac{\sigma_i(\nu)}{2\pi^2\nu^2} d\nu, \quad (1)$$

где  $\nu_{th} \cong 150$  МэВ – есть пороговая энергия фоторождения пионов на нуклоне.

Правило сумм (1) широко используется при извлечении поляризуемостей нуклона из данных по рассеянию низкоэнергетических фотонов, поскольку в таких анализах, если сумма поляризуемостей нуклона может быть вычислена с использованием (1), то, фактически, остается один неизвестный параметр, а именно,  $(\alpha - \beta)_N$ .

Численный расчет интеграла в правой части (1) для протона был выполнен в нескольких работах [2–4], и результат составил  $(\alpha + \beta)_p = 14.2 \pm (0.3 - 0.5)$  в единицах  $10^{-4} \text{Фм}^3$ , которые мы будем использовать везде ниже для поляризуемостей. Последнее вычисление интеграла [5] дало результат  $(\alpha + \beta)_p = 13.69 \pm 0.14$ . Такая малая ошибка в приведенном значении обусловлена тем, что авторы учиты-

вали только статистические ошибки в измерениях сечения  $\sigma_t(\nu)$ , но пренебрегали заметно большими систематическими ошибками.

В данной работе проведено вычисление интеграла в правой части (1) методом, аналогичным тому, который был использован в [5], но с учетом систематических ошибок экспериментов.

Поскольку минимальная энергия, при которой имеются экспериментальные данные по сечению  $\sigma_t(\nu)$ , составляет 204 МэВ [6], то в области  $[\nu_{th}, 204]$  МэВ для расчета  $\sigma_t(\nu)$  были использованы предсказания мультипольных анализов MAID [7] и SAID [8] для фоторождения одиночных пионов на нуклоне. Результат вычислений составляет

$$\nu \in [\nu_{th}, 204] \text{ МэВ: } 1.47 \pm 0.04, \quad (2)$$

где неопределенность  $\pm 0.04$  обусловлена именно зависимостью  $\sigma_t(\nu)$  от выбора анализа.

В области энергий  $[204, 2000]$  МэВ имеющиеся экспериментальные данные [6], [9] и [10] были профитированы функцией, которая представляет собой сумму фона в форме, предложенной в работе [2],

$$\sigma_B = \sum_{i=-2}^2 C_i (W - W_{th})^i, \quad (3)$$

и резонансной части, где учитывались вклады резонансов  $P_{33}(1232)$ ,  $P_{11}(1440)$ ,  $D_{13}(1520)$ ,  $S_{11}(1535)$ ,  $F_{15}(1680)$  и  $F_{37}(1950)$ , которые параметризовались формой, предложенной в работе [11]. В этой резонансной части фитировались только ширины резонансов и их амплитуды, а массы брались равными вышеприведенным значениям.

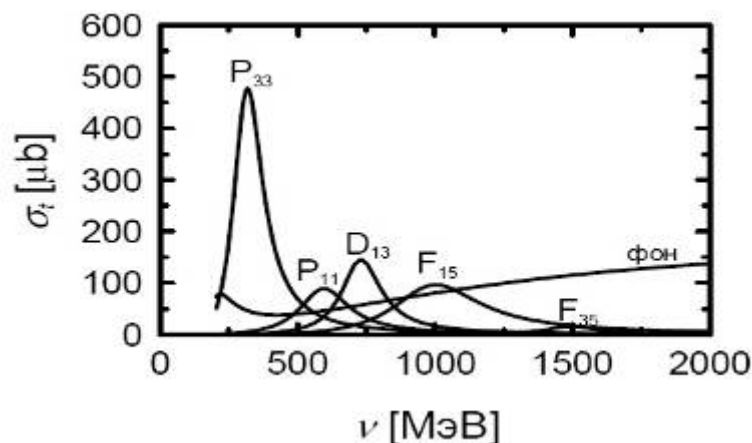


Рисунок 1 – Вклады фона и отдельных резонансов в сечение  $\sigma_t(\nu)$ .

Вклад резонанса  $S_{11}(1535)$  не показан ввиду его малости

На рисунке 1 показаны вклады отдельных слагаемых в сечение  $\sigma_t(\nu)$  в области  $[204, 2000]$  МэВ. Видно, что вклад фона представляет собой гладкую функцию, как это и должно быть из физических сооб-

ражений.

Результат фитирования показан на рисунке 2 и приведено его сравнение с экспериментальными данными работ [6], [9] и [10]. Можно видеть очень хорошее описание данных. Численное интегрирование правой части (1) по области [204,2000] МэВ дает результат 11.66. Сдвигая экспериментальные точки на статистические ошибки экспериментов, проводя их фитирование и вычисляя интеграл (1), получаем статистическую неопределенность приведенного выше результата:  $\pm 0.08$ . Повторяя аналогичную процедуру для систематических ошибок (2,7 % для [6], 3 % для [9] и 5 % для [10]), приходим к систематической неопределенности результата:  $\pm 0.32$ . Таким образом, наше значение интеграла (1) в области [204,2000] МэВ составляет

$$\nu \in [204,2000] \text{ МэВ}: 11.66 \pm 0.08(\text{stat.}) \pm 0.32(\text{syst.}), \quad (4)$$

которое находится в хорошем согласии с результатом работы [5]:

$$\nu \in [200,2000] \text{ МэВ}: 11.71 \pm 0.13(\text{stat.}). \quad (5)$$

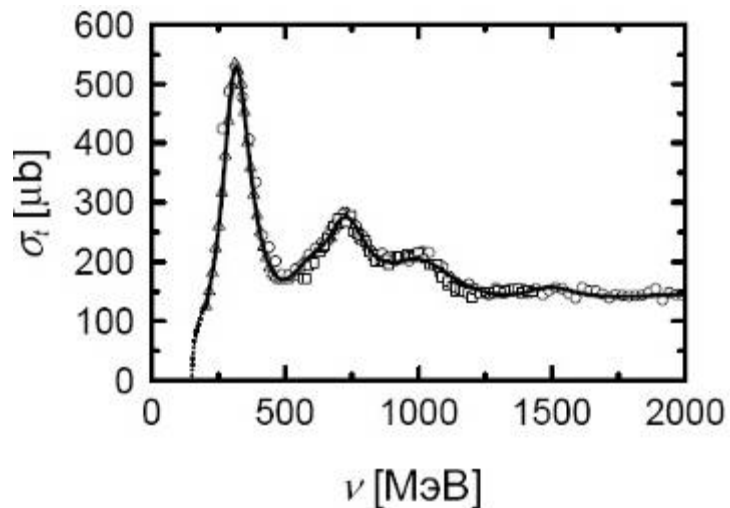


Рисунок 2 – Сечение фотопоглощения на протоне в области энергий до 2000 МэВ. Точечная кривая от порога до 204 МэВ – результат расчета

с SAID анализом.

Экспериментальные данные из работ [6] ( $\Delta$ ), [9] ( $\circ$ ), [10] ( $\square$ )

Оставшуюся асимптотическую область [2,  $\infty$ ] ГэВ разобьем, по аналогии с подходом из работы [5], на две подобласти: [2,3] ГэВ и [3,  $\infty$ ] ГэВ. В первой из них полное сечение  $\sigma_t(\nu)$  будем параметризовать следующей формулой:

$$\sigma_t(\nu) = a_1 + \frac{a_2}{\sqrt{\nu}}, \quad (6)$$

где, согласно [9],  $a_1 = 91.0 \pm 5.6 \mu\text{b}$ ,  $a_2 = 71.4 \pm 9.6 \mu\text{b GeV}^{1/2}$ . Отметим, что в литературе существуют несколько отличные значения для  $a_1$  и  $a_2$ . Однако, наши расчеты показали, что для всех таких значений результат остается неизменным и составляет  $0.23 \pm 0.02$ .

В области  $[3, \infty]$  ГэВ полное сечение параметризовалось соотношением из работы [12]:

$$\sigma_t(\nu) = A + B \ln^2 \nu + C \ln \nu, \quad (7)$$

где  $A = 141 \pm 1 \mu\text{b}$ ,  $B = 2.2 \pm 0.1 \mu\text{b}$ ,  $C = -17.0 \pm 0.7 \mu\text{b}$ . Результат расчета составляет  $0.41 \pm 0.02$ . Таким образом, асимптотическая область  $[2, \infty]$  ГэВ дает следующий вклад в интеграл (1):

$$\nu \in [2, \infty] \text{ ГэВ: } 0.64 \pm 0.04, \quad (8)$$

который находится в некотором разногласии со значением из работы [5]:  $0.73 \pm 0.03$ .

Складывая полученные результаты по всем областям, приходим к окончательному значению интеграла (1) для протона

$$(\alpha + \beta)_p = 13.8 \pm 0.1(\text{stat.}) \pm 0.3(\text{syst.}), \quad (9)$$

в хорошем согласии с результатом  $13.69 \pm 0.14$  из работы [5] и экспериментальным значением  $13.8 \pm 0.4$  [13].

Работа поддержана грантом Ф11ОБ–055 Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований.

### Литература

1. Baldin, A.M. Polarizability of the nucleon / A.M. Baldin // Nucl. Phys. – 1960. – Vol. 18, № 2. – P. 310–317.
2. Damashek, M. Forward Compton scattering // M. Damashek, F.G. Gilman // Phys. Rev. – 1970. – Vol. D1, № 5. – P. 1319–1332.
3. Львов, А.И. Правила сумм для коэффициентов электрической и магнитной поляризуемостей адронов / А.И. Львов, В.А. Петрунькин, С.А. Старцев // ЯФ. – 1979. – Т. 29, Вып. 5. – С. 1265–1275.
4. Schröder, U.E. Calculation of the electric polarizabilities of the proton and neutron / U.E. Schröder // Nucl. Phys. – 1980. – Vol. B166, № 1. – P. 103–112.
5. Babusci, D. New evaluation of the Baldin sum rule / D. Babusci, G. Giordano, G. Matone // Phys. Rev. – 1998. – Vol. C 57, №1. – P. 291–295.
6. Total photoabsorption cross sections for  $^1\text{H}$ ,  $^2\text{H}$ , and  $^3\text{H}$  from 200 to 800 MeV / M. MacCormick [et al.] // Phys. Rev. – 1996. – Vol. C 53, № 1. – P. 41–49.
7. A unitary isobar model for pion photo- and electroproduction on the

proton up to 1 GeV / D. Drechsel [et al.] // Nucl. Phys. – 1999. – Vol. A645, № 1. – P. 145–174.

8. Analysis of pion photoproduction data / R.A. Arndt [et al.] // Phys. Rev. – 2002. – Vol. C 66, № 5. – P. 055213.

9. Total hadronic cross section of  $\gamma$  rays in hydrogen in the energy range 0.265–4.215 GeV / T.A. Armstrong [et al.] // Phys. Rev. – 1972. – Vol. D 5, №7. – P.1640-1652.

10. Measurement of the total photoabsorption cross section on a proton in the energy range 600–1500 MeV at the GRAAL / O. Bartalini [et al.] // Phys. Atom Nucl. – 2008. – Vol. 71, №1. – P. 75–82.

11. Walker, R.I. Phenominological analysis of single-pion photoproduction / R.I. Walker // Phys. Rev. – 1969. – Vol. 182, № 5. – P. 1729–1748.

12. Review of particle properties / L. Montanet [et al.] // Phys. Rev. – 1994. – Vol. D 50, № 3. – P. 1173–1814.

13. Low-energy Compton scattering and the polarizabilities of the nucleon / V.Olmos de León [et al.] // Eur. Phys. J. – 2001. – Vol. A10, № 2. – P. 207–215.

**Н.В. Максименко<sup>1</sup>, С.М. Кучин<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Беларусь,

<sup>2</sup>Филиал ГОУВПО «Брянский государственный университет  
имени академика И.Г. Петровского», Россия

## **СПЕКТР МАСС КВАРКОНИЕВ**

### **Введение**

Согласно современным представлениям, адроны являются связанными состояниями цветных кварков и глюонов. Описание спектров масс и электромагнитных характеристик таких микросистем основано на теории связанных состояний, которая базируется на основных принципах локальной квантовой теории поля. Непосредственный расчет указанных характеристик составных систем в рамках локальной квантовой теории поля основывается на модельных представлениях, которые приводят к непертурбативным эффектам.

В нерелятивистском случае описание таких систем осуществляется на основе уравнения Шредингера [1]. Однако при больших энерги-

ях связи соответствующий подход должен быть существенно релятивистским. Как правило, исходят из уравнения Дирака для фермиона во внешнем поле, в модели квазинезависимых кварков или же разных уравнений квазипотенциального типа. Все эти уравнения имеют правильный и одинаковый нерелятивистский предел, но как релятивистские они могут отличаться друг от друга. Особенно проявляется отличие в асимптотическом поведении при  $\vec{r} \rightarrow \infty$  для бесконечно растущих потенциалов. Например, уравнение Дирака и уравнение Брейта при  $\vec{r} \rightarrow \infty$  страдают так называемым парадоксом Клейна, если статическое центральное взаимодействие выбрано в виде 4-й компоненты вектора. В таком случае решения указанных уравнений не убывают на бесконечности, а осциллируют, т. е. не имеют связанных состояний. С другой стороны, на примере уравнения Дирака известно, что скалярный потенциал, растущий на бесконечности, дает нужную падающую асимптотику. В работах [2–3] было показано, что особенности межкваркового взаимодействия состоят в том, что свойство записания кварков может быть объяснено в рамках потенциальной модели в том случае, когда потенциал описывается суперпозицией лоренц-векторной и лоренц-скалярной составляющих.

Поэтому важное место в развитии релятивистской теории связанных состояний занимает уравнение Клейна-Гордона-Фока со смешанной, скалярно-векторной связью. Основное преимущество такого уравнения состоит в том, что оно служит адекватной математической моделью для широкого круга задач адронной физики, в которых возможен последовательный переход от двухчастичной теории к приближению внешнего поля. Для решения таких уравнений обычно применяют либо численные, либо асимптотические методы, например, как выполнено в работах [4–6]. Но для развития адекватных приближенных методов большое значение имеет исследование модельных систем, для которых можно явно найти энергетический спектр и выразить соответствующие волновые функции через специальные функции определенного класса.

В данной работе спектр масс  $S$  состояний векторных мезонов вычисляется на основе релятивистского уравнения Клейна-Гордона-Фока со скалярно-векторным потенциалом взаимодействия. Обсуждается вопрос о различии описания характеристик кваркониев при использовании скалярного и скалярно-векторного потенциала взаимодействия. Проведено сравнение с нерелятивистской задачей.

### 1. Нерелятивистский случай

В данном случае энергетический спектр определяется нулями функции Эйри [7]. В таблице 1 представлены значения масс чармо-



ния и боттомония, вычисленные в рамках данной модели. Параметры  $m$  и  $a$  фиксируются по значениям масс первых двух уровней с квантовыми числами  $n=1,2$ . При этом для чармония получается  $m_c = 1,156 \text{ ГэВ}$ ,  $a_c = 0,209 \text{ ГэВ}^2$ , а для боттомония  $m_b = 4,354 \text{ ГэВ}$ ,  $a_b = 0,38 \text{ ГэВ}^2$ . Относительная ошибка теоретических расчетов в сравнении с экспериментальными данными составляет не более 5,3 %.

Таблица 1 – Спектр масс (нерелятивистский случай)

n	$M_{c\bar{c}}, \text{ГэВ}$		$M_{b\bar{b}}, \text{ГэВ}$	
	Эксперимент [8]	Теория	Эксперимент [8]	Теория
1	3,097	3,097	9,460	9,460
2	3,685	3,685	10,023	10,023
3	4,04	4,166	10,355	10,484
4	4,415	4,592	10,580	10,891
5		4,979	10,860	11,263
6		5,342	11,020	11,609

## 2. Линейный скалярный потенциал

Уравнение Клейна-Гордона-Фока для  $S$ -состояний векторных мезонов со скалярно-векторной связью имеет вид:

$$\left[ \nabla^2 + \frac{1}{4}(E - V(r))^2 - (m + S(r))^2 \right] \psi(r) = 0,$$

где  $E$  – релятивистская энергия связи,  $S(r)$  и  $V(r)$  – скалярный и векторный потенциал соответственно.

Рассмотрим случай  $S(r) = ar, V(r) = 0$ . Этот случай уже рассматривался в работе [9], но вычисления проводились без учета квадратичного по  $r$  слагаемого.

Собственные значения энергии  $E$  определяются выражением:

$$E_n = 12 \sqrt{(2n + 1)a}.$$

Отметим, что в случае скалярного потенциала  $S(r) = ar$  функцию  $\psi(r)$ , удовлетворяющую требуемым условиям [10] найти нельзя. Поэтому мы, для описания спектра кваркониев, используем отрицательный скалярный линейный потенциал. При решении подобных задач в современной литературе используется положительный скалярный потенциал, что влияет на знак параметров соответствующей волновой функции. Это приводит к различному значению характеристик составных систем, описываемых в рамках данного подхода, хотя энергетический спектр получается одинаковым для двух случаев.

В таблице 2 представлены значения масс чармония и боттомония, вычисленные в рамках данной модели. Параметры  $m$  и  $a$  фиксируются по значениям масс первых двух уровней с квантовыми числами  $n=1,2$ . При этом для чармония получается  $m_c = 1,147 \text{ ГэВ}$ ,  $a_c = 0,161 \text{ ГэВ}^2$ , а для боттомония  $m_b = 4,345 \text{ ГэВ}$ ,  $a_b = 0,148 \text{ ГэВ}^2$ . Относительная ошибка теоретических расчетов в сравнении с экспериментальными данными составляет не более 2 %.

Таблица 2 – Спектр масс (релятивистский случай)

$n$	$M_{cc}, \text{ГэВ}$		$M_{bb}, \text{ГэВ}$	
	Эксперимент [8]	Теория	Эксперимент [8]	Теория
1	3,097	3,097	9,460	9,460
2	3,685	3,685	10,023	10,023
3	4,04	4,089	10,355	10,410
4	4,415	4,419	10,580	10,726
5		4,703	10,860	10,998
6		4,958	11,020	11,242

В случае  $S(r) = ar, V(r) = br$  собственные значения энергии имеют вид:

$$E_n = \frac{mb}{a} \left[ 1 + \sqrt{\frac{(2n+1)}{a^2} \left( a^2 + \frac{1}{4} b^2 \right)^{3/4}} \right].$$

Энергия принимает вещественные значения, если  $|a| > \left| \frac{1}{2} b \right|$ .

### Заключение

Таким образом, в данной работе получены значения масс чармония и боттомония с помощью релятивистского уравнения Клейна-Гордона-Фока со скалярно-векторным потенциалом взаимодействия. Показано, что уравнение имеет точное решение только в случае отрицательного скалярного потенциала.

Из анализа таблиц видно, что в нерелятивистском случае величины расщепления уровней с ростом  $n$  уменьшаются медленнее, чем в релятивистском. Рассчитанные с помощью уравнения Шредингера возбужденные уровни чармония и боттомония с ростом  $n$  увеличиваются значительно быстрее, чем это наблюдается в эксперименте. Причем для боттомония значение натяжения струны в нерелятивистском случае принимает большое значение. По этой причине часто отдается предпочтение другим феноменологическим потенциа-

лам с малым показателем степени. Рассмотренный в данной работе случай показывает, что в релятивистском случае величины расщепления уровней могут быть более умеренными, чем при рассмотрении нерелятивистского случая. Использование релятивистского уравнения приводит также к значительному уменьшению значения натяжения струны. Отметим также, что вычисление спектра масс для линейного скалярно-векторного потенциала приводит к такому же значению, как и в случае скалярного линейного потенциала. Однако, использование скалярного и векторного линейных потенциалов приводит к изменению параметров волновой функции, что позволяет более точно описывать характеристики кваркониев.

### Литература

1. Быков, А.А. / А.А. Быков, И.М. Дремин, А.В. Леонидов // УФН. – 1984. – Т. 143. – С. 3.
2. Дремин, И. М. / И.М. Дремин, А.В. Леонидов // Письма в ЖЭТФ. – 1983. – Т. 37. – С. 617.
3. Хелашвили, А.А. Радиальное квазипотенциальное уравнение для фермиона и антифермиона и бесконечно растущие центральные потенциалы / А.А. Хелашвили // ТМФ. – 1982. – С. 201–210.
4. Mustafa, O. / O. Mustafa, R. Sever // Phys. Rev. – 1991. – Vol. A.43. – С. 5787; Phys. Rev. – 1991. – Vol. A.44. – С. 4142.
5. Barakat, T. / T. Barakat, M. Odeh, O. Mustafa // Journal of Physics A: Mathematical and General. – 1998. – Vol. 31.
6. Лазур, В.Ю. Метод ВКБ для уравнения Дирака со скалярно-векторной связью / В.Ю. Лазур, А.К. Рейтий, В.В. Рубиш // ТМФ. – 2005. – Т. 143. – № 1. – С. 83–111.
7. Абрамовиц, М. Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, И. Стиган. – Москва: Наука, 1979. – 294 с.
8. Particle Data Group 2000 Eur. Phys. J. – С. 1546.
9. Bradley, A. / A. Bradley // J. Phys. G: Nucl. Phys. – 1978. – Vol. 4. – № 10.
10. Nikiforov, A.F. Special Functions of Mathematical Physics / A.F. Nikiforov, V.B. Uvarov. – Birkhauser, Basel, 1988.

**Е.М. Овсиюк<sup>1</sup>, Н.Г. Токаревская<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> УО «Мозырский государственный педагогический университет имени И.П. Шамякина», Беларусь,

<sup>2</sup> УО «Белорусский государственный экономический университет»,  
Беларусь

## ЗАРЯЖЕННАЯ СКАЛЯРНАЯ ЧАСТИЦА С ПОЛЯРИЗУЕМОСТЬЮ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В работах [1], [2] было предложено обобщенное релятивистское волновое уравнение для скалярной частицы, имеющей помимо электрического заряда некоторую дополнительную характеристику. Такая скалярная частица требует для своего описания в рамках теории релятивистских уравнений первого порядка 15-компонентной волновой функции, состоящей из скаляра  $C(x)$ , двух 4-векторов  $C_a(x)$ ,  $\Phi_a(x)$  и антисимметричного тензора  $\Phi_{ab}(x)$ . Эта дополнительная характеристика может быть связана с так называемой поляризуемостью. В [3] была развита техника работы с обобщенными 15-компонентными уравнениями, основанная на использовании тетрадного формализма. Эта тетрадная техника может быть полезной и при исследовании задач в плоском пространстве Минковского, поскольку позволяет специальным образом выбирать тетраду, чтобы максимально учесть присутствующую конкретной задаче симметрию. В настоящей работе эта техника будет применена для исследования скалярной частицы с поляризуемостью во внешнем однородном магнитном поле.

Исходное волновое уравнение имеет вид [3]

$$\left[ \Gamma^\alpha(x) (\partial_\alpha + B_\alpha - i \frac{e}{\hbar} A_\alpha) - i \frac{Mc}{\hbar} \right] \Psi(x) = 0,$$

$$\Gamma^\alpha(x) = \Gamma^a e_{(a)}^\alpha(x), \quad B_\alpha(x) = \frac{1}{2} J^{ab} e_{(a)}^\beta \nabla_\alpha e_{(b)\beta}; \quad (1)$$

$e_{(a)}^\alpha(x)$  – тетрада,  $J^{ab}$  – генераторы 15-мерного представления группы Лоренца, отвечающего набору тензорных полей; далее будем использовать обозначение  $\mu = i \frac{Mc}{\hbar}$ . Однородному постоянному магнитному полю  $\vec{B} = (0, 0, B)$  можно сопоставить вектор-потенциал:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}, \quad A^a = (0, \vec{A}) = \frac{B}{2} (0, -x^2, +x^1, 0).$$

В цилиндрической системе координат этот потенциал имеет вид:

$$A_0 = 0, \quad A_r = 0, \quad A_\phi = -\frac{Br^2}{2}, \quad A_z = 0.$$

Выбираем диагональную сферическую тетраду, ей отвечает следующий вид исходного уравнения (1)

$$\left[ \Gamma^0 \partial_0 + \Gamma^1 \partial_r + \frac{1}{r} \Gamma^2 (\partial_\phi + \frac{ieB}{2\hbar} r^2 + J^{12}) + \Gamma^3 \partial_z - \mu \right] \Psi(t, r, \phi, z) = 0.$$

Решение уравнения ищется в виде

$$\Psi = \{ C, C_0, \vec{C}, \Phi_0, \vec{\Phi}, \vec{E}, \vec{H} \}, \quad C(x) = e^{-i\epsilon t/\hbar} e^{ikz} e^{im\phi} C(r),$$

$$C_0(x) = e^{-i\epsilon t/\hbar} e^{ikz} e^{im\phi} C_0(r), \quad \vec{C}(x) = e^{-i\epsilon t/\hbar} e^{ikz} e^{im\phi} \begin{pmatrix} C_1(r) \\ C_2(r) \\ C_3(r) \end{pmatrix},$$

$$\Phi_0(x) = e^{-i\epsilon t/\hbar} e^{ikz} e^{im\phi} \Phi_0(r), \quad \vec{\Phi}(x) = e^{-i\epsilon t/\hbar} e^{ikz} e^{im\phi} \begin{pmatrix} \Phi_1(r) \\ \Phi_2(r) \\ \Phi_3(r) \end{pmatrix},$$

$$\vec{E}(x) = e^{-i\epsilon t/\hbar} e^{ikz} e^{im\phi} \begin{pmatrix} E_1(r) \\ E_2(r) \\ E_3(r) \end{pmatrix}, \quad \vec{H}(x) = e^{-i\epsilon t/\hbar} e^{ikz} e^{im\phi} \begin{pmatrix} H_1(r) \\ H_2(r) \\ H_3(r) \end{pmatrix}.$$

Здесь основными компонентами являются скаляр  $C$  и 4-вектор  $C_a$ ; вспомогательными компонентами полевой функции являются 4-вектор  $\Phi_a$  и тензор  $\Phi_{ab} \sim \vec{E}, \vec{H}$ . После проведения необходимых вычислений по разделению переменных получаем систему 15 уравнений. Для сокращения будем использовать обозначения

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{d}{dr} + \frac{m + Br^2}{r} \right) = a_m, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{d}{dr} + \frac{m + Br^2}{r} \right) = b_m.$$

Система радиальных уравнений следующая

$$\epsilon C_0 - i\hat{b}_{m-1}C_1 - i\hat{a}_{m+1}C_3 + kC_2 = -MC; \quad (2a)$$

$$\epsilon C - i\sigma\hat{a}_{m+1}E_3 - i\sigma\hat{b}_{m-1}E_1 + k\sigma E_2 = -MC_0,$$

$$-\epsilon\sigma E_1 - i\hat{a}_m C - \sigma\hat{a}_{m+1}H_2 - i\sigma kH_1 = -MC_1,$$

$$-\epsilon\sigma E_2 + \sigma\hat{b}_{m-1}H_1 - \sigma\hat{a}_{m+1}H_3 - kC = -MC_2,$$

$$-\epsilon\sigma E_3 - i\hat{b}_m C + \sigma\hat{b}_m H_2 + i\sigma kH_3 = -MC_3; \quad (2b)$$

$$\epsilon C = -M\Phi_0, \quad i\hat{a}_m C = M\Phi_1, \quad kC = M\Phi_2, \quad +i\hat{b}_m C = M\Phi_3;$$

$$\mp \epsilon\Phi_1 \mp i\hat{a}_m\Phi_0 = M E_1, \quad \mp \epsilon\Phi_2 \mp k\Phi_0 = M E_2, \quad \mp \epsilon\Phi_3 \mp i\hat{b}_m\Phi_0 = M E_3,$$

$$\mp \hat{a}_m\Phi_2 \mp ik\Phi_1 = MH_1, \quad \pm \hat{b}_{m-1}\Phi_1 \mp \hat{a}_{m+1}\Phi_3 = MH_2, \quad \pm \hat{b}_m\Phi_2 \pm ik\Phi_3 = M H_3.$$

Исключим вспомогательные поля  $\Phi_a$  и  $\Phi_{ab} \sim (\vec{E}, \vec{H})$  с помощью уравнений

$$-\epsilon C = M\Phi_0, \quad i\hat{a}_m C = M\Phi_1, \quad kC = M\Phi_2, \quad i\hat{b}_m C = M\Phi_3; \quad (3a)$$

$$M^2 E_1 = \mp \epsilon i\hat{a}_m C \pm i\hat{a}_m \epsilon C = 0, \quad M^2 E_2 = \mp \epsilon kC \pm k \epsilon C = 0,$$

$$M^2 E_3 = \mp \epsilon i\hat{b}_m C \pm i\hat{b}_m \epsilon C = 0, \quad M^2 H_1 = \mp \hat{a}_m kC \pm k \hat{a}_m C = 0,$$

$$M^2 H_2 = \pm i(\hat{b}_{m-1}\hat{a}_m - \hat{a}_{m+1}\hat{b}_m)C = \mp iBC, \quad M^2 H_3 = \pm \hat{b}_m kC \mp k \hat{b}_m C = 0. \quad (3b)$$

Учтем (3а), (3б) в основных уравнениях (2а), (2б):

$$\begin{aligned}\varepsilon MC_0 - i\hat{b}_{m-1}MC_1 - i\hat{a}_{m+1}MC_3 + kMC_2 &= -M^2C, \\ MC_0 &= -\varepsilon C, \quad MC_1 = i(\hat{a}_m \mp \sigma \hat{a}_{m+1} \frac{B}{M^2})C, \\ MC_2 &= kC, \quad MC_3 = (1 \pm \frac{\sigma B}{M^2})i\hat{b}_m C.\end{aligned}$$

Исключим нединамические переменные  $C_1, C_2, C_3$ :

$$\begin{aligned}\varepsilon MC_0 + (\hat{b}_{m-1}\hat{a}_m + \hat{a}_{m+1}\hat{b}_m)C \mp \\ \hat{b}_{m-1}\hat{a}_{m+1} - \hat{a}_{m+1}\hat{b}_m) \frac{\sigma B}{M^2}C + k^2C &= -M^2C; \quad MC_0 = -\varepsilon C.\end{aligned}$$

Отсюда с учетом равенства

$$\Delta = -\hat{b}_{m-1}\hat{a}_m - \hat{a}_{m+1}\hat{b}_m = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{(m + Br^2)^2}{r}$$

приходим к двум уравнениям

$$\varepsilon MC_0 + \left( -\Delta + k^2 + M^2 \pm \frac{\sigma B^2}{M^2} \right) C = 0, \quad \varepsilon C + MC_0 = 0,$$

Исключая из первого уравнения функцию  $C_0$ , получим

$$\left( \Delta + \varepsilon^2 - k^2 - M^2 \mp \frac{\sigma B^2}{M^2} \right) C = 0.$$

Таким образом, для функции  $C(r)$  имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2}{dr^2}C + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}C + \left[ \varepsilon^2 - k^2 + (\mu^2 \pm \sigma \frac{e^2 B^2}{2\mu^2}) - \frac{1}{r^2} (m + \frac{eB}{2} r^2)^2 \right] C = 0$$

или в обычных единицах

$$\frac{d^2}{dr^2}C + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}C + \left[ \frac{\varepsilon^2}{\hbar^2 c^2} - \frac{P^2}{\hbar^2} - \left( \frac{M^2 c^2}{\hbar^2} \pm \sigma \frac{e^2 B^2}{2M^2 c^4} \right) - \frac{1}{r^2} \left( m + \frac{eB}{2\hbar c} r^2 \right)^2 \right] C = 0.$$

Оно решается в вырожденных гипергеометрических функциях и приводит к следующему спектру энергий:

$$\frac{\varepsilon^2}{\hbar^2 c^2} = \frac{P^2}{\hbar^2} + \frac{M^2 c^2}{\hbar^2} + \frac{2eB}{\hbar c} \left( N + \frac{|m| + m + 1}{2} \right).$$

Можно отметить следующее характерное свойство: поляризуемость проявляет себя во внешнем магнитном поле как эффективное уменьшение или увеличение массы частицы. Это эффективное изме-

нение массы частицы определяется слагаемым  $\pm\sigma \frac{e^2 B^2}{2M^2 c^4}$ ,

оно зависит от величины параметра  $\sigma$ , а также от величины магнитного поля  $B$ . Решение данной задачи открывает принципиальные возможности экспериментального измерения поляризуемости скалярной частицы.

Авторы признательны В.В. Киселю и В.М. Редькову за полезные советы и обсуждение работы.

### Литература

1. Федоров, Ф.И. Волновые уравнения с кратными представлениями группы Лоренца. Целый спин / Ф.И. Федоров, В.А. Плетюхов // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1969. – № 6. – С. 81–88.
2. Плетюхов, В.А. Волновые уравнения с кратными представлениями для частицы со спином 0 / В.А. Плетюхов, Ф.И. Федоров // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1970. – № 2. – С. 79–85.
3. О теории скалярной частицы в пространствах с расширенным набором представлений группы Лоренца / А.А. Богуш, В.В. Кисель, Н.Г. Токаревская, В.М. Редьков // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2001. – № 3. – С. 65–71.

**А.П. Рябушко<sup>1</sup>, Т.А. Жур<sup>2</sup>, И.П. Боярина<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Белорусский национальный технический университет, Беларусь,  
<sup>2</sup>УО «Белорусский государственный аграрно-технический университет», Беларусь

## ВЛИЯНИЕ СВЕТОВОГО ДАВЛЕНИЯ ЗВЕЗДЫ НА ТРАЕКТОРИЮ ТЕЛА В СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

### Введение

В работе [1] выведены уравнения движения (УД) пробного тела в гравитационном поле звезды массой  $M$  при учете давления электромагнитного (светового) излучения звезды на это тело (см. [1], формулы (19)):

$$\frac{d^2 \tilde{x}_1^1}{dt^2} + \frac{\gamma M}{\tilde{r}_1^3} \tilde{x}_1^1 = \frac{\gamma A_1}{\tilde{r}_1^3} \left( \tilde{x}_1^1 - 2x_1^1 \frac{v_1}{c} \cos \alpha_1 + x_1^2 \frac{v_1}{c} \sin \alpha_1 \right),$$

$$\frac{d^2 \tilde{x}_1^2}{dt^2} + \frac{\gamma M}{\tilde{r}_1^3} \tilde{x}_1^2 = \frac{\gamma A_1}{\tilde{r}_1^3} \left( \tilde{x}_1^2 - 2x_1^2 \frac{v_1}{c} \cos \alpha_1 - x_1^1 \frac{v_1}{c} \sin \alpha_1 \right),$$

(1)

где  $A_1 = k\sigma_0 W_0 r_0^2 / (\gamma m_0 c)$ ;  $M > A_1$  – поле притяжения;  $k$  – коэффициент отражения телом света и  $1 \leq k < 2$ ;  $\sigma_0$  – миделево сечение тела в системе отсчета  $K$ , относительно которой тело покоится;  $W_0$  – звездная постоянная, т.е. полное количество энергии электромагнитного излучения звезды в системе покоя звезды  $K$ , проходящего за 1 сек на  $1 \text{ см}^2$  неподвижной в системе  $K$  площадки, перпендикулярной направлению на звезду и находящейся на расстоянии  $r_0$  от звезды;  $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ э}^{-1} \cdot \text{см}^3 \cdot \text{сек}^{-2}$  – ньютоновская постоянная тяготения;  $c = 3 \cdot 10^{10} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}$  – скорость света в вакууме;  $t$  – время по часам неподвижного в системе  $K$  наблюдателя,  $v_1$  – поступательная скорость пробного тела на орбите;  $\alpha_1$  – угол между векторами  $\vec{v}_1$  и  $\vec{r}_1$  (см. рисунок 1).

Так как движение плоское, то без ограничения общности за плоскость движения в пространстве, в котором введена прямоугольная декартова система координат  $Ox^1 x^2 x^3$ , принята координатная плоскость  $Ox^1 x^2$  и УД (1) записаны для этой плоскости.

Если пренебречь световым давлением, то правую часть УД (1) следует заменить нулем и тогда приходим к классическим ньютоновским УД пробного тела (частицы, астероида, планеты) в гравитационном поле центра массой  $M$ :

$$\frac{d^2 x^1}{dt^2} + \frac{\gamma M}{r^3} x^1 = 0, \quad \frac{d^2 x^2}{dt^2} + \frac{\gamma M}{r^3} x^2 = 0, \quad (2)$$

где  $r = \sqrt{x^1{}^2 + x^2{}^2}$  является расстоянием центра масс пробного тела  $P(x^1, x^2, 0)$  до центра масс звезды. Пробное тело и звезду будем считать сферически симметричными. Введя на плоскости  $Ox^1 x^2$  полярную систему координат по формулам  $x^1 = r \cos \varphi$ ,  $x^2 = r \sin \varphi$  и интегрируя систему УД (2), находим уравнение орбиты (траектории) пробного тела

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} (1 + e \cos \varphi), \quad (3)$$

описывающее коническое сечение с параметром  $p$  и эксцентриситетом  $e$ . В дальнейшем будем рассматривать в поле притяжения финитные движения, т. е.  $0 \leq e < 1$  – окружность ( $e = 0$ ), эллипс ( $0 < e < 1$ ). При выводе уравнения орбиты (3) использовались два первых инте-



грала системы (2): интеграл сохранения энергии

$$v^2 = \gamma M \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right), \quad p = a(1 - e^2), \quad (4)$$

где  $v^2 = \left( \frac{dx^1}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dx^2}{dt} \right)^2 = \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2$  – квадрат поступательной

скорости пробного тела на орбите;  $a$  – большая полуось эллиптической орбиты, и интеграл сохранения орбитального момента импульса пробного тела (интеграл площадей)

$$L \equiv x^1 \frac{dx^2}{dt} - x^2 \frac{dx^1}{dt} = r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\gamma M p}.$$

(5)

Влияние светового давления на движение пробного тела можно рассматривать с разной степенью точности, разумея под этим учет в УД (1) членов справа, не содержащих малый параметр  $v/c$  (нулевой уровень –  $(v/c)^0 = 1$ ), и учет членов с  $v/c$  и с  $(v/c)^0$  – это первый уровень, когда учитывается влияние продольного эффекта Доплера и абберация.

Нулевой уровень подробно рассмотрен в работе авторов [2], формулы (11)–(15). Его получаем из УД (1), отбрасывая члены, содержащие  $v_1/c$ :

$$\frac{d^2 x_1^i}{dt^2} + \frac{\gamma M}{r_1^3} x_1^i = \frac{\gamma A_1}{r_1^3} x_1^i, \quad i = 1, 2. \quad (6)$$

Индекс “1” у  $x^i$  и  $r$  в (6) появляется по сравнению с (2) потому, что решения УД (6) будут отличаться от решений УД (2) из-за появления в УД (6) справа члена с  $A_1$ , характеризующего световое давление в наинизшем (нулевом) приближении по параметру  $v/c$ .

Интегрирование УД (6) совершенно аналогично интегрированию УД (2). В итоге имеем следующие первые интегралы и уравнение орбиты при одинаковых начальных условиях для (2) и (6) (см. [2]):

$$v_1^2 = \gamma(M - A_1) \left( \frac{2}{r_1} - \frac{1}{a_1} \right), \quad r_1^2 \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\gamma(M - A_1)p_1}, \quad \frac{1}{r_1} = \frac{1}{p_1} (1 + e_1 \cos \varphi), \quad (7)$$

$$p_1 = a_1(1 - e_1^2), \quad p_1/p = M/(M - A_1) = (1 + e_1)/(1 + e).$$

Из этих соотношений и (3), (4) следует, что  $p_1 > p$ ,  $e_1 > e$ ,  $a_1 > a$ ,  $r_1 > r$ . Эллипсы (3) и (7) имеют общий периастр  $\Pi$  и поэтому только при  $\varphi = 2\pi n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )  $r_1 = r$  (см. рис. 1). Эллипс (3) мы называем *опорным*, а “раздувшийся” эллипс (7) называем *возмущенным*.

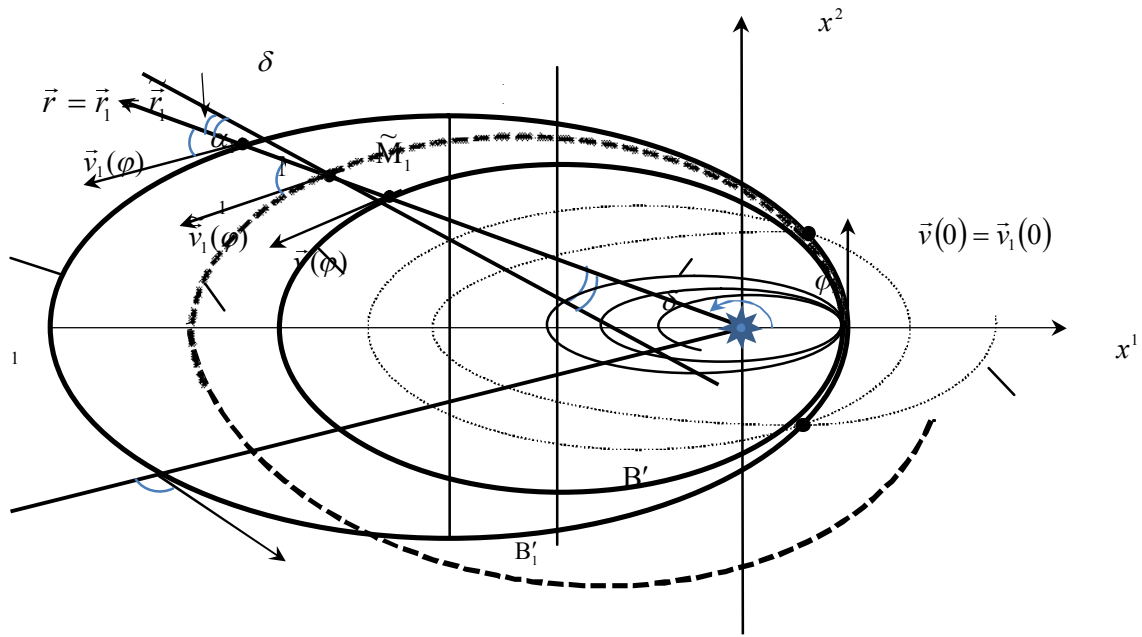


Рисунок 1 – Возможные траектории движения пробного тела в гравитационном поле звезды 0-F:

1 – опорный эллипс, по которому движется тело в ньютоновской теории тяготения;

2 – “раздувшийся” эллипс, по которому движется тело при учете светового давления звезды (нулевой подуровень II-го уровня, для которого  $s=1$ );

3 – траектория тела при учете Доплер-эффекта и абберации в приближении  $v/c$ , если  $e_1 > 0,25$ ;

4 – траектория тела при учете Доплер-эффекта и абберации в приближении  $v/c$ , если  $e_1 < 0,25$ ;

5 – траектория тела при учете Доплер-эффекта и абберации в приближении  $v/c$ , если  $e_1 = 0,25$ .

Целью настоящей работы является получение первых интегралов системы дифференциальных уравнений (1) (интеграла энергии и интеграла площадей), с их помощью нахождение уравнения орбиты пробного тела и исследование закономерностей его движения.

## 2. Первые интегралы УД (1) и уравнение траектории

Сразу же отметим, что значок тильда “ $\sim$ ” в УД (1) появляется из-за учета членов с  $v/c$ , что обобщает УД (6) и видоизменяет решения УД (1) по сравнению с УД (6).

Не приводя необходимых вычислений, сразу же запишем вытекающие из УД (1) интеграл энергии

$$\tilde{v}_1^2 - \frac{2\gamma(M - A_1)}{\tilde{r}_1} + \frac{2\gamma(M - A_1)}{p_1}(1 + e_1) - \frac{\gamma M}{p}(1 + e)^2 = \quad (8)$$

$$= -\frac{\gamma A_1}{c p_1} \sqrt{\frac{\gamma(M - A_1)}{p_1}} \left[ (3 + 2e_1^2)\varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi + 2e_1 \sin \varphi - \frac{1}{2} e_1^2 \sin 2\varphi \right],$$

интеграл орбитального момента импульса (интеграл площадей)

$$\tilde{r}_1^2 \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\gamma M p} - \frac{\gamma A_1}{c} \varphi \quad (9)$$

и уравнение траектории движения пробного тела

$$\frac{1}{\tilde{r}_1} = \frac{1 + e_1 \cos \varphi}{p_1} + \frac{2\gamma A_1 \varphi}{c p_1 \sqrt{\gamma M p}} \left( 1 - \frac{\cos \varphi}{4e_1} \right) + \quad (10)$$

$$+ \frac{\gamma A_1 \sin \varphi}{c p_1 \sqrt{\gamma M p}} \left( \frac{3 - 2e_1^2}{4e_1} \ln|\sin \varphi| - \ln\left| \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right| + C \right),$$

где  $C = const$  – постоянная интегрирования. Функции  $\sin \varphi \ln|\sin \varphi|$  и  $\sin \varphi \ln|\operatorname{tg}(\varphi/2)|$  ограничены при любом  $\varphi$ , так как при  $\varphi = \pi n$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , где  $\ln|\sin \varphi|$  и  $\ln|\operatorname{tg}(\varphi/2)|$  обращаются в бесконечность, эти функции обращаются в нуль:  $\lim_{\varphi \rightarrow \pi n} \sin \varphi \ln|\sin \varphi| = 0$ ,  $\lim_{\varphi \rightarrow \pi n} \sin \varphi \ln|\operatorname{tg}(\varphi/2)| = 0$ .

### 3. Краткое обсуждение полученных результатов

С точностью до вековых членов траектория движения (10) имеет в случае  $e_1 < 0,25$  две узловые точки  $Y_1$  и  $Y_2$ , лежащие на возмущенном эллипсе (7) при  $\cos \varphi = 4e_1$ , через которые проходит траектория (10) на любом обороте вокруг звезды, а точки пересечения траектории с осью  $Ox^1$  “плывут” слева направо. Получаем орбиту, близкую к “плывущему” слева направо эллипсу, проходящему через узловые точки (см. рисунок 1, траектория 4).

Если  $e_1 = 0,25$ , то при  $\varphi = 2\pi n$  траектория проходит через периастр  $\Pi$  при любом  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , а  $\tilde{r}_1$  монотонно уменьшается во всех остальных направлениях (см. рисунок 1, траектория 5).

Если  $e_1 > 0,25$ , то имеем спираль, охватывающую звезду и приближающуюся к ней (см. на рисунке 1 траекторию 3). И только в этом случае имеем закон движения, который называется эффектом Пойнтинга-Робертсона [3].

Интеграл энергии (8) дает запрет на количество оборотов, так как должно выполняться условие  $\tilde{v}_1^2 \geq 0$ .

Интеграл площадей (9) показывает, что с течением времени (ростом  $\varphi$ ) секторная скорость должна уменьшаться. Возникает вопрос: может ли она обратиться в нуль или даже стать отрицательной? В общем случае ответ не ясен, но существуют числовые расчеты, из

которых следует, (например, при  $A_1 = 0,1M$ ), что из условия  $\tilde{v}_1^2 \geq 0$  имеем максимальное число оборотов меньшее, чем число оборотов, при котором секторная скорость обращается в нуль.

### Литература

1. Рябушко, А.П. / А.П. Рябушко, Т.А. Жур, И.П. Боярина // Весці НАН Беларусі. Сер.фіз-мат.навук. – 2011 (в печ.).
2. Рябушко, А.П. / А.П. Рябушко, Т.А. Жур, И.П. Боярина // Весці НАН Беларусі. Сер.фіз-мат.навук. – 2011. – № 3.
3. Мартынов, Д.Я. Курс общей астрофизики / Д.Я. Мартынов. – М., 1971.

А.П. Рябушко<sup>1</sup>, Т.А. Жур<sup>2</sup>, И.Т. Неманова<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Белорусский национальный технический университет, Беларусь,  
<sup>2</sup>УО «Белорусский государственный аграрно-технический университет», Беларусь

## ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И ОРБИТЫ ТЕЛ В СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЕ ПРИ УЧЕТЕ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ РЕЛИКТОВОЙ МАТЕРИИ

### Введение

В работе [1] в постньютоновском приближении (ПНП) общей теории относительности (ОТО) найдена метрика риманова пространства-времени, порожденного материальным шаром радиусом  $R$  с притягивающим центром (тело радиусом  $R_0$  и массой  $M$ ) в случае, когда плотность центрально-симметричного распределения материи в шаре  $\rho(r)$  определяется трехзвенной полигональной моделью (см. (1) в [1]):

$$\rho(r) = \rho_n + (\rho_{n+1} - \rho_n) \frac{r - r_n}{r_{n+1} - r_n}, \quad (1)$$

где  $n = 0, 1, 2, 3$ ;  $r_0 = R_0$ ,  $r_3 = R$ ,  $r_4 = \infty$ ,  $\rho_3 = 0$ ,  $\rho_4 = 0$ ;  $r$  – расстояние до центра шара.

Таким образом, нами все подготовлено в [1] для получения уравнений движения пробных тел (уравнений геодезических в ПНП ОТО):

$$\frac{d^2 \tilde{x}^i}{dt^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{h}_{00}}{\partial \tilde{x}^i} = f^i,$$

(2)

$$\text{где } f^i = \frac{1}{c^2} \left( 2 \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^s}{dt} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^s} - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} - \frac{1}{2} h_{00} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} - \frac{1}{2} \frac{dx^s}{dt} \frac{dx^s}{dt} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \right) \quad (3)$$

и  $t$  – время по часам далекого неподвижного наблюдателя,  $f^i$  – релятивистская добавка к ньютоновскому ускорению  $d^2x^i/dt^2$ , тильда «~» над  $x^i$  означает координаты пробного тела в ПНП ОТО. Если в (2)  $f^i$  заменить нулем, то получим ньютоновские уравнения движения и значок «~» следует убрать. В (3)  $x^i$  являются ньютоновскими координатами пробного тела,  $c$  – скорость света в вакууме.

### 1. Ньютоновские уравнения движения и законы сохранения

В уравнениях (2)  $f^i$  заменяем нулем, устраняем значок «~» и вместо  $h_{00}$  последовательно подставляем  $h_{00}^I, h_{00}^{II}, h_{00}^{III}, h_{00}^{IV}$ , взятые из работы [1], формулы (4), (5), (6), (7) соответственно. В итоге получаем ньютоновские уравнения движения в каждой области I–IV:

I.

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \frac{\gamma M}{r^3} x^i + \frac{1}{3} \pi \gamma \left[ 4\rho_0 - 3(\rho_0 - \rho_1) \frac{r}{r_1} \right] x^i = 0, \quad R_0 \leq r \leq r_1; \quad (4)$$

II.

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \frac{\gamma M}{r^3} x^i + \frac{1}{3} \pi \gamma \left[ \left( \rho_0 - \rho_1 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{r_2 - r_1} r_1 \right) \frac{r_1^3}{r^3} + \frac{\rho_2 - \rho_1}{r_2 - r_1} (3r - 4r_1) + 4\rho_1 \right] x^i = 0,$$

$$r_1 \leq r \leq r_2;$$

(5)

III.

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \frac{\gamma M}{r^3} x^i + \frac{1}{3} \pi \gamma \left\{ \left( \rho_0 - \rho_1 \right) \frac{r_1^3}{r^3} + \frac{4R - 3r}{R - r_2} \rho_2 + \frac{1}{r^3} \left[ 4r_2^3 \rho_1 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\rho_2 - \rho_1}{r_2 - r_1} (3r_2^4 - 4r_1 r_2^3 + r_1^4) + \frac{3r_2 - 4R}{R - r_2} r_2^3 \rho_2 \right] \right\} x^i = 0, \quad r_2 \leq r \leq R;$$

(6)

IV.

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \frac{\gamma(M + m_\rho)}{r^3} x^i = 0, \quad m_\rho = \frac{1}{3} \pi \left[ (\rho_0 - \rho_1) r_1^3 + 4r_2^3 \rho_1 + \right. \\ \left. + (3r_2^4 - 4r_1 r_2^3 + r_1^4) \frac{\rho_2 - \rho_1}{r_2 - r_1} + (R^4 - 4R r_2^3 + 3r_2^4) \frac{\rho_2}{R - r_2} \right], \quad R \leq r < +\infty, \quad (7)$$

где  $m_p$  является массой всей содержащейся в шаре материи без массы центра  $M$ . На границах областей, когда  $r = r_1$ ,  $r = r_2$ ,  $r = R$ , уравнения движения (4) и (5), (5) и (6), (6) и (7) совпадают. Это является следствием того, что на границах областей метрика риманова пространства-времени гладко «сшита» и поэтому гравитационное поле, скорость и ускорение пробного тела меняется непрерывно при переходе из области в область.

Так как распределение материи имеет центральную симметрию, то и гравитационное поле обладает той же симметрией и движение пробных тел происходит в плоскости, за которую без ограничения общности можно принять координатную плоскость  $x^1 O x^2$ , т. е.  $x^3 \equiv 0$ . Тогда в уравнениях движения (2) и релятивистской добавке (3) при  $i = 3$  получаем нулевые тождества.

С помощью (2) конструируем ньютоновский удельный (на единицу массы) орбитальный момент импульса  $L$  пробного тела и убеждаемся, что

$$L \equiv x^1 \frac{dx^2}{dt} - x^2 \frac{dx^1}{dt} = const.$$

(8)

Уравнение (8) еще носит название «интеграл площадей».

Известная комбинация (получаемая с помощью ньютоновских уравнений (2) при  $f^i = 0$ ) приводит к удельному интегралу энергии  $H$ :

$$H \equiv 1/2 (v^2 + h_{200}) = const,$$

(9)

где  $v^2 = (dx^1/dt)^2 + (dx^2/dt)^2$  – квадрат поступательной скорости тела.

Если в плоскости  $x^1 O x^2$  ввести полярную систему координат по формулам  $x^1 = r \cos \varphi$ ,  $x^2 = r \sin \varphi$ , то интеграл площадей  $L$  (8) и интеграл энергии  $H$  (9) запишутся в виде:

$$r^2 d\varphi/dt = L = const, \quad \frac{1}{2} \left[ (dr/dt)^2 + r^2 (d\varphi/dt)^2 + h_{200} \right] = H = const.$$

(10)

## 2. Уравнения движения и законы сохранения в ПНП ОТО

Уравнения движения пробного тела в ПНП ОТО (2), (3) можем считать нам известными во всех областях I–IV, так как нам известны в этих областях выражения для  $h_{200}$  и  $h_{400}$  (см. в работе [1] формулы (4)–(7) и (15)–(18)). Подставив эти выражения в (2), (3), мы получим уравнения движения. В этой работе мы ограничимся выводом только

двух интегралов движения (площадей и энергии), которых будет достаточно для получения релятивистского уравнения орбиты и предсказания релятивистских эффектов в областях I–IV.

Релятивистский удельный орбитальный момент импульса  $\tilde{L}$  определяем по формуле, аналогичной формуле (8)

$$\tilde{L} \equiv \tilde{x}^1 d\tilde{x}^2/dt - \tilde{x}^2 d\tilde{x}^1/dt, \quad (11)$$

и приходим к 
$$\tilde{L} = 2/c^2 L h_{00} + const.$$

(12)

Релятивистский аналог интеграла энергии получаем в результате известных комбинаций равенств (2) и (3):

$$\tilde{v}^2 + \tilde{h}_{00} = 2/c^2 \left( 3H h_{00} - h_{00}^2 - 1/2 h_{400} \right) + const,$$

(13)

где  $\tilde{v}^2 = (d\tilde{x}^1/dt)^2 + (d\tilde{x}^2/dt)^2$  – квадрат релятивистской поступательной скорости пробного тела на орбите.

Первые интегралы (12) и (13) дают возможность проинтегрировать систему дифференциальных уравнений (2). После достаточно продолжительных вычислений по известной схеме (см. [2], §§22, 23) находим дифференциальное уравнение орбиты в каждой из областей I–IV и его решение, которое с точностью до вековых членов может быть записано в виде:

$$1/r = 1/p \left\{ 1 + e \cos \left[ (1 + \alpha_\rho^H - \alpha_0 + \alpha_\rho) \varphi \right] \right\},$$

т. е. получено уравнение вращающегося эллипса (эксцентриситет  $0 < e < 1$ ) в полярных координатах  $\rho, \varphi$ . Постоянные  $\alpha_\rho^H, \alpha_0$  и  $\alpha_\rho$  характеризуют скорость этого вращения и могут быть представлены в форме:

$$\alpha_\rho^H = 2\pi p^3 \rho / m, \quad \alpha_0 = 3\gamma m / (c^2 p), \quad \alpha_\rho = A\pi\gamma\rho p^2 / c^2, \quad A = const,$$

где  $\rho$  – плотность среды;  $m$  – масса центрального тела;  $\gamma$  – ньютоновская постоянная тяготения;  $c$  – скорость света;  $p$  – параметр эллиптической орбиты.

Без учета гравитационного поля среды ( $\rho = 0$ ) величины  $\alpha_\rho^H$  и  $\alpha_\rho$  обращаются в нуль и остается только величина  $\alpha_0$ , которая приводит к прямому смещению перигелия орбиты, т. е. к смещению в сторону движения тела по орбите (знаменитое смещение перигелия Меркурия на  $43''$  за сто лет).

Учет гравитационного поля среды ( $\rho \neq 0$ ) уже в ньютоновской небесной механике приводит к смещению перигелия, но к обратному

(против хода тела по орбите), так как  $\alpha_\rho^H > 0$ . В постньютоновском приближении кроме  $\alpha_0$  появляется еще  $\alpha_\rho > 0$  и существует граница  $r_0$ , на которой  $\alpha_0 = \alpha_\rho^H + \alpha_\rho$ , т. е. смещение перигелия отсутствует. Для  $r < r_0$   $\alpha_0 > \alpha_\rho^H + \alpha_\rho$  и смещение прямое, а для  $r > r_0$   $\alpha_0 < \alpha_\rho^H + \alpha_\rho$  и смещение обратное. Как правило в Солнечной системе (С.с.)  $\alpha_\rho \ll \alpha_0$  и основную роль играют  $\alpha_\rho^H$  и  $\alpha_0$ , а величиной  $\alpha_\rho$  можно пренебрегать.

При существующих плотностях  $\rho$  в С.с. (кроме [3], [4] см. еще [5]) легко показать, что для Меркурия  $\alpha_\rho^H / \alpha_0 \approx 10^{-3}$ , для Венеры и Земли  $\alpha_\rho^H / \alpha_0 \approx 10^{-2}$ , для Марса  $\alpha_\rho^H / \alpha_0 \approx 0,2$ . Следовательно, для внутренних планет С.с. смещение перигелия должно быть прямым, что и подтверждается астрономическими наблюдениями.

Для Юпитера, Сатурна, Урана, Нептуна, Плутона отношение  $\alpha_\rho^H / \alpha_0$  имеет значения соответственно:  $\approx 2 \cdot 10^2$ ,  $\approx 2 \cdot 10^3$ ,  $\approx 3,6 \cdot 10^4$ ,  $\approx 2 \cdot 10^5$ ,  $\approx 3 \cdot 10^5$ , т. е. смещение для всех внешних планет должно быть обратным. Экспериментального подтверждения этого вывода в астрономии пока не существует, так как периоды обращения внешних планет исчисляются десятками и сотнями лет [4].

Другим важным результатом является разрешение так называемой проблемы «Pioneer anomaly», заключающейся в объяснении «неизвестного» добавочного ускорения пробного тела в С.с. на расстоянии от Солнца (20 – 70) *a.e.* (1 *a.e.* =  $1,5 \cdot 10^{13}$  см – среднее расстояние Земли до Солнца). Нами показано, что постоянным источником этого добавочного ускорения  $a_p = (8,74 \pm 1,33) \cdot 10^{-8}$  см·сек<sup>-2</sup> служит гравитационное поле межпланетной среды С.с., обязанное своему возникновению большому количеству метеорного вещества, поясам и облакам астероидов и комет (см. [3]).

### Литература

1. Рябушко, А.П. / А.П. Рябушко, И.Т. Неманова, Т.А. Жур // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз-мат. навук. – 2011.
2. Рябушко, А. П. Движение тел в общей теории относительности / А.П. Рябушко. – Минск, 1979.
3. Ипатов, С.И. Миграция небесных тел в Солнечной системе / С.И.Ипатов. – М., 2000.
4. Кононович, Э.В. Общий курс астрономии / Э.В. Кононович, В.И. Мороз. – М., 2004.



**М.Н. Сергеенко**

**УО «Белорусский государственный университет транспорта», Бела-  
русь**

### **КОМПЛЕКСНЫЕ ТРАЕКТОРИИ РЕДЖЕ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОДХОДЕ КХД**

При высоких энергиях основной вклад в сечения взаимодействия адронов дают *мягкие процессы*. Для описания таких процессов успешно разрабатываются подходы, основанные на теории полюсов Редже – *теории комплексного углового момента* [1]. В этой теории введено понятие траекторий полюсов Редже, которые определяют асимптотическое поведение амплитуды рассеяния и сечения адронных процессов при высоких энергиях.

Основные положения реджевских моделей, таких как МКГС [2–6], сформулированы в терминах линейных траекторий Редже. Однако, как показывает эксперимент данные, траектории Редже не являются линейными. Рассмотрим в рамках потенциального подхода релятивистскую систему двух взаимодействующих фермионов.

Одним из наиболее реалистических потенциалов взаимодействия кварков и глюонов оказался Корнельский потенциал  $V(r) = -\alpha/r + \sigma r$ , в котором  $\alpha$  и  $\sigma$  – параметры [7]. Но этот потенциал не является асимптотически свободным, но, как известно, величина связи  $\alpha_s(q^2)$  в КХД является функцией  $q^2$ .

Используя известное решение уравнения Дайсона-Швингера [8], в котором глюон имеет массу, можно записать величину связи КХД в координатном представлении:

$$\alpha_s(r) = \frac{k}{b_0 \ln[(1 + 4m_g^2 r^2) / \Lambda_{QCD}^2 r^2]}, \quad (1)$$

где  $k = 4/3$  для  $q\bar{q}$  и  $k = 3$  для  $gg$  систем,  $b_0 = (33 - 2n_f)/12\pi^2$ ,  $n_f$  – число ароматов кварков,  $m_g$  – масса глюона.

Таким образом, мы получаем асимптотически свободный потенциал

$$V(r) = -\frac{\alpha_s(r)}{r} + \sigma r, \quad (2)$$

в котором  $\alpha_s(r) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow 0$ . Он используется в наших дальнейших расчётах.

В данной работе мы решаем релятивистское квазипотенциальное уравнение типа Бете-Солпитера. Радиальная часть этого уравнения с учётом замены Крамерса-Лангера  $J(J+1) \rightarrow (J+1/2)^2$  имеет вид уравнения Шредингера [9–11]:

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{E^2}{4} - \left( m - \frac{\alpha_s(r)}{r} + \sigma r \right)^2 - \frac{(J+1/2)^2}{r^2} \right] \chi(r) = 0, \quad (3)$$

В этом уравнении потенциал взаимодействия является Лоренц-скаляром (аддитивен к массам частиц) [9,10].

Решить (3) аналитически не представляется возможным. Однако решая его в отдельности для кулоновской и линейной составляющих, можно получить два точных аналитических решения. Сшивая затем эти асимптотические решения, с помощью аппроксимации Паде получаем массовую формулу [11]:

$$E_n^2 = 8\sigma(2n_r + J - \alpha_\infty + 3/2) - (2\alpha_\infty m)^2 / (n_r + J + 1)^2 + 4m^2. \quad (4)$$

Решение (4) относительно  $J$ , даёт траектории Редже [11].

Уравнение (3) имеет четыре точки поворота и может быть решено кв/кл методом. Записав условие квантования в комплексной плоскости, мы получаем для фазового интеграла:

$$I = 2\pi \left[ \frac{E^2}{8\sigma} + \alpha_\infty + \frac{2\alpha_\infty m}{\sqrt{-E^2 + 4m^2 - 2\alpha_\infty \sigma}} - (J + \frac{1}{2}) \right] = 4\pi \left( n_r + \frac{1}{2} \right), \quad (5)$$

где  $\alpha_\infty$  – значение «постоянной» сильной связи при  $r \rightarrow \infty$ .

Аналитическое решение для  $E^2$  находится из решения уравнения (5), которое приводится к кубическому уравнению. Вводя обозначения:  $p = m^2/2\sigma$ ,  $q = p - N$ ,  $y = E^2/8\sigma - p + \alpha_\infty$ ,  $N = 2n_r + J + 3/2$ , получаем:

$$y^3 + ry^2 + sy + t = 0, \quad (6)$$

где  $r = 2q$ ,  $s = q^2$ ,  $t = \alpha_\infty^2 p$ . Исследование (6) показывает, что физическое решение даётся его вторым корнем, и мы получаем:

$$E_n^2 = 8\sigma(y_2 - \alpha_\infty) + 4m^2. \quad (7)$$

Выражая из (5) угловой момент  $J$ , для траекторий Редже  $\alpha(t) \equiv J$  получаем выражение:

$$\alpha(t) = -2n_r - \frac{3}{2} + \alpha_\infty + \frac{t}{8\sigma} + \frac{2\alpha_\infty m}{\sqrt{-t + 4m^2 - 8\alpha_\infty \sigma}}. \quad (8)$$

Траектории Редже (8) имеют правый разрез, начинающийся в пороговой точке  $E^2 \geq 4m^2 - 8\alpha_\infty \sigma$ , и являются комплексными функциями.

Формулы (4) и (7) использовались нами для расчёта масс кварко-ниев, глюболов и соответствующих траекторий Редже. Результаты расчётов по этим формулам приводятся в таблице 1 и на рисунке 1.

Таблица 1 – Массы адронов лидирующих  $\rho$  и  $\phi$ -траекторий

состояние ( $n_r+1$ ) <sup>2S+1</sup> L <sub>Jz</sub>	$m_{\text{асим}}$ , МэВ/с <sup>2</sup> формула (7)	$m_{\text{точн}}$ , МэВ/с <sup>2</sup> формула (9)	$m_{\text{эксп}}$ , МэВ/с <sup>2</sup> эксперимент	параметры в (8)
<b><math>\rho</math>-траектория (изоспин <math>I = 1</math>)</b>				
$1^3S_1$ $\rho(770)$	776	776	$775,5 \pm 0,34$	$\alpha_\infty = 1,477 \pm 0,003$ $\sigma = 0,142 \pm 0,002$ ГэВ <sup>2</sup> $m = 0,034 \pm 0,043$ ГэВ
$1^3P_2$ $a_2(1320)$	1317	1317	$1318,3 \pm 0,6$	
$1^3D_3$ $\rho_3(1690)$	1694	1694	$1688,8 \pm 2,1$	
$1^3F_4$ $a_4(2040)$	2001	2001	$2001,3 \pm 10$	
$2^3S_1$ $\rho(1700)$	1694	1694	$1720 \pm 20$	
$3^3S_1$ $\rho(1450)$	2266	2266	–	
<b><math>\phi</math>-траектория (изоспин <math>I = 0</math>)</b>				
$1^3S_1$ $\phi(1020)$	1019	1020	$1019,46 \pm 0,01$	$\alpha_\infty = 1,260 \pm 0,002$ $\sigma = 0,125 \pm 0,002$ ГэВ <sup>2</sup> $m = 0,434 \pm 0,008$ ГэВ
$1^3P_1$ $f_2(1525)$	1526	1503	$1525 \pm 5$	
$1D_1$ $\phi_3(1850)$	1852	1866	$1854 \pm 7$	
$1^3F_1$ $f_4(2050)$	2115	2169	$2018 \pm 11$	
$2^3S_1$ $\phi(1820)$	1824	1866	–	

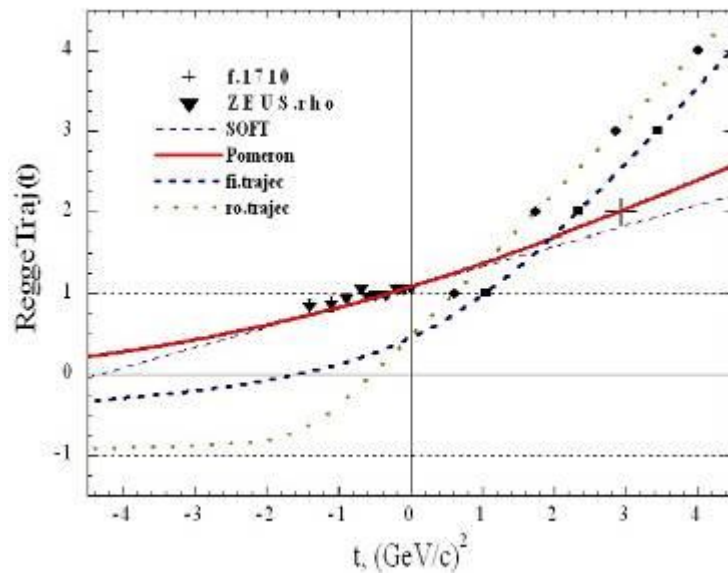


Рисунок 1

На рисунке 1 показаны траектории Редже померона,  $\rho$  и  $\phi$ -мезонов. Крестик обозначает кандидата в глоболы  $f(1710)$  для померона. Чёрные символы означают: треугольники – данные группы ZEUS [12], кружки – массы  $\rho$  мезонов, а квадраты –  $\phi$  адронов на траектории.

Таким образом, в рамках потенциального подхода с использованием КХД мотивированного асимптотически свободного потенциала, мы получили массовую формулу, вычислили массы адронов и соответствующие траектории Редже.

### Литература

1. Режде, Т. Теория сильных взаимодействий при больших энергиях / Т. Режде. – М.: Изд. ин. лит., 1963; Nuovo Cimento. – 1959. – Vol.14. – P. 951; Коллинз, П. Введение в реджевскую теорию и физику высоких энергий / П. Коллинз. – М.: Атомиздат, 1980.
2. Кайдалов, А.Б. Периферическая модель кварк-глюонных струн / А.Б. Кайдалов, К.А. Тер-Мартirosян // ЯФ. – 1984. – Т. 39. – С. 1545; ЯФ. – 1984. – Т. 40. – С. 211.
3. Transverse momentum spectra of D and B mesons in hadron collisions at high energies / I.Lykasov, Z.M. Karpova, M.N. Sergeenko, A. Bednyakov // Euro. Phys. Lett. – 2009. – Vol.86. – P. 61001.
4. Sergeenko, N. / N. Sergeenko // Phys. Rev. D. – 2000. – Vol.61. – P. 056010.
5. Лыкасов, Г.И. Модель кварк-глюонных струн: мягкие и жёсткие адронные процессы / Г.И. Лыкасов, Г. Аракелян, М.Н. Сергеенко // ЭЧАЯ. – 1999. – Т. 30(4). – С.1; // Лыкасов, Г.И. / Г.И. Лыкасов,

М.Н. Сергеевко // ЯФ. – 1991. – Т. 54. – С. 1691; // ЯФ. – 1992. – Т. 55. – С. 2502; // ЯФ. – 1996. – Т. 59. – С. 503.

6. Lykasov, G.I. / G.I. Lykasov, M.N. Sergeenko // Z. Phys. C. – 1996. – Vol. 70. – P. 455.

7. E. Eichten [et al.] // Phys. Rev. D. – 1978. – Vol. 17. – P. 3090.

8. G.I. Cornwall [et al.] // Phys. Rev. D. – 1982. – Vol. 26. – P. 1453.

9. Богуш, А.А. / А.А. Богуш, А.В. Остапенко, Е.А. Толкачѳв // ЯФ. – 1980. – Т. 31. – С.188; Остапенко, А.В. / А.В. Остапенко // ЯФ. – 1989. – Т. 50. – С. 1132.

10. Горбацевич, А.К. / А.К. Горбацевич, Л.М. Томильчик // Препринт № 415. Институт физики АН БССР, Minsk. – 1986.

11. Sergeenko, M.N. Glueballs and the pomeron / M.N. Sergeenko // Euro. Phys. Lett. – 2010. – Vol.89. – P. 11001; Z. Phys. C. – 1994. – Vol. 64. – P. 315; ЯФ. – 1993. – Т. 56. – С. 140.

12. M. Derrick [et al.] (ZEUS Collaboration) // Phys. Lett. – 1992. – Vol. B293. – P. 465; DEZY 94–117, 1994.

**О.П. Соловцова, В.Л. Хандрамай**

**Международный центр перспективных исследований,  
УО «Гомельский государственный технический  
университет имени П. О. Сухого», Беларусь**

## **КХД АНАЛИЗ ПРАВИЛА СУММ БЪЕРКЕНА С УЧѳТОМ ВКЛАДА $O(\alpha_s^4)$**

### **Введение**

В последние годы развитие теории сильных взаимодействий – квантовой хромодинамики (КХД) – в значительной степени связано с экспериментальными данными, полученными с высокой точностью как в области высоких, так и в области низких энергий. Основным методом проведения вычислений в КХД является теория возмущений (ТВ), дополненная процедурой перенормировок и методом ренормализационной группы (РГ) [1]. В области больших передач импульса, благодаря свойству асимптотической свободы в КХД, пертурбативная компонента оказывается доминирующей, а неизвестные вклады высших порядков ТВ малы. Поэтому КХД хорошо описывает взаимодействие адронов при больших передачах импульса. Однако при анализе адронных процессов, характерный энергетический масштаб которых принадлежит низкоэнергетической области КХД, т. е. порядка нескольких ГэВ и ниже, возникают трудности. Одно из направлений

улучшения теоретических предсказаний направлено на вычисление все более высоких порядков ТВ рядов. В настоящее время в рамках КХД четырехпетлевые расчеты имеются только для небольшого числа процессов. С выходом работы [2] такая возможность открылась и для широко известного правила сумм Бьеркена [3]. В этом правиле сумм при больших  $Q^2$  вклады высших твистов исчезают, и поведение интеграла Бьеркена определяется исключительно пертурбативной составляющей. При малых же  $Q^2$  высшие твисты дают существенный вклад, но информация о величине этого вклада оказывается тесно связанной с пертурбативной составляющей.

В данной работе представлен четырехпетлевой КХД анализ для правила сумм Бьеркена, исследовано влияние вклада  $O(\alpha_s^4)$ , и из имеющихся в настоящее время высокоточных экспериментальных данных, полученных в лаборатории им. Т. Джефферсона (США) [4], извлечена информация о вкладе высшего твиста.

### 1. Правило сумм Бьеркена

Правило сумм Бьеркена определяется интегралом от разности поляризованных структурных функций  $g_1$  протона и нейтрона

$$\Gamma_1^{p-n}(Q^2) = \int_0^1 [g_1^p(x, Q^2) - g_1^n(x, Q^2)] dx.$$

(1)

При больших передачах  $Q^2$  интеграл (1) имеет хорошо известный предел  $\Gamma_1^{p-n}(\infty) = \frac{g_A}{6}$  [3]. Этот предел определяется константой  $g_A = 1,267 \pm 0,004$  [5], получаемой из  $\beta$ -распада нейтрона. При конечных значениях  $Q^2$  интеграл (1) можно записать в виде суммы пертурбативной части и вклада высших твистов

$$\Gamma_1^{p-n}(Q^2) = \frac{g_A}{6} (1 - \Delta_{Bj}(Q^2)) + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\mu_{2i}^{p-n}}{Q^{2i-2}}, \quad (2)$$

где  $\Delta_{Bj}$  – КХД поправка, которая представляется рядом по степеням инвариантного заряда  $\alpha_s$ :

$$\Delta_{Bj}(Q^2) = \sum_{1 \leq k \leq 4} c_k \alpha_s^k(Q^2).$$

(3)

Первые три коэффициента в разложении (3) были давно известны:  $c_1 = 0,31831$ ,  $c_2 = 0,36307$  и  $c_3 = 0,65197$ , а коэффициент  $c_4 = 1,8042$  был вычислен недавно в работе [2] – это открыло возможность для нового КХД анализа, который представлен в этой работе.

## 2. Пертурбативная часть

Исследуем  $Q^2$ -зависимость пертурбативной части правила сумм Бьеркена (2) в разных порядках ТВ (NLO, N<sup>2</sup>LO и N<sup>3</sup>LO). Инвариантный заряд КХД  $\alpha_s$ , входящий в (3), находим как точное решение ренормгруппового уравнения в соответствующем порядке ТВ разложения. Нормировка заряда выполняется на масштабе массы Z-бозона так, чтобы  $\alpha_s(M_Z) = 0,1184$  [5]. Результаты расчетов представлены на рисунке 1. Для полноты анализа на этом рисунке показаны экспериментальные данные, полученные в [4]. Как видно из рисунка 1, в области ниже  $Q^2 \sim 2$  ГэВ<sup>2</sup> поведение  $\Gamma_1^{p-n}$  существенно меняется от порядка к порядку. При этом в области  $Q^2 > 0,8$  ГэВ<sup>2</sup> N<sup>3</sup>LO порядок разложения выглядит предпочтительнее. В связи с этим исследуем структуру ряда (3) на уровне N<sup>3</sup>LO. Для этого рассмотрим поведение относительных вкладов отдельных слагаемых в (3):

$$N_i(Q^2) = \frac{\sigma_i(Q^2)}{\Delta_{Bj}(Q^2)},$$

где  $\sigma_i = c_i \alpha_s^i$  –  $i$ -е слагаемое ряда  $\Delta_{Bj}$ .

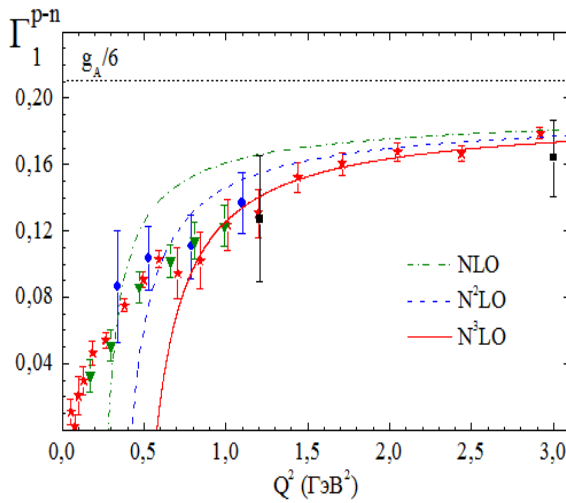


Рисунок 1 –  
Пертурбативная часть  $\Gamma_1^{p-n}$   
в различных порядках ТВ

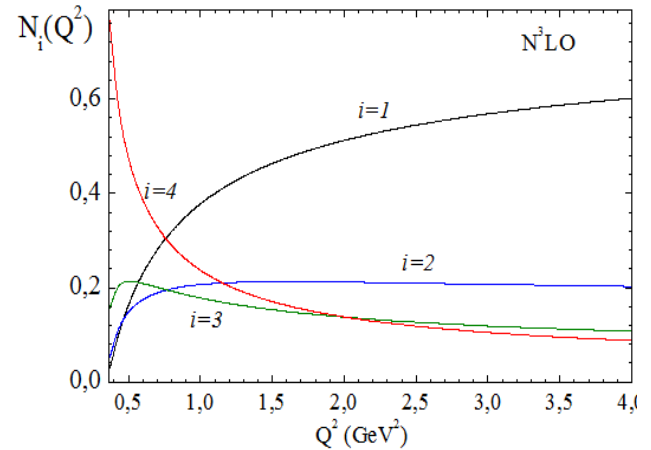


Рисунок 2 –  
Относительные вклады  
отдельных слагаемых в  $\Delta_{Bj}$   
на четырехпетлевом уровне

Результат расчета представлен на рисунке 2. Этот рисунок демонстрирует, что начиная с  $Q^2 \sim 2$  ГэВ<sup>2</sup> вклад четвертого слагаемого в сумму ряда становится больше, чем вклад третьего, продолжая расти с

уменьшением  $Q^2$ . При этом на масштабе  $Q^2 \sim 0,8 \text{ ГэВ}^2$  вклад от четырехпетлевого слагаемого становится определяющим. Это указывает на то, что ряд становится расходящимся. Таким образом, N<sup>3</sup>LO приближение не улучшает точность теоретического анализа.

### 3. Вклад высших твистов

Учтем в нашем анализе вклад от высших твистов, который соответствует выражению под знаком суммы в (2). Используя экспериментальные данные [4], мы извлекаем значения коэффициента высшего твиста  $\mu_4^{p-n}$  с использованием различных порядков ТВ. Полученные значения коэффициентов высших твистов представлены в таблице 1, а на рисунке 3 показаны соответствующие результаты однопараметрического фитирования.

Таблица 1 – Значения коэффициентов высших твистов (нормированных на массу нуклона  $M = 0,938 \text{ ГэВ}$ ) в различных порядках ТВ

Порядок ТВ	2-петли	3-петли	4-петли
$\mu_4^{p-n} / M^2$	-0,028(5)	-0,014(7)	0,006(9)

Из рисунка 3 видно, что с увеличением порядка ТВ граница применимости ТВ смещается к более высоким  $Q^2$ . Это обусловлено как структурой ряда (3), так и проявлением нефизических особенностей инвариантного заряда [6].

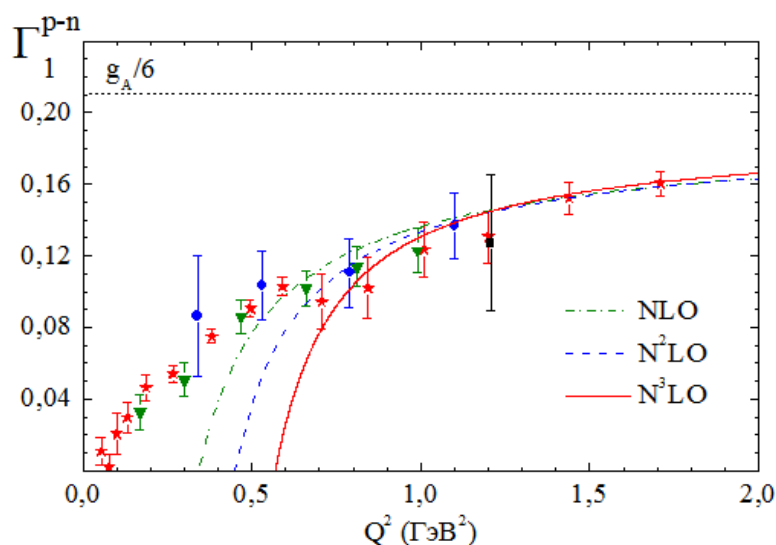


Рисунок 3 – Результаты фитирования в различных порядках ТВ



## Заключение

Выполненный анализ показал, что в исследуемой низкоэнергетической области  $Q^2 \sim 2 \text{ ГэВ}^2$  и ниже включение четырехпетлевой поправки не улучшает точности теоретического анализа данных по  $\Gamma_1^{p-n}$ . При учете вклада высшего твиста-4, мы установили, что отсутствует петлевая стабильность, а именно, извлеченные значения коэффициента  $\mu_4^{p-n}$  меняются от порядка к порядку ТВ, так что значение  $\mu_4^{p-n}$  на двух- и трехпетлевом уровне отрицательно, а на четырехпетлевом – положительно. Такая ситуация не позволяет сделать однозначный вывод о величине непертурбативного вклада.

В заключение отметим, что использование аналитической теории возмущений [6] позволяет, как это показал выполненный в работе [7] анализ, получить стабильные значения для непертурбативного вклада на трехпетлевом уровне. В дальнейшем мы планируем, с использованием аналитического подхода, расширить анализ работы [7] до четырехпетлевого уровня.

Авторы благодарны академику РАН Д.В. Ширкову за постоянную поддержку и интерес к данной работе.

Работа выполнена при поддержке гранта БелРФФИ-ОИЯИ-2010-001 и РФФИ, грант № 11-01-00182.

## Литература

1. Боголюбов, Н.Н. Введение в теорию квантованных полей / Н.Н.Боголюбов, Д.В. Ширков. – 4-е изд. – Москва: Наука, 1984. – 597 с.
2. Baikov, P.A. Adler function, Bjorken sum rule, and the Crewther relation to order  $\alpha_s^4$  in a General gauge theory / P.A. Baikov, K.G. Chetyrkin, J. Kuhn // Phys. Rev. Lett. – 2010. – Vol. 104. – P. 132004.
3. Bjorken, J.D. Applications of the chiral  $U(6) \times (6)$  algebra of current densities / J.D. Bjorken // Phys. Rev. – 1966. – Vol. 148. – P. 1467–1478.
4. Measurement of the  $x$ - and  $Q^2$ -dependence of the asymmetry  $A_1$  on the nucleon / K.V. Dharmawardane [et al.] // Phys. Lett. B. – 2006. – Vol. 641 – P. 11–17; Quark-hadron duality in spin structure functions  $g_1^p$  and  $g_1^d$  / P.E. Bosted [et al.] // Phys. Rev. C. – 2007. – Vol. 75. – P. 035203; Moments of the spin structure functions  $g_1^p$  and  $g_1^d$  for  $0.05 < Q^2 < 3 \text{ GeV}^2$  / Y. Prok [et al.] // Phys. Lett. B. – 2009. – Vol. 672. – P. 12–16.

5. Review of particle physics / K. Nakamura [et al.] // J. Phys. G. – 2010. – Vol.37. – P. 075021.

6. Shirkov, D.V. Ten years of the Analytic Perturbation Theory in QCD / D.V. Shirkov, I.L. Solovtsov // Theor. Math. Phys. – 2007. – Vol. 150. – P. 132–152.

7. Pasechnik, R.S. Bjorken sum rule and pQCD frontier on the move / R.S. Pasechnik, D.V. Shirkov, O.V. Teryaev // Phys. Rev. D. – 2008. – Vol. 78. – P.071902; Nucleon spin structure and pQCD frontier on the move / R.S. Pasechnik, D.V. Shirkov, O.V. Teryaev, O.P. Solovtsova, V.L. Khandramai // Phys. Rev. D. – 2010. – Vol. 81. – P. 016010.

**О.П. Соловцова, Ю.Д. Черниченко**

**УО «Гомельский государственный технический  
университет имени П. О. Сухого»,**

**Международный центр перспективных исследований, Беларусь**

## **РЕЛЯТИВИСТСКОЕ ОБОБЩЕНИЕ КУЛОНОВСКОГО РЕСУММИРУЮЩЕГО ФАКТОРА**

### **Введение**

Решение задачи о нерелятивистском потенциальном рассеянии двух бесспиновых частиц на притягивающем кулоновском потенциале

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} \quad (1)$$

позволяет найти кулоновский ресуммирующий фактор. Этот фактор в случае орбитального момента  $\ell = 0$  является известным  $S$ -фактором Гамова-Зоммерфельда-Сахарова [1–3], который можно записать в виде

$$S_{\text{nr}} = \frac{X_{\text{nr}}}{1 - \exp(-X_{\text{nr}})}, \quad X_{\text{nr}} = \frac{\pi \alpha}{v_{\text{nr}}}. \quad (2)$$

Ресуммирующий фактор определяется квадратом модуля волновой функции относительного движения, вычисленной в начале координат и нормированной условием, что амплитуда асимптотической плоской волны равна единицы. С другой стороны, квадрат модуля волновой функции в нуле определяет вероятность нахождения частиц вблизи

друг друга и, следовательно, сечение процесса прямо пропорционально  $S$ - фактору. Отметим, что ресуммирующий фактор особенно велик, если скорость  $v_{nr} \rightarrow 0$ .

В квантовой хромодинамике (КХД)  $S$ -фактор важен вблизи порога рождения кварковой пары. В этой области пертурбативное разложение становится непригодным даже в том случае, если КХД константа связи  $\alpha_s$  мала [4], [5]. Понятно, что применение  $S$ -фактора в КХД требует обобщения нерелятивистского выражения (2). По-видимому, впервые релятивистская модификация  $S$ - фактора (2) в КХД для случая взаимодействия двух релятивистских частиц равных масс была выполнена в работе [6] (см. также [7]). Точно такой же вид  $S$ - фактора, как в работе [6], был позднее предложен в работе [8]. Другое релятивистское обобщение  $S$ - фактора также в случае двух частиц равных масс было получено в работе [9]. Релятивистский  $S$ -фактор для случая двух частиц произвольных масс  $m_1, m_2$  был предложен в работе [10].

Новый этап в релятивистском обобщении  $S$ - фактора (2) сделан в работе [11], в которой был применен релятивистский квазипотенциальный (РКП) подход, сформулированный в работе [12], но в форме, предложенной в [13]. Разработанный в [11] метод использует возможность перехода от импульсной формулировки в пространстве Лобачевского к трехмерному релятивистскому конфигурационному представлению, введенному в [14]. Полученное в [11] выражение для случая взаимодействия двух релятивистских частиц равных масс  $m$  имеет вид

$$S(\chi) = \frac{X(\chi)}{1 - \exp[-X(\chi)]}, \quad X(\chi) = \frac{\pi \alpha}{\text{sh } \chi} = \frac{\pi \alpha \sqrt{1-v^2}}{v}. \quad (3)$$

Здесь  $\chi$  есть быстрота, которая связана с полной энергией взаимодействующих частиц в с.ц.и.  $\sqrt{s}$  соотношением  $2m \text{ch } \chi = \sqrt{s}$ ,  $v = \sqrt{1 - 4m^2/s}$ . Далее этот же метод был успешно применен для случая взаимодействия двух релятивистских частиц произвольных масс  $m_1, m_2$  [15]. Соответствующее выражение для  $S$ - фактора имеет вид

$$S_{\text{RQP}}(u) = \frac{X_{\text{RQP}}(u)}{1 - \exp[-X_{\text{RQP}}(u)]}, \quad X_{\text{RQP}}(\chi) = \frac{\pi \alpha}{u} \sqrt{1-u^2},$$

(4)

где скорость  $u$  задается выражением

$$u = \sqrt{1 - 4m'^2 / [s - (m_1 - m_2)^2]},$$

(5)

а  $m' = \sqrt{m_1 m_2}$  – масса эффективной релятивистской частицы, выступающей в качестве двухчастичной системы, концепция которой возникает в РКП-подходе [16]. Применение релятивистского  $S$ -фактора (3) можно найти в [17]–[20]. Цель данной работы – получить ресуммирующий фактор для произвольного значения орбитального момента ( $\ell \geq 0$ ) в случае взаимодействия двух релятивистских частиц произвольных масс  $m_1, m_2$ .

### 1. Релятивистский $L$ - фактор: случай произвольных масс

Основой рассмотрения является интегральное релятивистское уравнение Шредингера в  $\mathbf{r}$ -представлении [16] для парциальной волновой РКП-функции  $\varphi_\ell(\rho, \chi)$  ( $\hbar = c = 1$ ) [15]

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\chi' \frac{(\text{sh } \chi')^{2\ell+2} (-1)^{\ell+1}}{\rho^{(\ell+1)}} (2\text{ch } \chi - 2\text{ch } \chi') \left( \frac{d}{d \text{ch } \chi'} \right)^\ell \left( \frac{\sin \rho \chi'}{\text{sh } \chi'} \right) \times \\ & \times \left( \frac{d}{d \text{ch } \chi'} \right)^\ell \frac{1}{\text{sh } \chi'} \int_0^\infty d\rho' \frac{\rho' \sin \rho' \chi'}{(-\rho')^{(\ell+1)}} \varphi_\ell(\rho', \chi) = \frac{2\mu V(\rho) \varphi_\ell(\rho, \chi)}{m' \rho}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  – обычная приведенная масса,  $\chi$  – быстрота эффективной релятивистской частицы, которая выступает вместо двухчастичной системы, имеет массу  $m'$ , относительный 3-импульс  $\mathbf{q}'$  и несет полную энергию взаимодействующих частиц в с.ц.и.,  $\sqrt{s}$ , пропорциональную энергии  $E_{q'}$  одной эффективной релятивистской частицы массы  $m'$  [16, 21]:

$$\sqrt{s} = \sqrt{m_1^2 + \mathbf{q}^2} + \sqrt{m_2^2 + \mathbf{q}^2} = \frac{m'}{\mu} E_{q'}, \quad E_{q'} = \sqrt{m'^2 + \mathbf{q}'^2} = m' \text{ch } \chi; \quad (7)$$

$V(\rho)$  – локальный в  $\mathbf{r}$ -представлении сферически симметричный квазипотенциал, функция  $(-\rho)^{(l)} = i^l \Gamma(l + i\rho) / \Gamma(i\rho)$  называется обобщенной степенью [14], где  $\Gamma(z)$  – гамма-функция, а  $\rho$  – модуль радиуса-вектора  $\boldsymbol{\rho} = m' \mathbf{r}$  ( $\boldsymbol{\rho} = \rho \mathbf{n}$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ), являющийся релятивистским инвариантом [21].

Решение РКП-уравнения (6) с кулоновским потенциалом (1) будем искать в виде

$$\varphi_\ell(\rho, \chi) = \frac{(-\rho)^{(\ell+1)}}{\rho} \int_{\alpha_-}^{\alpha_+} d\zeta e^{i\rho\zeta} R_\ell(\zeta, \chi), \quad (8)$$

где  $\zeta$  - интегрирование выполняется в комплексной плоскости вдоль

контура с концевыми точками  $\alpha_-$  и  $\alpha_+ : \alpha_- = -R - i\varepsilon$ ,  $\alpha_+ = -R + i\varepsilon$ ,  $R \rightarrow +\infty$ ,  $\varepsilon \rightarrow +0$ . Подставляя (8) в (6), приходим к уравнению [15]

$$\begin{aligned} & (-1)^\ell \int_{\alpha_-}^{\alpha_+} d\zeta R_\ell(\zeta, \chi) \left( \frac{d}{d\text{ch } \zeta} \right)^\ell \left[ (\text{sh } \zeta)^{2\ell+1} (2\text{ch } \chi - 2\text{ch } \zeta) \times \right. \\ & \left. \times \left( \frac{d}{d\text{ch } \zeta} \right)^\ell \left( \frac{e^{i\rho\zeta}}{\text{sh } \zeta} \right) \right] = -\frac{2\mu\alpha}{m'\rho} \prod_{n=1}^{\ell} (\rho^2 + n^2) \int_{\alpha_-}^{\alpha_+} d\zeta e^{i\rho\zeta} R_\ell(\zeta, \chi). \end{aligned} \quad (9)$$

Решив это уравнение при  $\ell \geq 0$  и выполнив  $\zeta$ -интегрирование в комплексной плоскости вдоль контура с концевыми точками  $\alpha_-$  и  $\alpha_+$  (см. [11], [15], [22]), получаем выражение не содержащее  $i$ -периодических констант, которое может быть представлено через гипергеометрическую функцию:

$$\begin{aligned} \varphi_\ell(\rho, \chi) &= N_\ell(\chi) (-\rho)^{(\ell+1)} e^{i\rho\chi + iA\chi + i\pi(\ell+1)} \times \\ & \times F\left(\ell+1-iA, \ell+1-i\rho; 2\ell+2; 1-e^{-2\chi}\right), \end{aligned} \quad (10)$$

где  $A = \alpha\mu/(m'\text{sh } \chi)$ . Нормировочный множитель  $N_\ell(\chi)$  в (10) может быть получен (так же, как в [23]) из условия

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \varphi_\ell(\rho, \chi) = \rho p_\ell(\rho, \text{ch } \chi) \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} \frac{\sin(\rho\chi - \pi\ell/2)}{\text{sh } \chi}, \quad (11)$$

где функция  $p_\ell(\rho, \text{ch } \chi)$  дается выражением [21]

$$p_\ell(\rho, \text{ch } \chi) = \sqrt{\frac{\pi}{2\text{sh } \chi}} \frac{(-1)^{\ell+1}}{\rho} (-\rho)^{(\ell+1)} P_{-1/2+i\rho}^{-1/2-\ell}(\text{ch } \chi),$$

а  $P_\nu^\mu(z)$  – функции Лежандра первого рода.

Релятивистский ресуммирующий пороговый фактор для произвольного орбитального момента  $\ell \geq 0$  определяется через конечно-разностную производную  $\Delta^* = [\exp(id/d\rho) - 1]/i$  выражением [23]

$$L_{\text{RQP}}(\chi) = \lim_{\rho \rightarrow i} \left| \frac{\Gamma(2\ell+2)}{(2\text{sh } \chi)^\ell \Gamma^2(\ell+1)} (\Delta^*)^\ell \left[ \frac{\varphi_\ell(\rho, \chi)}{\rho} \right] \right|^2. \quad (12)$$

Теперь, используя соотношения (10)–(12), получаем выражение для релятивистского  $L$ -фактора для случая взаимодействия двух релятивистских частиц произвольных масс:

$$L_{\text{RQP}}(\chi) = \frac{X_{\text{RQP}}(\chi)}{1 - \exp[-X_{\text{RQP}}(\chi)]} \prod_{n=1}^{\ell} \left[ 1 + \left( \frac{\alpha \mu}{nm' \text{sh } \chi} \right)^2 \right], \quad X_{\text{RQP}}(\chi) = \frac{2\pi \alpha \mu}{m' \text{sh } \chi}, \quad (13)$$

где быстрота  $\chi$  связана с полной энергией  $\sqrt{s}$  соотношением (7). Функция  $X_{\text{RQP}}(\chi)$  в (13) может быть выражена в терминах «скорости»  $u$  (см. формулы (4), (5)) или через относительную скорость эффективной релятивистской частицы [15]

$$u'_{\text{rel}} = \frac{2u}{\sqrt{1-u^2}}. \quad (14)$$

В терминах относительной скорости  $L$ -фактор (13) дается выражением

$$L_{\text{RQP}}(u'_{\text{rel}}) = \frac{X_{\text{RQP}}(u'_{\text{rel}})}{1 - \exp[-X_{\text{RQP}}(u'_{\text{rel}})]} \prod_{n=1}^{\ell} \left[ 1 + \left( \frac{\alpha}{nu'_{\text{rel}}} \right)^2 \right]. \quad (15)$$

Фактор (15) при  $\ell = 0$  лишь формально имеет ту же форму, что и нерелятивистский фактор (2). Однако теперь роль параметра скорости в новом факторе играет относительная скорость эффективной релятивистской частицы (14), выступающей вместо двухчастичной системы. Фактор (15) имеет явно выраженный релятивистский характер, поскольку как аргумент  $r$  (модуль радиуса-вектора  $\mathbf{r}$ ) в кулоновском потенциале (1), так и относительная скорость эффективной релятивистской частицы (14) являются релятивистскими инвариантами.

Релятивистский пороговый ресуммирующий фактор (15) имеет следующие важные свойства:

1. В нерелятивистском пределе,  $u \ll 1$ , он воспроизводит известный нерелятивистский результат.

2. В релятивистском пределе,  $u \rightarrow 1$ ,  $L$ -фактор (15) стремится к единице.

3. Для случая взаимодействия двух релятивистских частиц равных масс он совпадает с  $L$ -фактором, полученном в [23].

4. В ультрарелятивистском пределе, как это было аргументировано в [24], [25], спектр связанных состояний исчезает, когда масса  $m' \rightarrow 0$ , так как масса частицы является единственным размерным параметром. Эта особенность отражает существенное различие между потенциальными моделями и квантовой теорией поля, где появляется дополнительный размерный параметр. Кроме того, мы можем также заключить, что  $L$ -фактор, который соответствует непрерывному спектру, должен стремиться к 1 при  $m' \rightarrow 0$ . Тем самым, в отличие от нерелятивистского случая, релятивистский пороговый ресуммиру-

щий  $L$ -фактор (15) воспроизводит как известный нерелятивистский, так и ожидаемый ультрарелятивистский пределы.

### Заключение

В работе получен новый релятивистский пороговый ресуммирующий  $L$ - фактор с произвольным значением орбитального момента  $\ell \geq 0$  для случая взаимодействия двух релятивистских частиц произвольных масс. Для этой цели была использована формулировка квазипотенциального метода в трехмерном релятивистском конфигурационном представлении для случая взаимодействия двух релятивистских частиц произвольных масс с кулоновским потенциалом.

Полученный в работе релятивистский пороговый  $L$ -фактор (15), соответствующий КХД-подобному потенциалу, воспроизводит известное нерелятивистское поведение при малых скоростях и ожидаемый предел в ультрарелятивистском случае, равный 1.

Авторы благодарны Ю. С. Вернову и М. Н. Мнацакановой за проявленный интерес к работе и Р. Н. Фаустову за полезные замечания. Работа выполнена при поддержке БРФФИ, договор Ф10Д-001.

### Литература

1. Gamov, G. Zur Quantentheorie des Atomkernes / G. Gamov // Zeit. Phys. – 1928. – Vol. 51. – P. 204–212.
2. Зоммерфельд, А. Строение атома и спектры / А. Зоммерфельд. – Москва: Гостехиздат, 1956. – Т. 2. – 695 с.
3. Сахаров, А.Д. Взаимодействие электрона и позитрона при рождении пар / А.Д. Сахаров // ЖЭТФ. – 1948. – Т. 18, Вып. 7. – С. 631–635.
4. Appelquist, T. Orthocharmonium and  $e^+e^-$  Annihilation / T. Appelquist, H.D.Politzer // Phys. Rev. D. – 1975. – Vol. 12. – P. 1404–1414;  
Appelquist, T. Heavy Quarks and  $e^+e^-$  Annihilation / T. Appelquist, H.D.Politzer // Phys. Rev. Lett. – 1975. – Vol. 34, № 1. – P. 43–45.
5. Poggio, E.C. Smearing Method in the Quark Model / E.C. Poggio, H.R.Quinn, S. Weinberg // Phys. Rev. D. – 1976. – Vol. 13. – P. 1958–1968.
6. Fadin, V. On the Threshold Behaviour of Heavy Top Production / V. Fadin, V. Khoze, T. Sjostrand // Z. Physik. C. – Particles and Fields. – 1990. – Vol. 48. – P. 613–621.
7. Coulomb Effects in  $W^+W^-$  Production / V.S. Fadin et. al.. // Phys. Rev. D. – 1995. – Vol. 52, № 3. – P. 1377–1385.
8. Hoang, A.H. Two-Loop Corrections to the Electromagnetic Vertex

for Energies Close to Threshold / A.H. Hoang // Phys. Rev. D. – Vol. 56, № 11. – P. 7276–7283.

9. Yoon, J.-H. Relativistic Modification of the Gamov Factor / J.-H. Yoon, Ch.-Y. Wong // Phys. Rev. C. – 2000. – Vol. 61, № 4. – Art. 044905(10);

Yoon, J.-H. Relativistic Generalization of the Gamov Factor for Fermion Pair Production or Annihilation / J.-H. Yoon, Ch.-Y. Wong // J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. – 2005. – Vol. 31. – P. 149–160.

10. Arbuzov, A.B. On a Novel Relativistic Quasi-Potential Equation for Two Scalar Particles / A.B. Arbuzov // Nuov. Cim. A. – 1994. – Vol. 107, № 8. – P. 1263–1273.

11. Milton, K.A. Relativistic Coulomb Resummation in QCD / K.A. Milton, I.L. Solovtsov // Mod. Phys. Lett. A. – 2001. – Vol. 16. – P. 2213–2219.

12. Logunov, A.A. Quasi-Optical Approach in Quantum Field Theory / A.A. Logunov, A.N. Tavkhelidze // Nuov. Cim. – 1963. – Vol. 29, № 2. – P. 380–399.

13. Kadyshevsky, V.G. Quasi-Potential Type Equation for the Relativistic Scattering Amplitude / V.G. Kadyshevsky // Nucl. Phys. B. – 1968. – Vol. 6, № 2. – P. 125–148.

14. Kadyshevsky, V.G. Quasipotential Approach and the Expansion in Relativistic Spherical Functions / V.G. Kadyshevsky, R.M. Mir-Kasimov, N.B. Skachkov // Nuov. Cim. A. – 1968. – Vol. 55, № 2. – P. 233–257.

15. Соловцова, О.П. Пороговый ресуммирующий  $S$ -фактор в КХД: случай неравных масс / О.П. Соловцова, Ю.Д. Черниченко // ЯФ. – 2010. – Т. 73, № 9. – С. 1658–1667.

16. Кадышевский, В.Г. О трехмерных релятивистских уравнениях для системы двух частиц с неравными массами / В.Г. Кадышевский, М.Д. Матеев, Р.М. Мир-Касимов // ЯФ. – 1970. – Т. 11, Вып. 3. – С. 692–700.

17. Milton, K.A. Adler Function for Light Quarks in Analytic Perturbation Theory / K.A. Milton, I.L. Solovtsov, O.P. Solovtsova // Phys. Rev. D. – 2001. – Vol. 64. – P. 016005(6).

18. Solovtsov, I.L. Non-Perturbative Expansion Technique and Threshold Resummation for the Inclusive Tau-Decay and  $e^+e^-$  Annihilation into Hadrons Processes / I.L. Solovtsov, O.P. Solovtsova // Nonlinear Phenomena in Complex Systems : Proceedings of the X Annual Seminar Nonlinear Phenomena in Complex Systems, Minsk, Belarus, May 15–18, 2001 / Editors L.F. Babichev, V.I. Kuvshinov. – Minsk, 2002. – Vol. 5, № 1. – P. 51–58.

19. Milton, K.A. An Analytic Method of Describing  $R$ -Related Quanti-



ties in QCD / К.А. Milton, I.L. Solovtsov, O.P. Solovtsova // Mod. Phys. Lett. A. – 2006. – Vol. 21. – P. 1355–1368.

20. Milton, К.А. Coulomb Resummation and Monopole Masses / К.А. Milton // Int. Sem. On Contemporary Probl. of Elem. Part. Phys., Dedicated to the Memory of I.L. Solovtsov: Proceedings of the International Sem., Dubna, Jan. 17–18, 2008 / JINR. – Dubna, 2008. – P. 82–92.

21. Кадышевский, В.Г. Трехмерная формулировка релятивистской проблемы двух тел / В.Г. Кадышевский, Р.М. Мир-Касимов, Н.Б. Скачков // ЭЧАЯ. – 1972. – Т. 2, Вып. 3. – С. 635–690.

22. Solovtsov, I.L. Relativistic Resummation of Threshold Singularities in the Quasi-potential Approach / I.L. Solovtsov, O.P. Solovtsova, Yu.D. Chernichenko // Письма в ЭЧАЯ. – 2005. – Т. 2, № 4. – С. 17–23;

23. Соловцов, И.Л. Релятивистские ресуммирующие факторы в квази-потенциальном подходе / И.Л. Соловцов, Ю.Д. Черниченко // Известия НАН Беларуси. Серия Физ.-мат. наук. – 2007. – № 2. – С. 103–107.

24. Lucha, W. Relativistic Virial Theorem / W. Lucha, F.F. Schoberl // Phys. Rev. Lett. – 1990. – Vol. 64, № 23. – P. 2733–2735.

25. Lucha, W. Relativistic Coulomb Problem: Lowest-Lying Energy Levels at the Critical Coupling Constant Analytically / W. Lucha, F.F. Schoberl // Phys. Lett. B. – 1996. – Vol. 387, № 3. – P. 573–576.

**Ю.Ю. Степаненко<sup>1</sup>, С.В. Подольский<sup>1</sup>, А.С. Курилин<sup>1</sup>,  
Н.В. Максименко<sup>2</sup>, В.В. Андреев<sup>2</sup>, К.С. Бабич<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Объединенный Институт Ядерных Исследований, Дубна, Россия,

<sup>2</sup>УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Беларусь

## **НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ МЕТОДИКИ ПОВТОРНОГО АНАЛИЗА ДАННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТА E391**

Эксперимент E391 [1] (КЕК, Япония) посвящен определению относительной вероятности распада  $K_L^0 \rightarrow \pi^0 \nu \bar{\nu}$ , который может считаться идеальным процессом для измерения величины эффекта CP-нарушения в рамках Стандартной модели [2].

Методика поиска событий  $K_L^0 \rightarrow \pi^0 \nu \bar{\nu}$  в эксперименте E391 основана на наблюдении сигнала  $K_L^0 \rightarrow \pi^0 (\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma) + \nu + \bar{\nu}$  («ничего»), где энергии и координаты  $\gamma$ -квантов измеряются электромагнитным CsI-калориметром установки (рисунок 1), а «ничего» подтверждается отсутствием сигнала в герметичной системе вето, которая окружает об-

ласть распада.

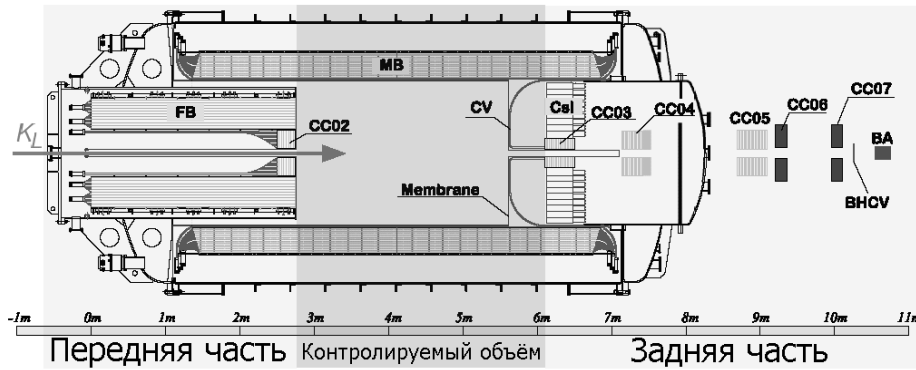


Рисунок 1 – Установка E391

Процесс  $K_L^0 \rightarrow \pi^0 \nu \bar{\nu}$  характеризуется малым значением относительной вероятности и составляет  $2,8 \cdot 10^{-11}$  в рамках Стандартной модели. Он протекает на фоне большого числа других распадов  $K_L^0$  – мезона, которые характеризуются много большими значениями парциальной ширины. Кроме того, существуют источники фоновых событий, связанные с взаимодействиями частиц пучка. Поэтому регистрация распада  $K_L^0 \rightarrow \pi^0 \nu \bar{\nu}$  является сложной экспериментальной задачей.

В настоящее время завершен основной этап обработки данных и получен новый экспериментальный верхний предел относительной вероятности [3], равный:  $Br(K_L^0 \rightarrow \pi^0 \nu \bar{\nu}) = 2,6 \cdot 10^{-8}$ .

Важным фактором успеха эксперимента E391 является достижение максимальной чувствительности установки к регистрации распада  $K_L^0 \rightarrow \pi^0 \nu \bar{\nu}$ . Поэтому, для анализа экспериментальных данных необходимо разработать методы и критерии, обеспечивающие максимально глубокое выделение сигнальных событий (*S*-signal) – кандидатов на исследуемый процесс и подавление источников фона (*N*-noise). Одним из критериев оценки эффективности селекции выступает значение отношения величин *S/N*.

Принимая во внимание вышеизложенное, в настоящей работе были разработаны новые методы анализа данных, позволяющие получить значительный прирост в чувствительности установки.

Основным кинематическим критерием в идентификации событий  $K_L^0 \rightarrow \pi^0 \nu \bar{\nu}$  послужило наличие *z*-координаты вершины распада в рабочей зоне установки и принадлежность величины поперечного импульса  $\pi^0$ -мезона заданному диапазону. Из-за крупной сегментации

кристаллов CsI-калориметра (747см) и их продольном размещении вдоль оси пучка измерение угла попадания  $\gamma$ -квантов установкой E391 было затруднено. Поэтому вершина распада восстанавливалась в предположении того, что два  $\gamma$ -кванта были образованы в результате распада  $\pi^0$ -мезона и их инвариантная масса равна массе  $\pi^0$ . При таком условии фоновые события могут быть ошибочно идентифицированы как сигнальные.

Для подавления таких событий был предложен метод восстановления направления  $\gamma$ -квантов [4] с использованием нейронной сети с радиальной базисной передаточной функцией. Измерение углов  $\gamma$ -квантов представляет собой очень эффективный инструмент для устранения фоновых событий. В результате использования данного подхода удалось получить новые критерии для отбора событий, кандидатов на искомый распад: направление  $\gamma$ -квантов, восстановленная масса распавшейся частицы ( $X \rightarrow \gamma\gamma$ ), а также z-координата вершины распада. Использование новых переменных в анализе позволило увеличить чувствительность установки к регистрации распада  $K_L^0 \rightarrow \pi^0 \nu \bar{\nu}$  на 35 % [5].

Отбор сигнальных событий осуществлялся с использованием граничных условий (порогов), накладываемых на величину энерговыделения в детекторах вето системы и на восстановленные кинематические величины распада. Классический подход в определении значений порогов для каждой величины заключается в сравнении ее распределений для Монте-Карло моделирования искомого распада и фоновых событий. Однако существуют некоторые ограничения в применении данного метода. Во-первых, для максимизации величины  $S/N$  необходима оптимизация порогов обрезаний, что требует значительных затрат времени. Во-вторых, нет никаких явных признаков и правил отбора, которые могут гарантировать, что вновь полученный набор значений порогов позволит получить наилучшее значение отношения  $S/N$  среди остальных и увеличить чувствительность эксперимента. То есть, конечный результат обработки напрямую зависит от влияния человеческого фактора. Чтобы избежать таких ограничений, был разработан метод оптимизации обрезаний на основе генетических алгоритмов [6].

Такой подход заключается в рассмотрении отдельного набора порогов как одной “особи”. Это означает, что особь состоит из некоторого числа выражений, каждое из которых соответствует одному порогу. В результате эволюции каждого выражения в конечном итоге мы можем получить значение соответствующего порога. Процесс эволюции подразумевает получение особи максимально приспособлен-

ной к функции пригодности, параметрами которой являются значения  $S$  и  $N$ , которые вычисляются для каждой особи.

Процесс оптимизации может быть представлен следующим образом. Сначала генерируется популяция, состоящая из особей, т. е. генерируются выражения, которые представляют собой набор порогов и заполняют каждую особь. Далее для каждой особи из популяции вычисляется функция пригодности. На следующем шаге, используя значение функции пригодности, из всей популяции выбирается определенная ее доля особей, которая останется «в живых» на этом этапе эволюции, остальные особи погибают. На последнем этапе эволюционного процесса применяются генетические операторы к выжившим особям для генерации нового поколения.

Апробация описанного метода проводилась на статистике второго сеанса набора данных эксперимента E391. В результате оптимизации порогов чувствительность установки увеличилась на 42 %, а вклад фоновых событий уменьшился на 29 %, что обеспечило увеличение отношения  $S/N$  в два раза.

На основании полученных результатов была предложена схема повторного анализа данных, которая представляет собой интеграцию разработанных методов (рисунок 2).

Обработка данных состоит из трех главных этапов:

1) Для статистики второго сеанса набора данных применяются кинематические обрезания, которые были получены ранее [3]. После чего с помощью генетических алгоритмов производится оптимизация порогов для вето-детекторов. Итогом первого этапа является новый набор обрезаний для фотонного вето.

2) Полученный набор обрезаний для вето-детекторов применяется для статистики второго сеанса. После чего оставшиеся данные обрабатываются нейронной сетью для получения информации об углах  $\gamma$ -квантов. Используя значения восстановленных углов, вычисляется  $z$ -вершина распавшейся частицы и ее масса. Эти переменные используются в следующем этапе анализа данных.

3) Производится оптимизация порогов для кинематических величин. В результате имеем новый набор обрезаний как для кинематики распада, так и для фотонного вето. После применения полученных значений порогов вычисляется чувствительность эксперимента и производится оценка вклада фоновых событий.

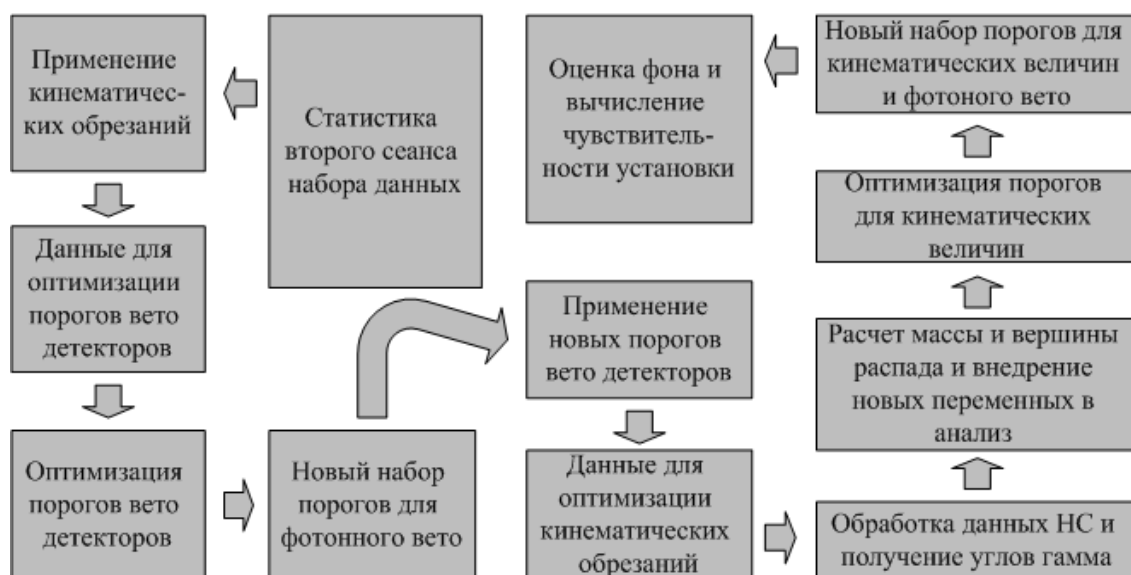


Рисунок 2 – Схема повторного анализа данных эксперимента E391

В настоящей работе предложена схема повторного анализа данных эксперимента E391, которая позволит получить значительный прирост чувствительности установки. Предложенная методика обработки требует значительных вычислительных ресурсов, поэтому анализ экспериментальных данных планируется завершить в 2012 г.

### Литература

1. Proposal of an experiment at the KEK 12 GeV Proton Synchrotron - Measurement of the  $K_L^0 \rightarrow \pi^0 \nu \bar{\nu}$  / T. Inagaki [et al.]. – Tsukuba (Japan), 1996. – 113p. – (Preprint / KEK; № 960181).
2. Buras, A. CP Violation and Rare Decays of K and B Mesons / A. Buras // arXiv e-Print archive [Electronic resource]. – 1999. – Mode of access: <http://arxiv.org/pdf/hep-ph/9905437>. – Date of access: 02.02.2010.
3. Experimental study of the decay  $K_L^0 \rightarrow \pi^0 \nu \bar{\nu}$ . The E391a Collaboration: J. K. Ahn [et al.] // [Electronic resource]. – Mode of access: <http://arxiv.org/abs/0911.4789v2>. – Date of access: 02.02.2010.
4. Podolsky, S.V. Method for Reconstruction of Direction of Gamma Quanta Registered by CsI Calorimeter in E391 Experiment / S.V. Podolsky, A.S. Kurilin, Yu.Yu. Stepanenko // Physics of Particles and Nuclei Letters. – 2011. – Vol. 8, № 1. – P. 46–49.
5. Stepanenko Yu. Master thesis 2009 // Gomel State University, 2009.
6. Podolsky S. Cuts optimization with Gene Algorithms. – Mode of access: <http://kds.kek.jp/categoryDisplay.py?categId=192>. – Date of access: 03.03.2010.

Г.Ю. Тюменков, Е.А. Дей

УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Беларусь

## ЧИСЛЕННОЕ И ГРАФИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК РАСПАДОВ ПСЕВДОСКАЛЯРНЫХ МЕЗОНОВ

Актуальным направлением в теории элементарных частиц по-прежнему остается всестороннее исследование процессов радиационных и лептонных распадов мезонов как связанных систем, состоящих из кварка и антикварка. Двухфотонный распад псевдоскалярного кваркония рассматривался на основе нерелятивистской модели с запирающим потенциалом произвольной степени [1] на основе спиновой симметрии тяжелых кварков [2] в рамках формализма Бете-Солпитера [3].

Совместное рассмотрение тяжелых кваркониев и легких мезонов, в частности псевдоскалярных  $\pi$ -мезонов, которые являются релятивистскими системами, требует использования ковариантных методов описания. Таким хорошо себя зарекомендовавшим методом исследования подобного рода частиц и процессов с их участием, несомненно, является ковариантный одновременный подход в квантовой теории поля [4]. Один из его наиболее последовательных вариантов, основанный на применении ковариантных двухвременных функций Грина [5], лежит в основе данной работы. Получаемые в рамках указанного подхода аналитические выражения для характеристик распадов имеют достаточно сложные параметризованные интегральные представления, как правило, требующие применения численных методов анализа с помощью современных программных пакетов [6], которые к тому же предоставляют ценную возможность графической визуализацией полученных результатов.

В данной работе в рамках ковариантного одновременного подхода проведен численный и графический анализ одномерных интегральных выражений для форм-фактора радиационного распада  $F(M, k^2)$  псевдоскалярного состояния нейтральной кварк-антикварковой системы в два  $\gamma$ -кванта, получены значения соответствующей константы распада  $f(M, m)$ , а также константы лептонного распада  $f(M, m_1, m_2)$  аналогичной заряженной составной системы. Показаны параметриче-

ские зависимости рассматриваемых величин от массы мезона и кон-  
ституентных масс кварков. Отличительной особенностью рассмотре-  
ния является использование модельной волновой функции основного  
псевдоскалярного состояния кварк-антикварковой составной системы,  
имеющей правильное асимптотическое поведение [5].

Форм-фактор радиационного распада мезона определяется стан-  
дартным выражением для амплитуды распада, которая в СЦМ равна

$$T^{\mu\nu}(M, k^2) = F(M, k^2) \varepsilon^{\mu\nu\rho 0} k_\rho M, \quad (1)$$

где  $\varepsilon^{\mu\nu\rho 0}$  – тензор Леви-Чивита,  $M$  – масса покоя мезона, а  $k_\rho$  –  
4-импульс фотона. Конституентные массы кварка и антикварка оди-  
наковы и равны  $m$ . Выражение (1) дает возможность получить инте-  
гральное представление форм-фактора с использованием двухвремен-  
ных функций Грина во втором порядке теории возмущений и выбран-  
ного вида модельной волновой функции

$$F(M, k^2) = C_1 \int_0^\infty \Phi(M, m, p, k) dp, \quad (2)$$

$$\Phi(M, m, p, k) = \frac{mp}{Mk\omega_p} \left\{ \frac{2k}{M} \ln \left| \frac{M - \omega_p - k - \sqrt{m^2 + (p+k)^2}}{M - \omega_p - k - \sqrt{m^2 + (p-k)^2}} \right| + \right. \\ \left. + \frac{(M-2k)}{M} \ln \left| \frac{\omega_p + k + \sqrt{m^2 + (p+k)^2}}{\omega_p + k + \sqrt{m^2 + (p-k)^2}} \right| \right\} (2\omega_p^2 + M^2)^{-3/2}. \quad (3)$$

Здесь  $\omega_p = (\vec{p}^2 + m^2)^{1/2}$ ,  $p$  и  $k$  – модули трёхмерных относительных  
импульсов кварков и виртуальных фотонов соответственно, константа  
 $C_1$  содержит постоянные множители, учитывающие электрический  
заряд кварков и суммирование по цветовым индексам.

На рисунке 1 представлена поверхность подынтегральной функ-  
ции форм-фактора  $\pi^0$ -мезона, указывающая на очевидную сходимость  
интеграла (2) при произвольных значениях  $k$ , что является справедли-  
вым и для других мезонов в силу общности используемого метода  
описания.

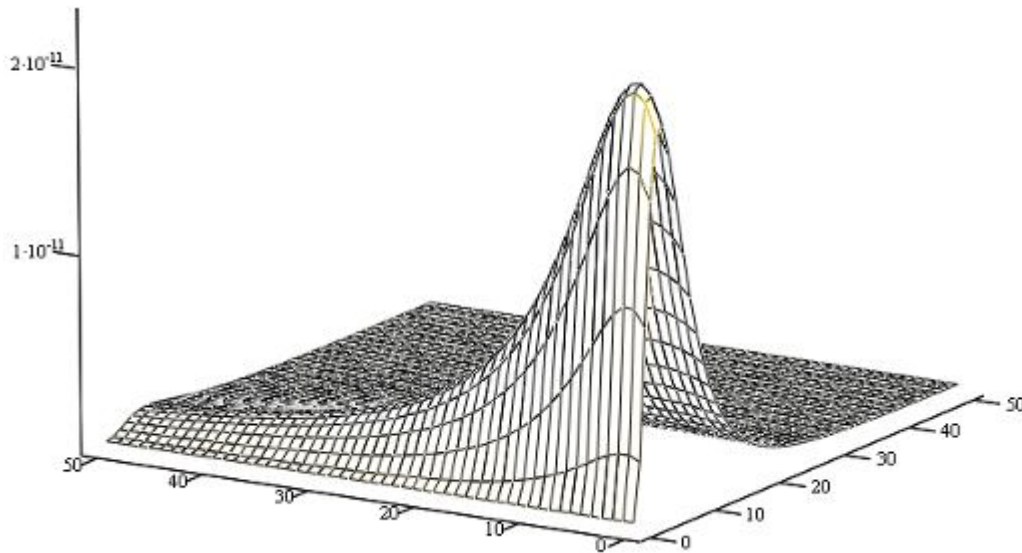


Рисунок 1 – Поверхность значений функции  $\Phi(M, m, p, k)$

Для реальных фотонов в системе центра инерции  $k = M/2$ , и при этом условии (3) переходит в выражение для константы радиационного распада  $f(M, m)$ . Это позволяет фиксировать константу  $C_1$  путем нормировки на значение  $f_\pi = 92,4$  МэВ при  $m_\pi = 134,97$  МэВ,  $m_q = (m_u + m_d)/2 = 250$  МэВ:

$$C_1 = \frac{f_\pi}{\int_0^\infty \Phi\left(M_\pi m_q, p, \frac{M_\pi}{2}\right) dp} = 1,2 \cdot 10^{10}$$

Полученный результат позволяет построить график форм-фактора распада  $\pi^0 \rightarrow \gamma^* \gamma^*$  (рисунок 2):

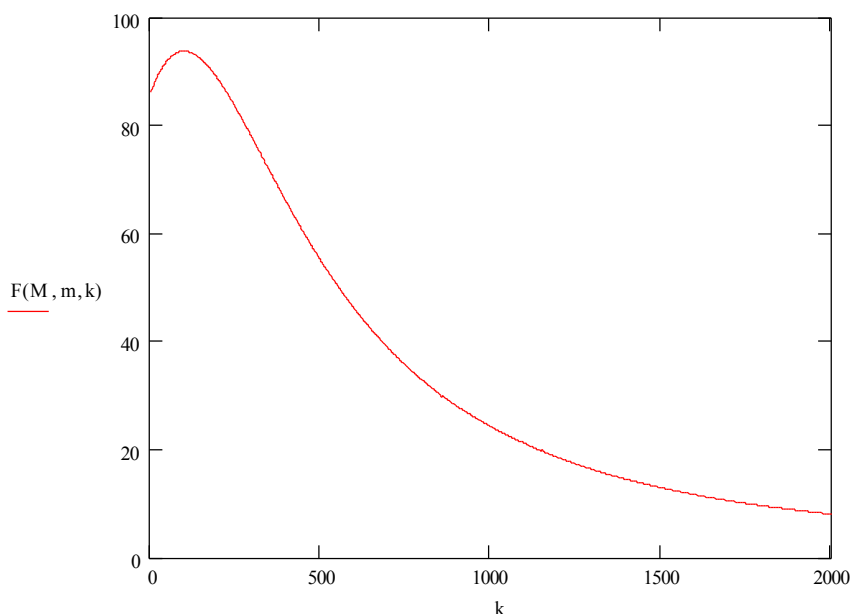


Рисунок 2 – Зависимость форм-фактора распада  $\pi^0 \rightarrow \gamma^* \gamma^*$



Используя массы с- и b-кварков, на основании (2), (3) можно получить графики форм-факторов радиационных распадов псевдоскалярных состояний ( $1S^+$ ) кваркониев  $\eta_c \rightarrow \gamma^* \gamma^*$  и  $\eta_b \rightarrow \gamma^* \gamma^*$  (рисунок 3), а также рассчитать значения соответствующих констант распадов ( $m_c = 1650$  МэВ,  $m_b = 5120$  МэВ)  $f_{\eta_c} = 6.77$  кэВ,  $f_{\eta_b} = 8.0 \cdot 10^{-3}$  кэВ.

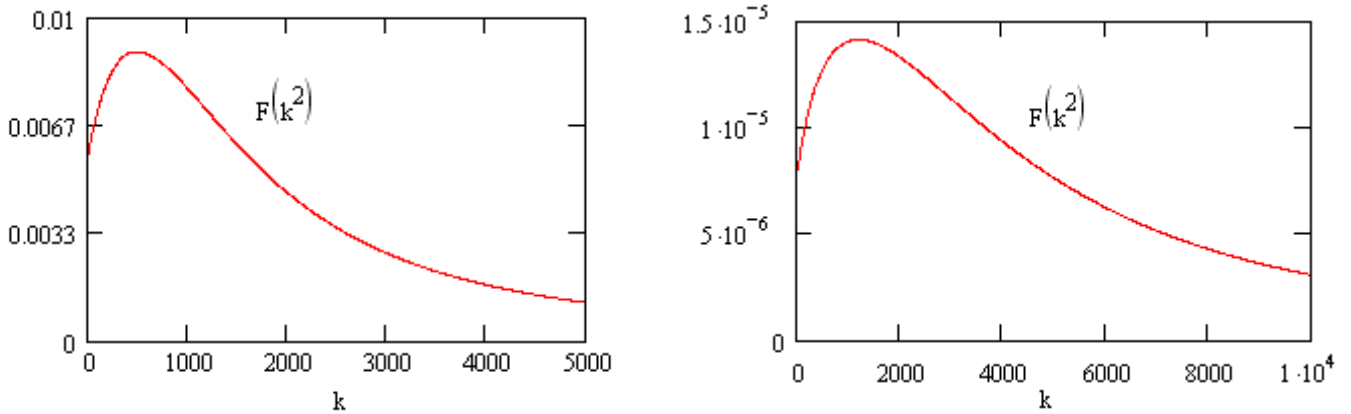


Рисунок 3 – Форм-факторы радиационного распада  $\eta_c$  и  $\eta_b$ -мезонов

Аналогичным образом в рамках ковариантного одновременного подхода квантовой теории поля можно рассмотреть константу лептонного распада псевдоскалярных мезонов  $(Q\bar{q}) \rightarrow l\bar{\nu}_l$ , которая находится из стандартного представления соответствующей амплитуды

$$T_{\lambda\sigma}(M, \vec{k}_1, \vec{k}_2) = f \frac{G}{\sqrt{2}} I_{\lambda_1\lambda_2}^\mu(\vec{k}_1, \vec{k}_2) P_\mu,$$

(4)

где  $I_{\lambda\sigma}^\mu(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$  – слабый лептонный ток,  $P_\mu$  – полный 4-импульс мезона, а  $G/\sqrt{2}$  – константа Ферми. Используя модельную волновую функцию основного состояния [2], в СЦМ для константы лептонного распада получаем выражение

$$f(M, m_1, m_2) = C_2 \int_0^\infty \left( \frac{m_1}{\omega_{p1}} + \frac{m_2}{\omega_{p2}} \right) (\omega_{p1}^2 + \omega_{p2}^2 + M^2)^{-3/2} p^2 dp, \quad (5)$$

в котором наличие  $\omega_{p1}$  и  $\omega_{p2}$  обусловлено различными массами кварка  $m_1$  и антикварка  $m_2$ . Используя в качестве нормировочного значение  $f_K = 113,4$  МэВ, характерное для  $K^-$ -мезона, можно определить вспомогательную константу  $C_2 = 2.278$  МэВ<sup>2</sup>. На этой основе в данном подходе получены значения для констант распадов псевдоскалярных мезонов  $f_D = 0.94$  МэВ,  $f_B = 0.876$  МэВ.

## Литература

1. Parmar A. a.o. // arXiv: 1001.0848v2 [hep-ph]. – 27 p.
2. Lansberg J.P., Pham T.N. // arXiv: hep-ph/0603111v2, 2006. – 4 p.
3. Blank M., Krassnigg A. // arXiv: 1011.5772v1 [hep-ph]. – 3 p.
4. Logunov, A.A. Quasioptical approach in quantum field theory / A.A. Logunov, A.N. Tavkhelidze // Nuovo Cimento. – 1963. – Vol. 29, № 2. – P. 380–399.
5. Капшай, В.Н. Лекции по теории связанных систем частиц со спином 0 и 1/2 / В.Н. Капшай, Г.Ю. Тюменков // Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины. – 2005. – 100 с.
6. Кирьянов, Д.В. Mathcad12. Наиболее полное руководство / Д.В. Кирьянов. – СПб.: БХВ – Петербург, 2005. – 566 с.

## А.Э. Шалыт-Марголин

Национальный научно-учебный центр физики частиц  
и высоких энергий БГУ, Беларусь

### ГРАВИТАЦИЯ В УЛЬТРАФИОЛЕТОВОМ И ИНФРАКРАСНОМ ПРЕДЕЛАХ, ИЗМЕНЯЮЩАЯСЯ ЭНТРОПИЯ И ЭНЕРГИЯ ГОЛОГРАФИЧЕСКОГО ЭКРАНА

За последнее время число работ, посвящённых исследованию природы гравитации, резко возросло, благодаря, в первую очередь, результатам E. Verlinde [1], демонстрирующим, что это взаимодействие имеет "энтропийное происхождение" и термодинамическую интерпретацию. Эвристический подход, предложенный в [1], позволяет довольно просто, из элементарного изменения энтропии на "голографическом экране" получить как второй закон Ньютона, так и закон гравитации, однако при этом неявно используется наличие минимальной длины.

Напомним, что минимальная (фундаментальная) длина наиболее естественно возникает в связи с Обобщённым Принципом Неопределённости (ОПН) (Generalized Uncertainty Principle (GUP)) [2]:

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{\Delta p} + l^2 \frac{\Delta p}{\hbar}, \quad (1)$$

где  $l^2 = \alpha l_p^2$  и  $\alpha$  – безразмерный числовой множитель.

Действительно, как легко видеть из (1), существует минимальная длина порядка планковской

$$l_{min} \sim l_p \quad l_{min} = 2\sqrt{\alpha} l_p.$$

(2)

Теперь, предполагая в случае справедливости **голографического принципа** [3] для некоторого трёхмерного объекта  $\Omega$ , занимающего объём  $V$ , который имеет площадь двумерной границы  $A$  (голографический экран), что вся информация о  $\Omega$  находится на  $A$  и один двузначный бит (q-bit) информации "живёт" на минимальной площадке  $a = l_{min}^2$ , получим энтропию  $\Omega$ :

$$S(\Omega) = \frac{A}{l_{min}^2}, \quad (3)$$

которая при  $\alpha = 1$  из (1), (2) соответствует формуле Бекенштейна-Хокинга для энтропии чёрной дыры в полуклассической аппроксимации [4]:

$$S^{BH} = \frac{A}{4l_p^2}. \quad (4)$$

В известной работе E. Verlinde [1] было введено число  $N$  бит информации, соответствующих  $A$  (стр. 8):

$$N = \frac{Ac^3}{G\hbar} = \frac{A}{l_p^2}.$$

(5)

Таким образом, если мы предполагаем справедливость голографического принципа (а в [1] информация считывается с голографического экрана), то в этом случае энтропия также имеет вид:

$$S = \frac{1}{4} N. \quad (6)$$

Отметим, что именно для случая голографического экрана с энтропией  $S$ :

$$S = \frac{A}{4l_p^2} \quad (7)$$

(в [5], формула (4)) как и в [1] был получен закон гравитации Ньютона.

Однако, как известно, существуют указания на то, что энтропия изменяется в ультрафиолетовом и инфракрасном пределах, то есть зависит от рассматриваемых энергий. Причём в настоящий момент известно как происходит это изменение. В частности, полуклассическая формула Бекенштейна-Хокинга  $S^{BH}$  (4), благодаря ОПН (GUP) (1), модифицируется и обретает квантовые поправки [6]:

$$S_{GUP}^{BH} = \frac{A}{4l_p^2} - \frac{\pi\alpha^2}{4} \ln\left(\frac{A}{4l_p^2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\frac{A}{4l_p^2}\right)^{-n} + \text{const}, \quad (8)$$

где коэффициенты  $c_n \propto \alpha^{2(n+1)}$  могут быть вычислены с любой степенью точности [6].

Совершенно понятно, что (4) является частным случаем (8) в пре-

дельном переходе к более низким энергиям. Выбирая последний член в (8)  $\text{const} = 0$  и, предполагая, что чёрная дыра является сферически-симметрической с радиусом  $r$ , то есть  $A = 4\pi r^2$ , немедленно получаем, что правая часть (8) зависит только от одного безразмерного параметра  $r^2/l_p^2$ :

$$S_{GUP}^{BH} = \frac{\pi r^2}{l_p^2} - \frac{\pi \alpha^2}{4} \ln \left( \frac{\pi r^2}{l_p^2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left( \frac{\pi r^2}{l_p^2} \right)^{-n}. \quad (9)$$

В недавних работах [7] было введено понятие “кванта площади” в качестве минимальной площади, на которой можно разместить минимальный (q-bit) объём информации. Однако, как было продемонстрировано выше, если вводить такую величину, то она не может быть универсальной, а должна зависеть от энергий, в которых мы в настоящий момент находимся. Введём в данных обозначениях “квант площади”  $l_q^2$  как

$$l_q^2 = \frac{A}{S_{GUP}^{BH}}. \quad (10)$$

Ясно, что в предельном переходе к низким энергиям,  $l_q^2 \rightarrow 4l_p^2$ , так как  $S_{GUP}^{BH} \rightarrow S^{BH}$ .

Таким образом, можно выделить два понятия длины:

**Минимальная, или фундаментальная длина**  $l_{min}$  – это фиксированная длина порядка планковской  $l_p$ , определяемая ОПН и формулой (2).

“**Минимальная информационная длина**”, определяемая согласно (10) как:

$$l_q = \sqrt{\frac{A}{S_{GUP}^{BH}}}, \quad (11)$$

$l_q$  – динамическая величина, зависящая от энергий.

**Минимальная длина** естественным образом возникает в ультрафиолетовом пределе гравитации – гипотетической квантовой гравитации [8], и поэтому ОПН в настоящее время рассматривается как естественное обобщение Принципа Неопределённости Гейзенберга (ПНГ) на высокие (планковские) энергии. То, что ПНГ на планковских масштабах должно заменяться ОПН сейчас у подавляющего большинства исследователей сомнения не вызывает. Однако многие исследователи склоняются к мысли, что может существовать также и инфракрасная модификация гравитации (например [9]). Для этого случая уместно рассмотреть более общий принцип неопределённости – Симметризованный Обобщённый Принцип Неопределённости (СОПН) (Symmetrized Generalized Uncertainty Principle (SGUP)) [10], учитывающий наличие как ультрафиолетового, так и инфракрасного

пределов энергий:

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar \left( 1 + \frac{(\Delta x)^2}{L^2} + \ell^2 \frac{(\Delta p)^2}{\hbar^2} \right), \quad (12)$$

который приводит к минимальной длине  $\Delta x_{\min} = 2\ell/\sqrt{1-4\ell^2/L^2}$  и минимальному импульсу  $\Delta p_{\min} = 2\hbar/(L\sqrt{1-4\ell^2/L^2})$ , где  $L$  – константа размерности длины, определяющая инфракрасную границу.

При этом энтропия чёрной дыры  $S^{BH}$  (4) также изменяется соответственно на  $S_{SGUP}^{BH} = S_{SGUP}^{BH}(\ell, L)$ , так что

$$\lim_{\ell \rightarrow 0, L \rightarrow \infty} S_{SGUP}^{BH} \rightarrow S^{BH}, \quad \lim_{L \rightarrow \infty} S_{SGUP}^{BH} \rightarrow S_{GUP}^{BH}, \quad (13)$$

а также минимальная “Минимальная информационная длина” (11) на  $\tilde{l}_q$ :

$$\tilde{l}_q = \sqrt{\frac{\Lambda}{S_{SGUP}^{BH}}}. \quad (14)$$

В [5] было показано, что распределение энергии  $E$  на голографическом экране  $\Lambda$  подчиняется соотношению, которое называется “законом равномерного распределения по битам”

$$E = \frac{1}{2} N k_B T, \quad (15)$$

где  $N$  – число битов на экране (5),  $k_B$  – постоянная Больцмана,  $T$  – температура экрана. Однако известно, что для низких температур, близких к абсолютному нулю, (15) перестаёт быть верной. В частности, в [11] при низких температурах (то есть при низких энергиях и малых импульсах) был предложен эвристический подход, определяющий изменение при низких температурах  $E$  (15), основанный на модели Дебая в физике твёрдого тела:

$$E = \frac{1}{2} N k_B T \mathcal{D}(x), \quad (16)$$

где  $\mathcal{D}(x)$  – функция Дебая [12].

На наш взгляд, такой подход является спекулятивным, потому что физика твёрдого тела не имеет прямых аналогий в гравитации. В [10]  $N$  рассматривается в качестве постоянной величины, однако из формулы (6) всего предыдущего рассмотрения следует, что энтропия  $S$  и, следовательно,  $N$  зависят от энергии, а значит и от температуры  $T$ . Поэтому “законом равномерного распределения по битам” [5] не нарушается, а только изменяется его содержание – число битов, зависящее от энергии:

$$E = \frac{1}{2} N(T) k_B T .$$

(17)

### Литература

1. Verlinde, E. On the Origin of Gravity and Laws of Newton / E. Verlinde // JHEP. – 2011. – Vol. 1104. – C. 029.
2. Veneziano, G. A stringly nature needs just two constant / G. Veneziano // Europhys. Lett. – 1986. – Vol. 2. – C. 199.
3. Hooft, G.'T, Dimensional reduction in quantum gravity / G.'T, Hooft // gr-qc/9310026. – 15 с.
4. Bekenstein, J.D. Black Holes and Entropy/J.D. Bekenstein // Phys. Rev. D. –1973. – Т. 7. – C. 2333; Hawking, S. Black Holes and Thermodynamics / S. Hawking // Phys.Rev.D. – 1976. – Vol. 13. – C.191–204.
5. Padmanabhan, T. Equipartition of energy in the horizon degrees of freedom and the emergence of gravity / T. Padmanabhan // Mod.Phys. Lett. A. – 2010. – Vol. 25. – C. 1129.
6. Medved, A.J.M. When conceptual worlds collide: The GUP and the BH entropy / A.J.M. Medved ; E.C. Vagenas // Phys. Rev. D. – 2004. – Vol. 70. – C. 124021.
7. Klinkhamer, F.R. Newton's gravitational coupling constant from a quantum of area / F.R. Klinkhamer//arXiv:1101.5370. – 10 с.
8. Garay, L. Quantum gravity and minimum length / L. Garay // Int. J. Mod. Phys. A. – 1995. – Vol. 10. – C. 145.
9. Rubakov, V. A. Infrared-modified gravities and massive gravitons / V.A.Rubakov, P.G. Tinyakov // Phys.Usp . – 2008. – Vol. 51. – C. 759.
10. Kim, Wontae. Thermodynamics of a black hole based on a generalized uncertainty Principle/ Wontae Kim, Edwin J Son, Myungseok Yoon, //JHEP. – 2008. – Vol. 08. – C. 035.
11. Gao, C. Modified Entropic Force/ C. Gao // Phys.Rev.D. – 2010. – Vol. 81. – C. 087306.
12. Ландау, Л.Д. Статистическая физика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1964. – 412 с.

**Секция 4 «Новые материалы и технологии»**  
(физика лазеров и лазерные технологии,  
ионно-лучевые и плазменные технологии,  
формирование структуры и свойства покрытий)

Председатель:  
Рогачев Александр Владимирович, профессор

**Р.М. Бурбело, Н.В. Исаев, А.Г. Кузьмич**

**Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Украина**

**ОСОБЕННОСТИ ФОТОТЕРМОАКУСТИЧЕСКОГО  
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В НЕОДНОРОДНЫХ  
ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ СТРУКТУРАХ:  
ИМПУЛЬСНЫЙ РЕЖИМ ОБЛУЧЕНИЯ**

Развитие современного материаловедения требует разработки методов контроля и диагностики новых материалов. Привлекательными являются методы неразрушающего контроля, в основе которых лежит фотоакустический (ФА) эффект, что дает возможность бесконтактного исследования различных свойств материалов.

ФА эффект это процесс возникновения упругих полей в материалах при облучении его нестационарным световым излучением. Одним из основных механизмов ФА эффекта является фототермическое (ФТ) преобразование. В результате облучения среды в последней возникает нестационарное тепловое возмущение (за счет безизлучательной релаксации электронной подсистемы), это возмущение вызывает упругие напряжения (за счет явления термоупругости).

В качестве классического источника возбуждения ФА сигнала используют непрерывный источник электромагнитного излучения с модулированной по гармоническому закону интенсивностью. В этом случае в материале будет возникать тепловая волна, которая будет затухать на глубине тепловой диффузии [1]  $\mu_{th} \sim \sqrt{\omega/\chi}$  ( $\omega$  – частота модуляции света,  $\chi$  – коэффициент температуропроводности материала). Изменяя частоту модуляции света можно изменять глубину тепловой диффузии, которая определяет разрешающую способность ФА метода. Исследование слоистых полупроводниковых структур с модифициро-

ванным поверхностным слоем (область модификации  $\sim 1$  мкм) представляет собой достаточно сложную задачу, поскольку необходимо использовать высокие частоты модуляции света  $\omega > 30$  МГц, что связано с техническими трудностями.

В связи с этим, для исследования полупроводниковых структур актуальным является использование импульсного лазерного излучения (длительность импульса  $\sim 10$  нс) [2]. В этом случае за время длительности импульса тепло (которое формирует упругие поля) распространяется на расстояния сравнимые с областью модификации при поверхностного слоя структуры [3].

Фототермоакустическое преобразование в сильно поглощающих средах имеет ряд характерных особенностей.

Рассмотрим процесс формирования ФА сигнала в сильно поглощающих средах. Будем считать, что световое пятно имеет размеры (например, радиус фокусировки пятна), значительно превышающие характерную глубину проникновения света ( $\sim \beta^{-1}$ ). Тогда можно пренебречь радиальным оттоком тепла и соответственно уравнение теплопроводности рассматривать в одномерном случае:

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \chi(z) \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} \right) + \frac{I_0 (1-R) \beta e^{-\beta z}}{c \rho} g(t). \quad (4)$$

Исследуем двухслойную структуру толщиной  $d$ , причем толщина верхнего слоя равна  $l$ . Теплопроводности верхнего и нижнего слоя соответственно  $\chi_1$  и  $\chi_2$ . Примером такой структуры может быть полупроводник с легированным слоем.

Будем считать, что отток тепла с верхней границы пренебрежимо мал и тепло не успевает дойти к нижней поверхности. То есть граничные условия к уравнению (4) будут иметь следующий вид:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0+} = 0, \quad \left. T \right|_{z=d} = 0. \quad (5)$$

Для решения уравнения (4) с граничными условиями (5) воспользовались методом сеток. На рисунке 1а представлены графики зависимости температуры на поверхности образца в двухслойной структуре при разных значениях коэффициента теплопроводности верхнего слоя, коэффициент теплопроводности нижнего слоя фиксированный ( $\chi = 0.94$  см<sup>2</sup>/с). Из рисунка 1а следует, что при увеличении коэффициента теплопроводности область локализации тепловой энергии уменьшается, и температура на поверхности увеличивается.



Рассмотрим смещения поверхности образца при его облучении коротким лазерным импульсом. Для этой цели рассмотрим уравнение термоупругости:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \varepsilon \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (6)$$

где  $v$  – скорость звука в среде,  $\varepsilon = \alpha_T (2\lambda + 3\mu)/\rho$ ,  $\lambda$  и  $\mu$  – параметры Ламме,  $\alpha_T$  – коэффициент теплового расширения решетки.

Представим граничные условия для уравнения (6) в виде  $(\partial u / \partial z)|_{z=0} = 0$  и  $u|_{z=d} = 0$ .

Откуда

$$u(z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(t) \cos(a_m z), \quad a_m = (\pi/2 + \pi m)/d \quad (7)$$

После подстановки (7) в уравнение (6), при нулевых начальных условиях (отсутствие в начальный момент смещений и напряжений), смещения в образце можно представить в следующем виде:

$$u(z, t) = \frac{\varepsilon}{v} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{nm} \frac{a_n}{a_m} \int_0^t \sin(va_m(s-t)) \cdot b_n(s) ds \times \cos(a_m z), \quad (8)$$

где

$$c_{nm} = \begin{cases} \frac{2}{(m+n+1)\pi}, & \text{при } m+n=2p, \quad p \in Z \\ \frac{2}{(n-m)\pi}, & \text{при } m+n=2p+1, \quad p \in Z \end{cases}$$

$$b_n(t) = \int_0^d T(z, t) \cdot \cos(a_n z) dz.$$

Соответственно смещения поверхности:

$$u(0, t) = \frac{\varepsilon}{v} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{nm} \frac{a_n}{a_m} \int_0^t \sin(va_m(s-t)) \cdot b_n(s) ds. \quad (9)$$

Анализ выражения (9) показывает, что функция смещения поверхности от времени представлена суммой сверток функций:  $b_n(t)$  – представляющей тепловой вклад в ФА сигнал (при заданной форме возбуждающего импульса и при фиксированном коэффициенте поглощения света); и  $\sin(va_m t)$  – представляющей акустический вклад в ФА сигнал.

Поскольку в данной работе мы рассматриваем случай, когда область модификации структуры намного меньше длины генерируемой звуковой волны, то акустическая часть представлена однородными функциями (то есть выражение (8) описывает бегущую волну, которая переотражается в системе «передняя-задняя» граница). С другой

стороны  $b_n(t)$  учитывается неоднородность тепловых параметров в поверхностном слое исследуемой структуры.

На рисунке 1b представлены графики временных зависимостей смещений поверхности неоднородных модельных двухслойных полупроводниковых структур при их импульсном лазерном облучении. Из рисунка 1b видно, что при увеличении теплопроводности верхнего слоя амплитуда фотоакустического сигнала уменьшается. Таким образом, можно сделать вывод, что тепловые параметры поверхностного слоя в случае сильного поглощения возбуждающего излучения существенно влияют на параметры ФА сигнала.

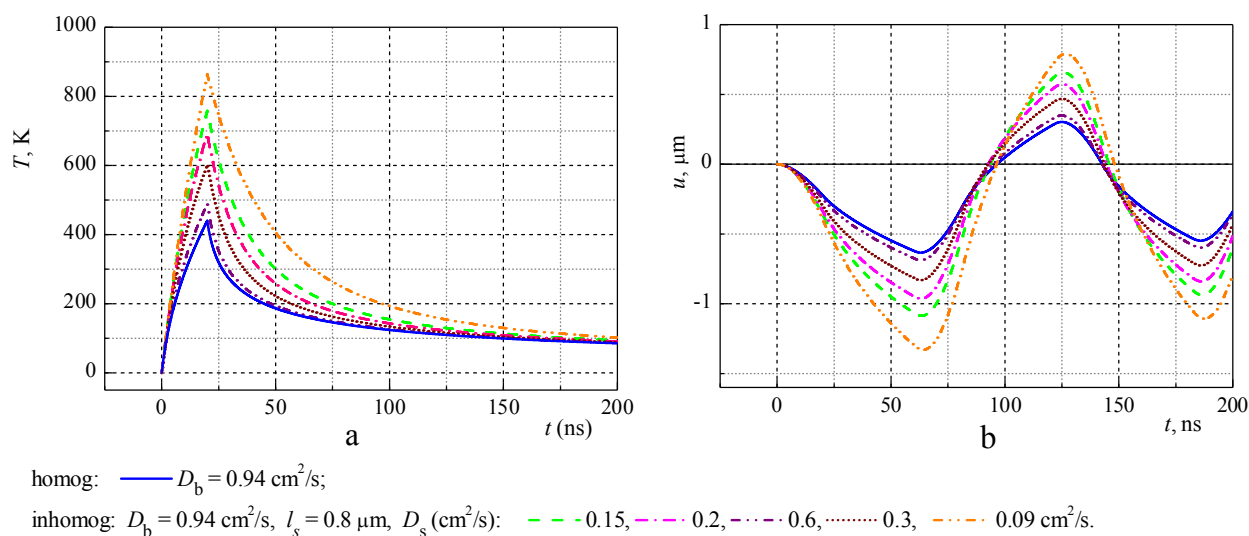


Рисунок 1 – Зависимость температуры (a) и смещения (b) на поверхности образца от времени для модельных двухслойных образцов с различными значениями коэффициента тепловой диффузии верхнего слоя

В работе выполнен анализ процесса фотоакустического преобразования в модельных двухслойных структурах при их импульсном лазерном облучении. Установлена корреляция между тепловыми параметрами поверхностного слоя исследуемого образца и параметрами фотоакустического сигнала.

### Литература

1. Rosencwaig, A. Theory of the photoacoustic effect with solids / A. Rosencwaig, A. Gersho // J. Appl. Phys. – 1976. – Vol. 47. – № 1. – P. 64–69.
2. Podymova, N. Laser optoacoustic non-destructive method of thickness measurement of subsurface damaged layer in machined silicon wafers / N. Podymova, A. Karabutov // Journal of Physics: Conference Series. – 2010. – Vol. 214.

З. Бурбело, Р.М. Формирование температурных полей в легированных структурах на основе Si при лазерном облучении: импульсный режим / Р.М. Бурбело, Н.В. Исаев, А.Г. Кузьмич // Украинский физический журнал. – 2010. – Т. 55. – № 3. – С. 318–322.

**В.Е. Гайшун<sup>1</sup>, Я.А. Косенок<sup>1</sup>, О.И. Тюленкова<sup>1</sup>, В.В. Туров<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>УО «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», Беларусь

<sup>2</sup>Институт химии поверхности имени А.А. Чуйко Национальной академии наук Украины, Украина

### **РЕОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВОДНЫХ ДИСПЕРСНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ АБРАЗИВНОГО НАНОРАЗМЕРНОГО ПОРОШКА ДИОКСИДА КРЕМНИЯ МАРКИ ОХ-50**

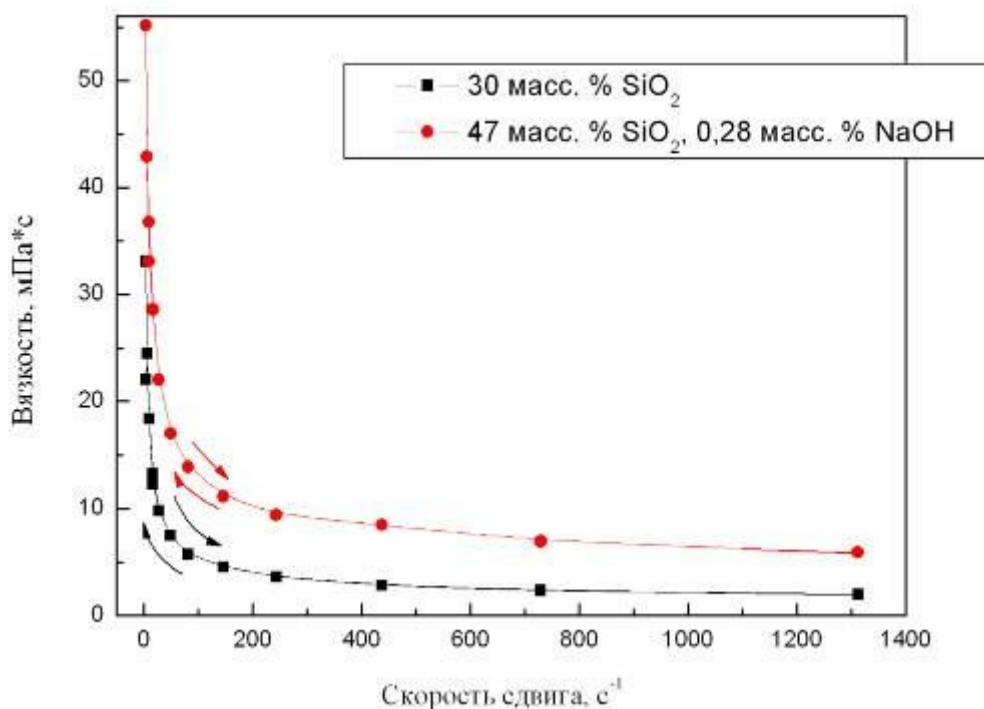
Получение и исследование свойств высококонцентрированных суспензий на основе пирогенного диоксида кремния, которые могут найти применение в качестве полирующих агентов пластин монокристаллического кремния, вызвано необходимостью с точки зрения экономической выгоды при продаже и транспортировке. При этом никаких заметных изменений в свойствах суспензий не должно происходить, по крайней мере, в течение года при обычных условиях хранения.

Одним из свойств, имеющих большое практическое значение для коагуляционных структур, которые подвергаются разрушению неограниченное число раз, является тиксотропия. Причем каждый раз свойства дисперсных систем должны восстанавливаться. Примерами типичных тиксотропных структур могут служить системы, образующиеся при коагуляции водных коллоидных дисперсий гидроокиси железа, гидроокиси алюминия, суспензии бетонита или каолина [1]. Тиксотропия является очень важной характеристикой лакокрасочных материалов, фармацевтической продукции и других продуктов промышленного производства [2].

Цель работы заключалась в изучении реологического поведения высококонцентрированных водных дисперсий аэросила ОХ-50 (Degussa, Германия) с удельной поверхностью  $S_{БЭТ}=50 \text{ м}^2/\text{г}$ . Для исследований были приготовлены стабилизированные водные дисперсии на основе аэросила ОХ-50 с концентрацией твердой фазы 30 масс. % и 47 масс. %. Методика приготовления концентрированных

водных дисперсий диоксида кремния включает три стадии: смешение исходных компонент, ультразвуковое диспергирование и очистку полученной смеси от технологических примесей и gritта. Реологические характеристики дисперсий аэросила ОХ-50 изучали методом ротационной вискозиметрии с помощью вискозиметра «REOTEST 2.1» при использовании цилиндрической системы в диапазоне скоростей сдвига от 3 до 1312 с<sup>-1</sup>. Измерения проводили при 20 °С.

Первичные частицы аэросила ОХ-50 ( $d \approx 40$  нм) образуют достаточно стабильные агрегаты (100–500 нм). Агрегаты первичных частиц, в свою очередь, образуют рыхлые агломераты (1 мкм), последние формируют хлопья (флокулы, 0,1–1 мм и более). Сдвиговые напряжения вызывают разрушение нерегулярных агломератов и хлопьев изначально агрегированных частиц аэросила, что способствует увеличению скорости течения материала. Эффект снижения вязкости для суспензий является обратимым, т. е. суспензия восстанавливает начальную вязкость при снижении скорости сдвига или в состоянии покоя: агрегаты восстанавливаются благодаря броуновскому движению. Следовательно, суспензии на основе абразивного наноразмерного порошка диоксида кремния марки ОХ-50 обладают тиксотропией



(рисунок 1).

Рисунок 1 – Зависимость вязкости от скорости сдвига для дисперсий аэросила ОХ-50 с различной концентрацией твердой фазы

Однако такие высококонцентрированные суспензии остаются стабильными (не гелируют, не выпадают в осадок) не более двух недель. Для повышения седиментационной и агрегативной устойчивости в суспензию вводят специальные стабилизирующие добавки и поверхностно-активные вещества (ПАВ). Установлено, что содержание диоксида кремния в абразивной суспензии с добавлением ПАВ больше (рисунок 2). Механизм стабилизирующего действия ПАВ заключается в том, что они адсорбируются на поверхности частиц кремнезёма вследствие дифильности ПАВ. Молекулы стабилизатора ориентируются на границе раздела фаз таким образом, что своей полярной частью они обращены к полярной фазе, а неполярной частью – к неполярной, образуя, таким образом, на границе раздела фаз мономолекулярный слой. Вокруг этого слоя ориентируются молекулы воды, образуя гидратную оболочку, а также при этом снижаются силы поверхностного натяжения на границе раздела фаз, что ведет к повышению агрегативной устойчивости суспензии.

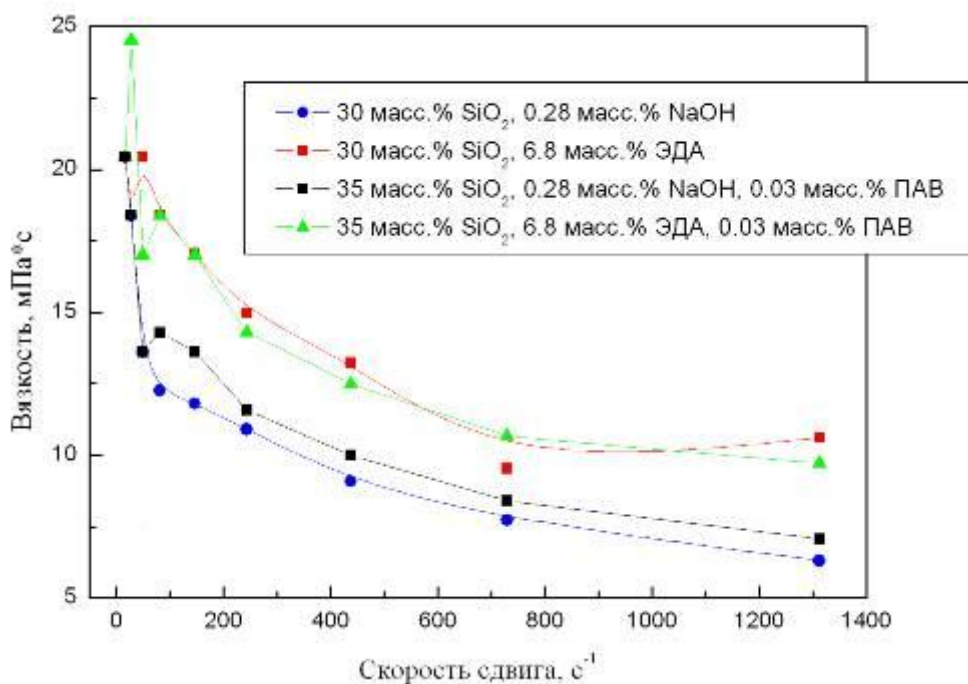


Рисунок 2 – Зависимость вязкости от скорости сдвига для дисперсий аэросила ОХ-50 при введении ПАВ

Характерной чертой многих дисперсий является не только тенденция к ориентации частиц и их взаимодействию друг с другом или с молекулами дисперсионной среды, но и то, что этот процесс протекает во времени. Взаимодействие между частицами аэросила приводит к возникновению водородных связей между ними и образованию в системе трехмерной сетчатой структуры (гель). По сравнению с си-

лами, действующими внутри частиц, эти водородные связи относительно слабы, они довольно легко разрываются, когда дисперсия подвергается сдвигу в течение длительного времени. Под воздействием постоянной скорости сдвига сетка разрушается, и вязкость асимптотически снижается, достигая при данной скорости сдвига самого низкого уровня. Такой минимальный уровень вязкости соответствует дисперсии в состоянии «золя». Тиксотропная жидкость имеет возможность восстанавливать свою структуру всякий раз, когда она остаётся в покое в течение определенного периода времени. Для высококонцентрированных суспензий на основе аэросилов характерна быстрая скорость восстановления (мгновенная тиксотропия), что имеет большое значение для проведения технологических процессов.

### **Литература**

1. Влодавец, И.Н. Тиксотропия / И.Н. Влодавец // Физическая энциклопедия: в 5 т. – М.: Советская энциклопедия, 1988. – Т. 5. – С. 92.
2. Шрамм, Г. Основы практической реологии и реометрии / Г. Шрам. – М.: Колос, 2003. – 312 с.

**Д.Л. Горбачев, А.В. Рогачев, М.А. Ярмоленко, А.А. Рогачев**

**УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Беларусь**

## **СПОСОБЫ УПРАВЛЕНИЯ МОЛЕКУЛЯРНОЙ СТРУКТУРОЙ ПОЛИМЕРНЫХ ПОКРЫТИЙ, СФОРМИРОВАННЫХ ИЗ АКТИВНОЙ ГАЗОВОЙ ФАЗЫ**

В настоящее время в области вакуумно-плазменных технологий наиболее актуальной и первоочередной является задача формирования покрытий с заданными структурой, морфологией и свойствами. К сожалению, в подавляющем большинстве случаев решение отдельных конкретных задач в области вакуумного осаждения покрытий осуществляется только эмпирическим путем. Это связано, как правило, с отсутствием четких теоретических представлений о механизмах и процессах, реализуемых при генерации газовой фазы, осаждении и др. По этой причине содержание плазмохимического синтеза не имеет столь глубокого смысла, как в случае классического химического син-

теза. Подтверждение сказанному является низкая востребованность вакуумно-плазменных технологий для решения практических задач в области микро- и нанотехнологий. В данных областях вакуумно-плазменные методы практически не используются как средство достижения результата посредством реализации направленных и контролируемых плазмохимических процессов.

Целью представленной работы является обобщение теоретических представлений в области электронно-лучевого формирования полимерных материалов и установление путей направленного регулирования структурой и свойствами осаждаемых слоев.

### **1. Методики исследования**

Покрyтия осаждали из активной газовой фазы, генерируемой в процессе воздействия на однородный порошок или механическую смесь порошков потока электронов с энергией 800–1600 эВ и плотностью 0,01–0,03 А/см<sup>2</sup>. Толщину покрyтий в процессе нанесения контролировали с помощью кварцевого измерителя толщины (КИТ). Для всех исследуемых слоев характерно одно значение эффективной толщины. Расстояние от электронной пушки до мишени составляло 150 мм, а от мишени до подложки – 120 мм. Процесс осаждения покрyтий производился при начальном давлении остаточных газов в вакуумной камере  $\approx 4 \cdot 10^{-3}$  Па.

В качестве материала диспергируемой мишени использовали порошок основания эмеральдина (ПАНИ,  $M_w=5000$ ; Polyaniline, emeraldine base (Aldrich)), поливинилхлорид (ПВХ, ГОСТ 14039-78), гидрохлорид полигексаметиленгуанидина (ГХ ПГМГ, синтез в ИХНМ НАН Б), хлористый алюминий (ХЧ).

Подложками при осаждении покрyтий служили кварцевые пластины (при проведении спектроскопических измерений в видимой области), пленки металлизированного лавсана (при регистрации ИК-спектров), титановые пластины при проведении исследований на вымывание.

Для определения кинетических характеристик вымывания ГХ ПГМГ проводили отмывку образцов (титановые пластины 50x50 мм с комплексными покрyтиями) в 50 мл бидистиллированной воды. Концентрацию ГХ ПГМГ определяли фотоколориметрически.

Спектроскопические исследования проводили с помощью УФ-Вид спектрофотометра Cary-50 (Varian) и ИК-Фурье спектрофотометра Vertex-70 (Bruker) с использованием стандартной МНПВО приставки. В качестве отражающей призмы применяли кристалл KRS-5 (угол при основании – 45°).

## 2. Результаты исследования

В настоящее время интенсивно развивается технология создания полиэлектролитных микрокапсул, получаемых методом последовательной адсорбции [1]. Были сформулированы основные принципы формирования подобных полиэлектролитных и нанокompозитных систем. В работе [2] нами рассмотрена возможность реализации принципа молекулярной сборки на примере двухслойных покрытий сульфаминовая кислота – дифениламин. Дифениламин легко переводится в газовую фазу как термически, так и под действием электронного луча, однако не формирует слоя. На основании собственных наблюдений, результатов исследования особенностей плазмохимической полимеризации анилина [3], было высказано предположение о возможности появления положительного заряда у молекулы дифениламина в процессе электронно-лучевого воздействия. Показано, что в процессе электронно-лучевого диспергирования порошка дифениламина, низкомолекулярное соединение формирует покрытие только на подложке, имеющей отрицательный заряд, и не осаждается на положительно заряженной подложке. Введение дифениламина в композиционный слой возможно при условии наличия отрицательного заряда у второй компоненты. Полученные результаты позволили сформулировать проблему и решить ее путем использования в качестве второй компоненты сульфаминовой кислоты, электронно-лучевое воздействие на которую в вакууме сопровождается перераспределением заряда и появлением отрицательно заряженных областей.

Прогнозирование свойств композиционных покрытий невозможно без учета межмолекулярного взаимодействия между компонентами. Актуально это в связи с тем, что в большинстве случаев электронно-лучевое диспергирование мишени, состоящей из нескольких веществ, сопровождается осаждением покрытия, представляющего высокодисперсную механическую смесь исходных компонент [4]. В работе [5] исследовано влияние природы полимерной матрицы на устойчивость антибактериального эффекта композиционных слоев на основе ципрофлоксацина. В качестве второй компоненты композиционного слоя были рассмотрены полиэтилен и полиуретан. Отсутствие полярных групп в полиэтилене, в отличие от полиуретана, делает полимер инертным в отношении антибактериального химиопрепарата. Показано, что покрытия ципрофлоксацина не обладают устойчивостью к отмыванию. Антимикробный эффект в таких слоях не регистрируется уже после 2-5 циклов отмывки. Покрытие полиуретан – ципрофлоксацин сохраняет бактерицидный эффект после 20 циклов отмывки.



Устойчивость бактерицидного эффекта покрытия полиэтилен – ципрофлоксацин несколько ниже и проявляется после 10 циклов.

В представленной работе рассмотрены покрытия полиуретан – гидрохлорид полигексаметиленгуанидина с различным массовым соотношением компонент. Гуанидиновая группа способна к сильному межмолекулярному взаимодействию с полиуретановой группировкой. Концентрационные кривые, демонстрирующие кинетику вымывания ГХ ПГМГ из комплексных покрытий, представлены на рисунке 1. Следует отметить отсутствие в ИК-спектрах полос поглощения, свидетельствующих о возникновении химических связей между компонентами. Показана обратно-пропорциональная зависимость между достигнутой максимальной концентрацией и удельным содержанием полиуретана в комплексном покрытии.

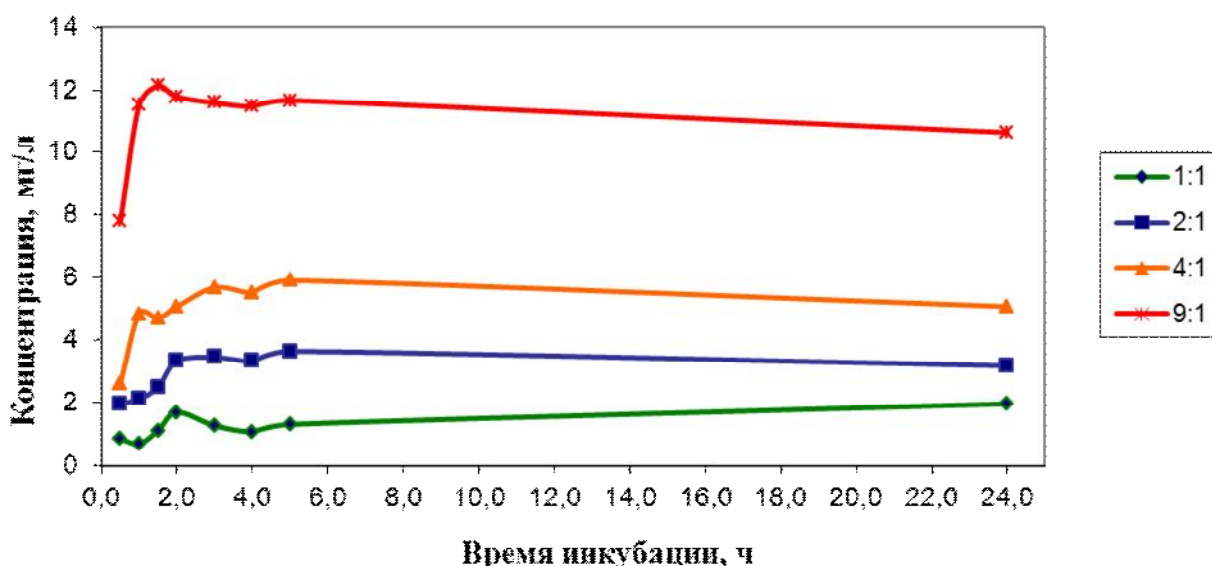


Рисунок 1 – Зависимость концентрации ГХ ПГМГ в водном растворе в процессе отмывки композиционных слоев ПУ – ГХ ПГМГ с различным массовым соотношением компонент

Помимо электростатического и межмолекулярного взаимодействия между продуктами диспергирования композиционной мишени, для формирования покрытий с заданным комплексом свойств необходимо учитывать возможность химических взаимодействий между ними иницируемых электронным лучом.

Ранее [6] было показано, что электронно-лучевое диспергирование смеси порошков основания эмеральдина и сульфаминовой кислоты, а

также основания эмеральдина и хлористого алюминия, сопровождается окислением полимера, появлением проводящих областей.

В данной работе было предложено использовать поливинилхлорид (ПВХ) в качестве источника допирующего агента для полианилина. Дегидрогалогенирование галогенсодержащего полимера в процессе электронно-лучевого воздействия должно сопровождаться образованием HCl, выступающего в дальнейшем в качестве допирующего агента в отношении полианилина. Механизм подобных взаимодействий был рассмотрен в работе [7].

Анализ ИК-спектров покрытий, сформированных с использованием основания эмеральдина, проводили по полосам поглощения  $\sim 1600$  и  $\sim 1500$   $\text{см}^{-1}$ , характерным для хиноиддииминных и фенилендиаминных фрагментов соответственно [8–10]. Отношение значений оптических плотностей данных двух пиков может указывать на степень окисления полианилина [11].

Необходимо отметить, что при формировании композиционных слоев с участием ПВХ, применимость для анализа подобного соотношения невозможна, из-за влияния ненасыщенных связей, образующихся в процессе диспергирования ПВХ. Однако совместный анализ ИК-спектров композиционных и однокомпонентных слоев на основе ПВХ показал, что в случае осаждения композиционных слоев применимость рассматриваемого соотношения вполне обоснована. В спектре композиционного слоя поглощение, связанное с присутствием фрагментов макромолекул ПВХ, пренебрежимо мало. Подобное может быть результатом существенного различия в скоростях электронно-лучевого диспергирования компонент составной мишени. Процесс осаждения покрытия при диспергировании ПВХ наблюдается только после дегидрогалогенирования мишени. За это время второй компонент (порошок основания эмеральдина) может быть полностью переведен в газовую фазу с последующим осаждением на подложке. А так как во всех случаях осаждались покрытия, для которых характерны одинаковые показания КИТ, то доля ПВХ в составе композиционного слоя невелика. Роль порошка ПВХ в случае диспергирования составной мишени в значительной мере сводится к генерированию HCl.

Для исходного порошка основания эмеральдина указанное соотношение равно 0,48. Результаты ИК-исследования покрытий представлены в таблице 1.

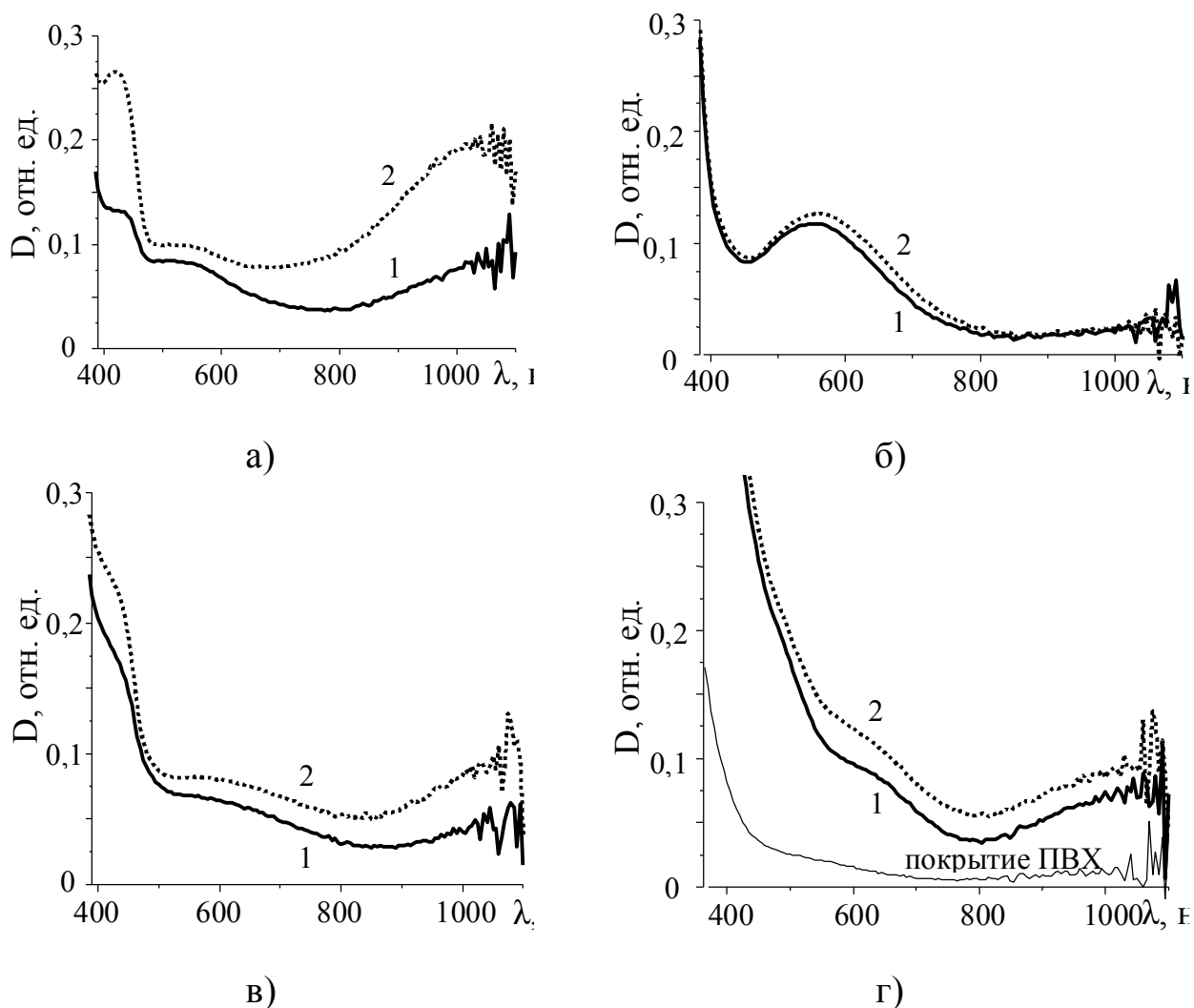
Таблица 1 – Результаты соотношения значений оптических плотностей  $D_{1596}/D_{1495}$  для покрытий на основе ПАНИ

Образец	Время выдержки после нанесения	
	сутки	2 недели
покрытие, сформированное электронно-лучевым диспергированием порошка основания эмеральдина	0,48	0,50
покрытие, сформированное электронно-лучевым диспергированием смеси порошков ПАНИ – $AlCl_3$	0,77	0,87
покрытие, сформированное электронно-лучевым диспергированием смеси порошков ПАНИ – ПВХ	0,68	0,78
покрытие, сформированное электронно-лучевым диспергированием смеси порошков ПАНИ – $AlCl_3$ – ПВХ	0,74	0,79

Добавление к порошку основания эмеральдина как хлористого алюминия, так и ПВХ сопровождается окислением фрагментов ПАНИ в процессе электронно-лучевого диспергирования композиционной мишени.

С целью всестороннего исследования покрытий на основе ПАНИ, был проведен анализ их электронных спектров поглощения. Результаты УФ-ВИД спектроскопии представлены на рисунке 2. Необходимо отметить, что только покрытие, сформированное в процессе диспергирования порошка основания эмеральдина, имело фиолетовый цвет. Все остальные рассматриваемые в работе композиционные слои имели выраженный темно-зеленый цвет.

В электронном спектре покрытия, осажденного в процессе электронно-лучевого диспергирования основания эмеральдина, присутствует единственная полоса поглощения с максимумом вблизи 560 нм, характерная для хинониминных фрагментов [12–14]. Влияние хлористого алюминия проявляется в появлении в структуре покрытия катион-радикалов (вблизи 425 нм), поляронов (вблизи 780 нм), делокализованных катион-радикалов (> 900 нм) [15]. Электронный спектр поглощения композиционного слоя на основе ПАНИ и ПВХ формируют полосы, ответственные за катион-радикалы, хинониминные фрагменты, делокализованные катион-радикалы. В сравнении с покрытием, осажденным электронно-лучевым диспергированием основания эмеральдина и хлористого алюминия, для композиционного слоя ПАНИ – ПВХ поглощение хинониминных фрагментов более выражено. Таким образом, найдено подтверждение предположению о возможности окисления фрагментов диспергирования основания эмеральдина продуктами электронно-лучевого разложения ПВХ.



1 – сутки после нанесения; 2 – две недели после нанесения.  
 а) – покрытие, сформированное электронно-лучевым диспергированием смеси порошков ПАНИ –  $AlCl_3$ ; б) – покрытие, сформированное электронно-лучевым диспергированием порошка основания эмеральдина; в) – покрытие, сформированное электронно-лучевым диспергированием смеси порошков ПАНИ –  $AlCl_3$  – ПВХ; г) – покрытие, сформированное электронно-лучевым диспергированием смеси порошков ПАНИ – ПВХ

Рисунок 2 – Результаты УФ-ВИД спектроскопии покрытий на основе ПАНИ

Следует отметить эффективность управления молекулярной структурой формируемого покрытия путем предварительного осаждения подслоев различной природы на подложку или регулирования температуры подложки. Результаты исследований подробно изложены в работе [6]. Показано, что изменения в молекулярной структуре обусловлены изменением подвижности фрагментов формирующих

покрытие. Необходимо отметить, что при условии возникновения сильного межмолекулярного взаимодействия между продуктами диспергирования, формирующими композиционный слой, изменение адсорбционной подвижности одной из компонент сказывается на структуре всего покрытия. Другими словами, если одна из компонент склонна к сильному структурированию, то это найдет свое отражение в структуре второй компоненты.

### **3. Выводы**

На примере электронно-лучевого диспергирования смеси порошков ПВХ и основания эмеральдина показано протекание процессов химического взаимодействия между продуктами диспергирования, сопровождающихся окислением фрагментов макромолекул последнего, что обусловлено интенсивными процессами дегидрогалогенирования хлорсодержащего полимера.

Учет особенностей межмолекулярного взаимодействия между компонентами композиционного слоя позволяет прогнозировать свойства осаждаемого полимерного слоя.

Сформулированы основные пути направленного регулирования структурой и свойствами осаждаемых слоев.

### **Литература**

1. Колесникова, Т.А. Нанокomпозиционные микрокапсулы, чувствительные к ультразвуку, и их взаимодействие с биологическими объектами: автореф. дис... канд. физ.-мат. наук: 03.01.02 / Т.А. Колесникова; СГУ им. Н.Г. Чернышевского. – Саратов, 2010. – 22 с.

2. Агабеков, В.Е. Влияние межмолекулярного взаимодействия на формирование конденсированных из газовой фазы органических соединений / В.Е. Агабеков, А.А. Рогачев, А.В. Рогачев, М.А. Ярмоленко // Химический журнал Армении. – 2010. – Т.63, №1. – С. 19–26.

3. Федосеева, Е.Н. Плазмохимические превращения и особенности полимеризации анилина: автореф. дис... канд. хим. наук: 02.00.04 / Е.Н. Федосеева; НИФХИ им. Л.Я. Карпова. – М., 2010. – 22 с.

4. Ярмоленко, М.А. Плазмохимическое модифицирование уплотнительных резинотехнических изделий на основе бутадиеннитрильного каучука: структура и антифрикционные свойства поверхностных слоев: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.02.01, 05.17.06 / М.А. Ярмоленко; ИММС НАНБ. – Гомель, 2006. – 21 с.

5. Yarmolenko, M.A. Biocompatible antibacterial polymer coatings with ciprofloxacin extended release / M.A. Yarmolenko, D.V. Tapal'skiĭ, A.V. Rogachev, A.A. Rogachev, A.I. Kozlova // Antibiot Khimioter. – 2007. – Vol. 52 (11–12). – P. 3–7.

6. Рогачев, А.В. Особенности формирования и молекулярная структура композиционных покрытий на основе полианилина, осажденных из активной газовой фазы / А.В. Рогачев, М.А. Ярмоленко, А.А. Рогачев, Д.Л. Горбачев // Журнал прикладной химии. – 2009. – Т. 82. – №. 9. – С. 1552–1558.

7. Guven, O. Radiation-induced conductivity control in polyaniline blends-composites / O.Guven // Radiation Physics Chemistry. – 2007. – Vol. 76. – P. 1302–1307

8. Medhat, I. Spectroscopic study of polyaniline emeraldine base: modelling approach / I. Medhat // Acta Chim. Slov. – 2005. – Vol. 52. – P. 159–163.

9. Der-Shyu, L. Absorbance behavior of polyaniline-poly (styrenesulfonic acid) complexes and tungsten oxid / L. Der-Shyu // Journal of Chinese Chemical Society. – 2004. – Vol. 51. – P. 1279–1286.

10. Docheon, A. Polyaniline nanocoating on the surface of layered  $\text{Li}[\text{Li}_{0,2}\text{Co}_{0,1}\text{Mn}_{0,7}]\text{O}_2$  nanodisks and enhanced cyclability as a cathode electrode for rechargeable lithium-ion battery / Docheon Ahn, Yang-Mo Koo, Min Gyu Kim, Namsoo Shin, et al // J. Phys. Chem C. – 2010. – Vol. 114. – P. 3675–3680.

11. Бахарев, Р.В. Низкотемпературная конверсия алканов на промотированном хлориде алюминия: автореф. дис... канд. хим. наук: 02.00.15 / Р.В. Бахарев; МГУ. – М., 2008. – 22 с.

12. Васильева, И.С. Ферментативный синтез, структура и свойства электропроводящего полианилина: автореф. дис... канд. хим. наук: 03.01.04 / И.С. Васильева; Институт биохимии им. А.Н. Баха. – М., 2010. – 22 с.

13. Стрельцов, А.В. Биокаталитический синтез электропроводящего полианилина в растворах мицелл додецилбензолсульфоната натрия с участием грибной лакказы *Trametes hirsute* и свойства полученного полимера: автореф. дис... канд. хим. наук: 03.00.04 / А.В. Стрельцов; Институт биохимии им. А.Н. Баха. – М., 2010. – 22 с.

14. Гусева, М.А. Полимеризация анилина в присутствии полимерных сульфокислот, структура и свойства образующегося полианилин: автореф. дис. ... канд. хим. наук: 02.00.06 / М.А. Гусева; МИТХТ им. М.В. Ломоносова. – Москва, 2006. – 22 с.

15. Иванов, В.Ф. Структура и свойства полианилина и интерполимерных комплексов на его основе: автореф. дис... докт. хим. наук: 02.00.04 / В.Ф.Иванов; ИФХЭ им. А.Н. Фрумкина. – М., 2007. – 52 с.

**Б.К. Даулетмуратов**

**Институт физики полупроводников имени В.Е. Лашкарева, Украина**

## МЕХАНИЗМ РАСПРОСТРАНЕНИЯ И ГЛУБИНА ОБРАЗОВАНИЯ УДАРНОЙ ВОЛНОЙ В CdTe ПРИ ЛАЗЕРНОМ ИМПУЛЬСНОМ ОБЛУЧЕНИИ

Как известно, наиболее удобным способом создания ударной волны (УВ) в конденсированной среде является воздействие на нее импульсами излучения лазера нано- и пикосекундной длительности.

Импульсное лазерное облучение кристаллов CdTe производилось наносекундными импульсами рубинового лазера и сопровождалось одновременным протеканием различных физических процессов с высокой скоростью. Наиболее важный из этих процессов – возникновение и распространение в твердом теле УВ, который является нелинейным процессом и ведет, в частности, к изменению дефектной системы полупроводника. Это, в свою очередь, ведет к изменению функциональных электрических и оптических параметров приборов на основе CdTe.

Целью данной работы было установление роли УВ в дефектообразовании в CdTe при наносекундном лазерном облучении.

УВ – поверхность разрыва, при пересечении которой давление, плотность и температура резко возрастают, а скорость рабочей среды резко уменьшается (рисунок 1).

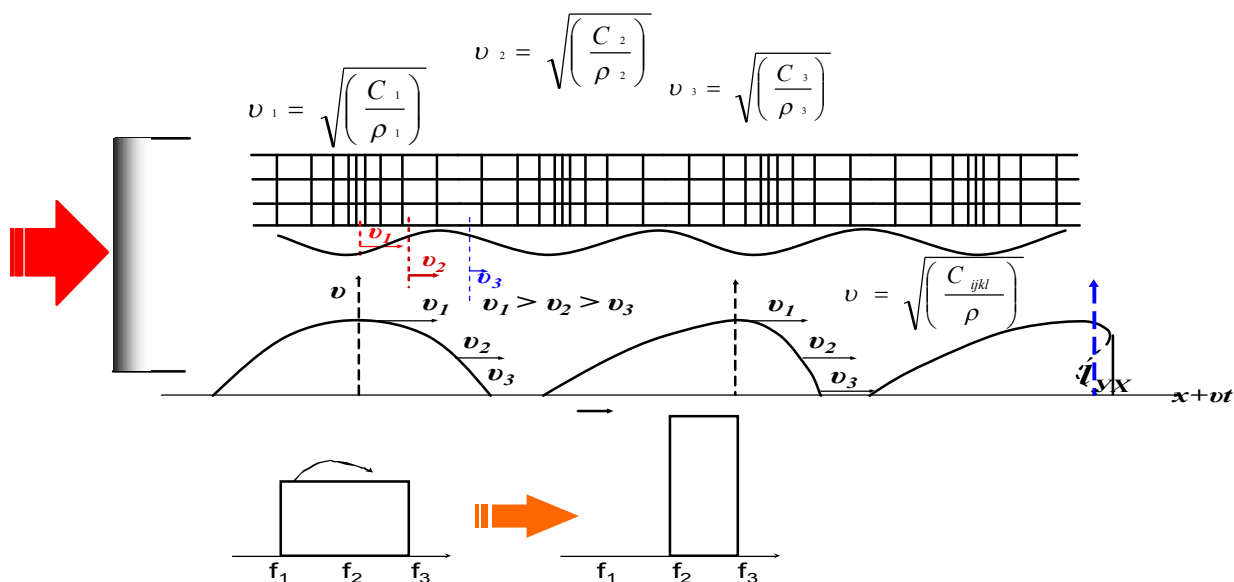


Рисунок 1 – Модель распространения ударной волны в твердом теле

На рисунок 1, где  $f$  – частота гармоники, схематично показана перекачка энергии из низкочастотных гармоник в гармоники высокой

частоты при распространении в CdTe нелинейной упругой волны, которая преобразуется в УВ.

УВ есть пример нормального гидродинамического разрыва, и через неё течёт поток вещества (в отличие от тангенциального разрыва, через который вещество не течёт). С макроскопической точки зрения УВ представляет собой воображаемую поверхность, на которой термодинамические параметры среды (которые, как правило, изменяются в пространстве непрерывно) испытывают конечные скачки. При переходе через фронт УВ меняются давление, температура, плотность вещества, энтропия среды, а также скорость её движения относительно фронта УВ. Здесь под УВ будем понимать волну с "опрокинутым" профилем (фронтом), который является движущейся в веществе поверхностью разрыва непрерывности термодинамических величин.

УВ не обладают свойством аддитивности в том смысле, что термодинамическое состояние среды, возникающее после прохождения одной УВ, нельзя получить последовательным пропусканием двух УВ меньшей интенсивности. Акустические волны представляет собой колебания плотности среды, распространяющиеся в пространстве. Уравнение состояния обычных сред таково, что в области повышенного давления скорость акустических колебаний (т. е. скорость распространения возмущений) возрастает – т. е. акустическая волна является нелинейной волной (рисунок 1). При распространении это неизбежно приводит к явлению "опрокидывания" фронта, которое и порождает УВ. В силу этого механизма, УВ в обычной среде – это всегда волна сжатия, как на (рисунок 1). Однако в тех системах, в которых скорость распространения возмущений уменьшается с ростом плотности, будет наблюдаться УВ разрежения. Для быстрого превращения колебания плотности в УВ требуются сильные начальные отклонения от равновесия. Этого можно добиться созданием акустической волны очень большой интенсивности, например при импульсном лазерном облучении.

Протяженность фронта УВ в полупроводнике порядку межатомных расстояний. Характерным отличием УВ от волны напряжений состоит в том, что передача импульса от сжатой УВ вещества до не возбужденной части имеет характер не коллективного движения атомов, а индивидуальных столкновений.

Акустический импульс в твердом теле за счет физической нелинейности является нелинейной волной. Под физической нелинейностью будем подразумевать различие модулей упругих постоянных  $C_{ijkl}$  и плотности по координате в направлении распространения волн в каждой точке импульса. Другими словами, зависимость  $C_{ijkl}$  и  $\rho$  от



деформации, нарушение закона Гука. Скорость звука в твердом теле  $v = \sqrt{C_{ijkl}/\rho}$ , соответственно, приращение скорости за счет изменения

упругости и плотности  $dv = \frac{v}{2} \left( \frac{dC_{ijkl}}{C_{ijkl}} - \frac{d\rho}{\rho} \right)$ . Поэтому более "быстрые"

компоненты (гармоники) импульса будут догонять более "медленные". Это соответствует перекачке энергии от низкочастотных гармоник к более высокочастотным – соответственно профиль импульса будет искажаться, крутизна профиля будет расти (рисунок 1). Искажение профиля звуковой волны приводит к нескольким эффектам. Во-первых, рост крутизны профиля может привести к образованию разрывов, так что по истечению времени синусоидальная волна вначале превратится в пилообразную волну. Кроме того, рост крутизны профиля, оставляя движение в волне периодическим, изменяет спектральный состав волны. В первоначально монохроматической волне с частотой  $\omega$  по мере распространения и искажения профиля нарастают высокочастотные гармоники. Причем высокие обертоны  $n\omega$  с большим  $n$  достигают максимума в месте наибольшей крутизны. При этом происходит непрерывная перекачка энергии из основной гармоники в высокие обертоны. Поскольку затухание звука пропорционально квадрату частоты, это приводит к более сильному затуханию волны. Рост крутизны фронта волны будет происходить до тех пор, пока не стабилизируется диссипативными процессами. Таким образом, профиль волны зависит от соотношения нелинейных и диссипативных эффектов и ее интенсивности. Если амплитуда волны достаточно велика, то доминируют нелинейные эффекты и профиль волны в конце концов "опрокинется" и образуются ударная волна.

В противном случае волна за счет диссипации успевает затухнуть раньше, чем в ней накапливаются нелинейные эффекты [1].

Глубина образования УВ в CdTe при воздействии на его поверхность лазерного импульса может быть рассчитана по выражению из работы [2]

$$l_{sw} = \frac{2c_l^2 \tau}{\zeta(m+1)} \left[ \frac{2\rho}{\bar{\chi}(\gamma-1)(1-R)E\alpha_\lambda} \right]^{1/2}, \quad (1)$$

где  $c_l$  – скорость продольной акустической волны,  $\tau$  – длительность лазерного импульса,  $\rho$  – плотность,  $\zeta$  – параметр величины ускорения поверхностного слоя,  $m$  – показатель изэнтропы,  $\bar{\chi}$  – эффективное значение коэффициента искажения фронта импульса,  $\gamma$  – показатель адиабаты,  $R$  – коэффициент оптического отражения,  $E$  – плотность энергии лазерного импульса,  $\alpha_\lambda$  – коэффициент оптического поглощения. Как и в [2], принимаем  $\bar{\chi} = 1$ ,  $\zeta = 1$ ,  $m = 3$ ,  $\gamma = 5/3$ . Учтем, что со-

гласно [3] в металлах значение скорости распространения импульсов давления при наносекундном ИЛО на 15–30 % выше продольной скорости звука.

На рисунок 2 приведены результаты расчета глубины образования УВ в CdTe в зависимости от плотности интенсивности лазерного импульса ( $I = E/\tau$ ).

Следуя графику на рисунке 2, подбором толщины CdTe можно определить условия позволяющие избежать образования УВ в объеме, а также условия локального воздействия на дефектную подсистему на различной глубине полупроводника.

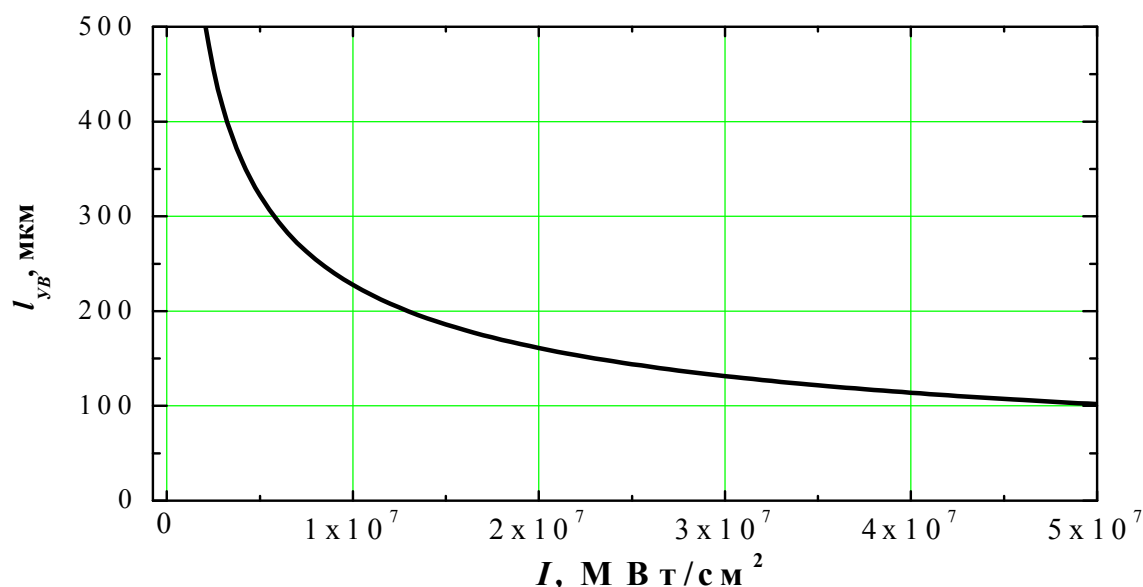


Рисунок 2 – Глубина образования ударной волны в CdTe в зависимости от интенсивности импульса рубинового лазера ( $R_{CdTe} = 0.43$ )

### Литература

1. Энгельбрехт, Ю.К. Нелинейные волны деформации / Ю.К. Энгельбрехт, У.К. Нигул. – М.: Наука, 1981. – 256 с.
2. Янушкевич, В.А. Критерий возможности образования ударных волн при действии лазерного излучения на поверхность поглощающих конденсированных сред / В.А. Янушкевич // ФиХОМ. – 1975. – № 5. – С. 9–11.
3. Судьенков, Ю.В. Аномально высокие скорости распространения наносекундных импульсов давления в металлических фольгах / Ю.В. Судьенков, А.И. Павлишин // Письма в ЖТФ. – 2003. – Т. 29. – Вып. 12. – С. 14–20.

Д.Л. Коваленко, В.Е. Гайшун, Н.А. Алешкевич, В.В. Васькевич

УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Беларусь

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЗОЛЬ-ГЕЛЬ ПЛЕНОК ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ КНИ-СТРУКТУР

На протяжении последних лет ведущие производители нано- и микропроцессорных структур, такие как Advanced Micro Devices (AMD) и International Business Machines (IBM), при производстве своих процессоров используют структуры типа кремний на изоляторе – КНИ (англ. Silicon on insulator – SOI)[1–2].

Структура, выполненная по технологии КНИ, представляет собой трёхслойный пакет, который состоит из монокристаллической кремниевой пластины, диэлектрика и размещённого на нём тонкого поверхностного слоя кремния (рисунок 1).

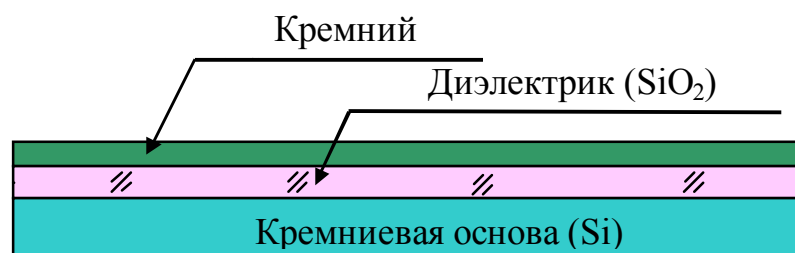


Рисунок 1 – Схема КНИ-структуры

В качестве диэлектрика может выступать диоксид кремния  $\text{SiO}_2$  или, гораздо реже, сапфир (в этом случае технология называется «кремний на сапфире», или КНС). Наибольшее распространение получили КНИ-структуры, где в качестве изолятора выступает диоксид кремния. Для создания таких диэлектрических структур в основном используются такие методы, как PVD (Physical Vapour Deposition); CVD (Chemical Vapor Deposition). Данные методы обладают рядом недостатков: высокими энергозатратами, сложными циклами производства, наличием дефектов в рабочих слоях.

За последние годы метод химического осаждения из растворов стал широко использоваться в современной микроэлектронике, что обусловлено возможностью создания материалов сложного химического состава и структуры, а также получения покрытий особой чистоты [3]. Одним из таких методов является золь-гель метод. При по-

лучении КНИ структур в качестве слоя диэлектрика используется  $\text{SiO}_2$  покрытие, полученное золь-гель методом. Этот метод является одним из перспективных методов синтеза различных диэлектрических, изолирующих и защитных материалов, метод не требует емкого оборудования, является гораздо более экономичным и экологически чистым, чем PVD и CVD методы. Процесс формирования диэлектрической силикатной пленки состоит из трех важнейших для ее физико-химических свойств стадий: получение однородного золя в растворе из исходных компонентов; нанесения золя на подложку монокристаллического кремния методом центрифугирования; формирование оксидной диэлектрической пленки путем термообработки.

Пленкообразующий раствор был приготовлен на основе композиций органических соединений кремния. Созревание золя длится 2–3 суток при комнатной температуре. Прочность и адгезионные свойства покрытия определяется правильным подбором соотношения компонентов раствора. Перед нанесением пленкообразующий раствор помещали в ультразвук для деполимеризации в нем высокомолекулярных соединений, что улучшало качество получаемых покрытий. Пленкообразующий раствор наносили на поверхность монокристаллического кремния марки КЭФ-45 ориентации (100) методом центрифугирования при относительной влажности воздуха 90 %. В результате были получены однородные покрытия, не имеющие дефектов в своей структуре. После нанесения образец помещается в печь и термообработывают при температуре от 300 до 500 °С на воздухе 5–10 минут. Толщину покрытия можно варьировать при помощи вязкости исходного пленкообразующего раствора, частоты вращения центрифуги (1000–5000 об/мин). В результате толщина диэлектрической пленки может быть задана в пределах 0,1–0,2 мкм до 4,0–5,0 мкм.

Для исследования стойкости к механическому истиранию и диэлектрических свойств было подготовлено несколько образцов с подслоем термического окисла и без него:

- Д-1 пластина с подслоем термического окисла + слой диэлектрика;
- Д-2 пластина с подслоем термического окисла + слой диэлектрика;
- Д-3 пластина с одним слоем диэлектрика;
- Д-4 пластина с одним слоем диэлектрика.

Для измерения диэлектрических свойств на поверхности данных покрытий, вакуумными методами, были сформированы алюминиевые площадки (рисунок 2).

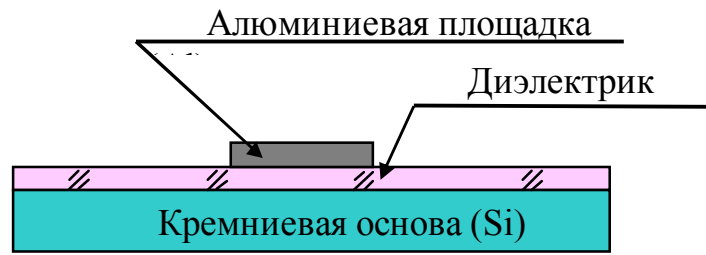


Рисунок 2 – Диэлектрическое покрытие с алюминиевыми площадками

На рисунке 3 представлены изображения РЭМ-скола полученных образцов. Можно увидеть, что диэлектрические пленки имеют однородную структуру, термический окисел имеет толщину от 10 до 20 нм.

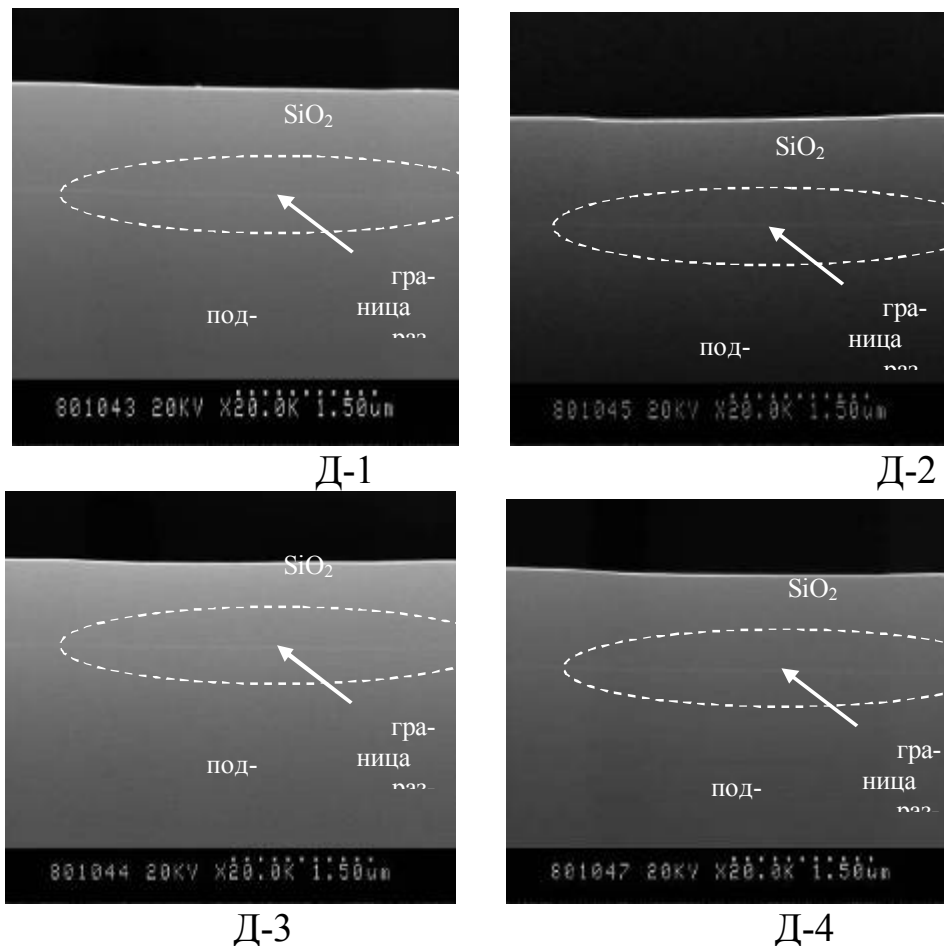


Рисунок 3 – Изображение РЭМ-скола золь-гель  $\text{SiO}_2$  диэлектрических пленок на поверхности монокристаллического кремния (образцы Д-1, Д-2, Д-3, Д-4)

Результаты измерения диэлектрических свойств, показателя преломления и толщины полученных покрытий представлены в таблице 1. Таблица 1 – Электрофизические параметры диэлектрических слоев

№ образца	Показатель преломления	Толщина слоя по РЭМ-сколу, мкм	Диэлектрическая проницаемость
Д-1	1,42	0,94	8,2
Д-2	1,439	1,04	7,44
Д-3	1,462	0,93	4,42
Д-4	1,401	1,01	5,8

Из таблицы видно, что величина показателя преломления на образцах Д-1, Д-4 составляет 1.4–1.42, что близко к величине показателя для термического окисла равной 1.42. Для образцов Д-2, Д-3 величина показателя преломления составляет 1.439–1.462, что несколько превышает величину показателя для термического окисла. Наличие подслоя термического окисла не оказывает влияния на толщину полученных покрытий, которая варьируется от 0,93 до 1,04 мкм. Это связано с тем, что толщина термического окисла на несколько порядков меньше толщины полученных диэлектрических SiO<sub>2</sub> покрытий. Величина диэлектрической проницаемости слоев находится в диапазоне 4.4–8.2, что превышает ее значение для термической двуокиси кремния равное 3.8.

Полученные диэлектрические SiO<sub>2</sub> покрытия устойчивы: к термическому воздействию; к травлению в стандартном травителе для алюминия, разогретого до температуры T= 40 °С в течении 20 минут; обладают механической стойкостью к истиранию (3000 циклов истирания).

На поверхности данных покрытий, вакуумными методами, могут быть сформированы тонкие слои металлов и полупроводников без изменения электрофизических и физико-химических свойств диэлектрического SiO<sub>2</sub> подслоя.

### Литература

1. Design methodology for the IBM POWER7 microprocessor / Friedrich J., Puri R., Brandt U. [et al.] // IBM Journal of Research and Development. – 2011. – Vol. 55. – P. 1–14.
2. An x86-64 Core in 32 nm SOI CMOS / Jotwani R., Sundaram S., Kosonocky S. [et al.] // Solid-State Circuits, IEEE Journal. – 2011. – Vol. 46. – P. 162–172.

3. Васильев, В.А. Изолирующие слои многоуровневой разводки интегральных схем с низкой диэлектрической проницаемостью / В.А. Васильев, К.А. Воротилов, А.С. Сигов // Электронная промышленность. – 2004. – № 4. – С. 145–153.

**В.Н. Мышковец, А.В. Максименко, Г.А. Баевич, В.В. Грищенко**

**УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Беларусь**

## **ОБОРУДОВАНИЕ И ТЕХНОЛОГИИ ДЛЯ ИМПУЛЬСНОЙ ЛАЗЕРНОЙ СВАРКИ МЕТАЛЛОВ И СПЛАВОВ**

В настоящее время известен ряд направлений использования лазерного оборудования в технологиях обработки материалов, таких как сварка, резка, термообработка и др. Использование лазерного излучения, в первую очередь, предполагается в тех технологических процессах, где лазер является единственным средством решения задачи, а также для процессов, связанных с большими энергетическими и временными затратами.

С целью расширения возможностей использования лазерного излучения в технологии обработки материалов, в данной работе предлагаются лазерное оборудование и оптические системы для формирования излучения в пучки кольцевого и эллиптического сечений и устройства для передачи и фокусировки излучения.

Для импульсной обработки материалов лазерным излучением с изменяемыми пространственно-энергетическими и временными характеристиками разработана и создана технологическая установка (рисунок 1) [1–3].

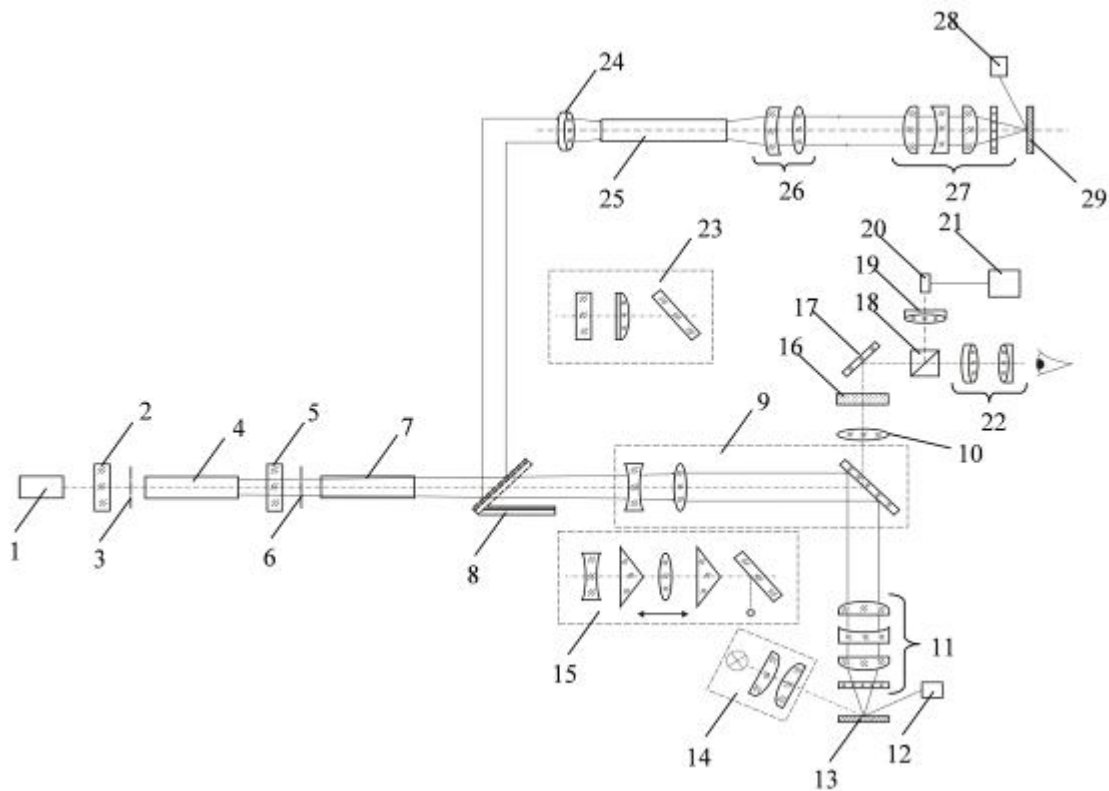


1 – блок питания лазера; 2 – излучатель; 3 – система визуального наблюдения; 4 – координатная система; 5 – фокусирующий объектив; 6 – блок охлаждения; 7 – система подачи газовой среды

Рисунок 1 – Лазерная технологическая установка для импульсной обработки материалов

Для данной установки разработаны и созданы программно управляемые координатные системы, предназначенные для перемещения и вращения обрабатываемых деталей в соответствии с технологическими требованиями обработки.

Оптическая схема лазерной установки приведена на рисунке 2.



1 – юстировочный лазер; 2 – заднее зеркало резонатора; 3 – шторка; 4 – активный элемент генератора; 5 – выходное зеркало резонатора; 6 – шторка; 7 – активный элемент усилителя; 8 – поворотное интерференционное зеркало; 9 – телескопическая система; 10 – корректирующая линза; 11 – фокусирующий объектив с защитным стеклом; 12 – система подачи газов; 13 – плоскость обработки; 14 – система подсветки зоны обработки; 15 – оптическая система для формирования пучков кольцевого сечения; 16 – жидко-кристаллический затвор; 17 – поворотное зеркало; 18 – светоделительный куб; 19 – объектив веб-камеры; 20 – веб-камера; 21 – монитор; 22 – монокуляр; 23 – оптическая система для формирования пучков эллиптического сечения; 24 – фокусирующий объектив для ввода лазерного излучения в световод; 25 – оптоволоконно; 26 – оптическая система вывода излу-



чения из оптоволокна; 27 – фокусирующий объектив с защитным стеклом; 28 – система подачи газов; 29 – плоскость обработки

Рисунок 2 – Оптическая схема лазерной установки для импульсной обработки материалов

Для обработки материалов пучками кольцевого сечения с изменяемыми геометрическими параметрами разработана и изготовлена оптическая приставка (рисунок 3) [4].



Рисунок 3 – Оптическая приставка для формирования пучков кольцевого сечения

Технические характеристики оптической приставки: диапазон перестройки диаметров колец – 0,2–11,4 мм; мощность передаваемого лазерного излучения – 150 Вт; длина волны излучения – 1,06 мкм; входная апертура – 12 мм; кратность телескопической системы –  $2^X$  –  $4^X$ ; фокусное расстояние объектива – 50, 80 мм.

Оптическая система для формирования кольцевых лазерных пучков обеспечивает как дискретную (за счет изменения геометрических параметров оптических элементов), так и плавную перестройку диаметра кольцевого контура и его ширины. Отличительными особенностями системы является использование оптических элементов конической формы, их комбинаций со сферическими линзами и зеркалами, активных элементов лазера.

Для обработки крупногабаритных изделий в труднодоступных местах и на удалении от источника излучения разработана и изготовлена оптоволоконная приставка для передачи и фокусировки лазерного излучения (рисунок 4).

В ходе экспериментальных исследований установлено влияние энергетических и временных характеристик на структуру и свойства хромовых покрытий и выбраны оптимальные условия и режимы наплавки.

Установлено, что для получения покрытий с минимальным содержанием пор и микротрещин необходимо использовать импульс лазерного излучения треугольной формы с крутым передним и линейно убывающим задним фронтом.



1 – узел ввода излучения; 2 – узел вывода излучения

Рисунок 4 – Оптоволоконная приставка для передачи и фокусировки лазерного излучения

Оптимальными характеристиками импульсного лазерного излучения для процесса наплавки являются: энергия в импульсе излучения – 5,5–8,0 Дж; длительность импульса – 4,0 мс; частота следования – 5 Гц; фокусное расстояние объектива – 100 мм; диаметр сфокусированного лазерного пучка в плоскости обработки – 0,2–0,4 мм.

В качестве защитного газа при наплавке использовался аргон. Расход газа составлял 2–4 л/мин.

Наплавка металла представляет собой переходную структуру, по химическому составу близкую к стали, с увеличенным содержанием хрома около основного металла. При этом с увеличением концентрации Cr происходит модификация поверхностного слоя, что позволяет говорить об антикоррозионных свойствах наплавки и удовлетворительной работе на износ [5–7].

Исследование микроструктуры (рисунок 5) образцов с хромовым покрытием показало, что на хромовом покрытии отсутствуют сколы, трещины, пористость не превышает 5 %, адгезия покрытия с основой хорошая, зона отпуска под покрытием на основе отсутствует.



Рисунок 5 – Структура хромового покрытия ( $\times 1000$ )

Значение микротвердости хромового покрытия без алмазного выглаживания составляет  $828 \text{ кгс/мм}^2$ , с алмазным выглаживанием –  $824 \text{ кгс/мм}^2$  при значении микротвердости основы –  $400 \text{ кгс/мм}^2$ .

По разработанной технологии восстановлены поверхности цилиндров с хромовым покрытием (рисунок 6).



Рисунок 6 – Общий вид цилиндра

В результате проведенных исследований определены физические и технологические особенности лазерной сварки меди и латуни. Разработана технология импульсной лазерной сварки трубопроводов из меди с латунными ниппелями (рисунок 7) [8–9].

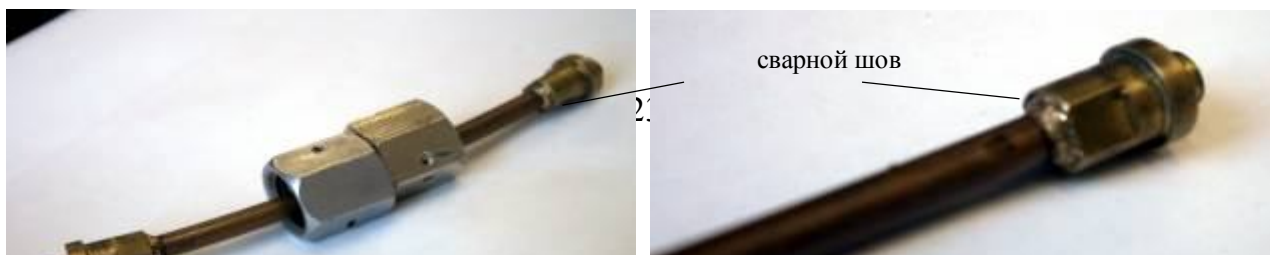


Рисунок 7 – Общий вид медного трубопровода  
с латунными ниппелями

В результате экспериментальных исследований определены оптимальные режимы и условия сварки образцов из нержавеющей стали малой толщины для крупногабаритных изделий ( $d < 1$  мм) на лазерной установке с оптоволоконной приставкой [10].

### Литература

1. Лазерная установка с оптоволоконной приставкой и процессы сварки изделий из нержавеющей стали / В.Н. Мышковец, А.В. Максименко, С.В. Шалупаев, С.Н. Юркевич // *Материалы. Технологии. Инструменты.* – 2003. – Т. 8, № 4. – С. 84–87.

2. Пат. РФ 34426, МПК<sup>7</sup> В 23К 26/00, В 23К 26/02, В 23К 26/03, В 23К 26/067. Установка для лазерной обработки / А.А. Бренько, В.Н. Мышковец, А.В. Максименко, В.И. Рыбин, А.Н. Тучин, С.Н. Юркевич, Е.Г. Прищепов // заявл. 11.06.2003; опубл. 10.12.2003.

3. Оборудование для лазерной технологии обработки материалов / Мышковец В.Н., Максименко А.В., Баевич Г.А., Грищенко В.В. Белорусский промышленный форум 2006, Технологии - Оборудование-Качество: тезисы 9-й междунар. симп. Минск, 16–19 мая 2006 г.

4. Патент №34427 РФ 7 В23К 26/00 Оптическая головка для лазерной обработки В.Н. Мышковец, А.В. Максименко, В.И. Рыбин, А.Н. Тучин, С.Н. Юркевич, С.В. Шалупаев Оpubл. 10.12.2003.

5. Влияние формы и длительности импульсов на структуру и свойства углеродистых сталей / Мышковец В.Н., Максименко А.В., Баевич Г.А., Грищенко В.В. // сборник научных трудов: VII Междунар. научн. конф. Минск, 2008. Лазерная физика и оптические технологии, Т. II. – С. 211–214.

6. Лазерная наплавка конструкционных сталей кольцевыми пучками / А.В. Максименко, В.Н. Мышковец, А.И. Кравченко, П.С. Шаповалов // *Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии. Материалы международной научно-технической конференции*

22–23 апреля 2010 г., Могилев. – ГУ ВПО «Белорусско-Российский университет». – Ч. 1. – С. 222–223.

7. Myshkavets, V.N. Features of pulse laser processing of materials by ring beams / V.N. Myshkavets, A. V. Maksimenka, P. S. Shapavalav // International Conference «Optical Techniques and Nano-Tools for Material and Life Sciences» (OTN<sub>4</sub>MLS-2010), Минск, 16–19 июня 2010 г.

8. Юркевич, С.Н. Восстановление деталей из стали 30ХГСН2А наплавкой методом лазерной сварки / С.Н. Юркевич, В.Н. Мышковец, А.В. Максименко // Справочник. Инженерный журнал. – 2004. – С. 11–13.

9. Мышковец, В.Н. Лазерная сварка тонкостенных изделий из коррозионно-стойких сталей / В.Н. Мышковец, А.В. Максименко, С.Н. Юркевич // Научно-технический и производственный журнал «Заготовительные производства в машиностроении». – 2003. – № 11. – С.17–18.

10. Лазерная установка с оптоволоконной приставкой и процессы сварки изделий из нержавеющей стали / А.В. Мышковец [и др.] // Материалы. Технологии. Инструменты. – 2003. – Т. 8, № 4. – С. 84–87.

**Д.Г. Пилипцов, А.В. Рогачев, Н.Н. Федосенко,  
А.С. Руденков, Чжоу Бин**

**УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Беларусь**

## **ВЛИЯНИЕ ПРИРОДЫ МЕТАЛЛА НА ФАЗОВЫЕ СОСТОЯНИЯ ЛЕГИРОВАННЫХ УГЛЕРОДНЫХ ПОКРЫТИЙ**

Спектроскопия комбинационного рассеивания – один из наиболее широко применяемых методов для неразрушающего анализа углеродных покрытий. Данный метод позволяет охарактеризовать кристаллические и аморфные группы атомов в материалах на основе углерода [1–3].

В КР-спектрах различных аллотропных модификаций углерода, таких как алмаз, графит, фуллерены, нанотрубки и алмазоподобные покрытия (АПП), наблюдаются большие различия.

АПП состоят из аморфного углерода с областями, состоящими из углерода с электронными конфигурациями  $sp^2$  и  $sp^3$ . Их механические и оптические свойства зависят не только от содержания  $sp^3$ , но и от

числа и размера групп с  $sp^2$  связанных атомов углерода. Характерные рамановские спектры могут использоваться для изучения структуры атомов углерода.

При возбуждении АПП излучением видимого диапазона в КР-спектре проявляются два пика при  $1560\text{ см}^{-1}$  называемый G пик и при  $1360\text{ см}^{-1}$  D пик. Эти два основных пика зависят от атомов углерода, находящихся в  $sp^2$  конфигурации. G пик отражает валентные колебания всех  $sp^2$  связанных атомов углерода из углеродного кольца или длинной цепочки, в то время D пик возникает из колебаний  $sp^2$  связанных атомов углерода углеродного кольца. Смещение G пика может служить индикатором числа  $sp^3$ -связей, т. е. сдвиг G пика к нижним волновым числам указывает на возрастание содержания  $sp^3$  связей. Шродер [1,2] изучал КР-спектры смеси порошков алмаза и графита в фиксированном процентном соотношении, он установил, что число  $sp^3$  связей возрастает при увеличении интегральных интенсивностей отношения  $I_D/I_G$ , а G пика убывает, в тоже время число цепочечных структур возрастает [1,3].

В таблице 1 приведены результаты математической обработки экспериментальных данных по Гауссу. Показано, что на КР-спектрах всех образцов наблюдаются характерные спектральные особенности D и G пиков, присущие для всех структур АПП.

Таблица 1 – Результаты математической обработки КР спектров

№	Концентрация легирующих элементов, %		Центр $I_D$ пика $[\text{см}^{-1}]$	Область интегрирования	Центр $I_G$ пика $[\text{см}^{-1}]$	Область интегрирования	$I_D/I_G$
	Cu	Ti					
1	0	0	1360	275083,4	1548	504191,8	0,55
2	3,6	0	1397	473049,3	1549	551153,5	0,86
3	4,22	0	1367	584929,6	1556	823975,4	0,71
4	6,70	0	1383	374590,2	1570	366384,9	1,02
5	15,0	0	1392	70382,7	1568	51478,9	1,37
6	1,56	43,60	1393	124027,0	1572	72336,8	1,71
7	3,84	41,62	1390	432739,3	1565	260701,1	1,65
8	4,89	40,11	1368	452653,3	1568	179939,4	2,52

Положение D и G пиков определяется природой легирующего элемента и его концентрацией.

Из данных, приведенных на рисунке 1, видно, что происходит характерное смещение G пика к нижним волновым числам для легированных медью композиционных АПП (образцы 2–5). Отношение  $I_D/I_G$  существенно уменьшается с возрастанием содержания Cu, что указывает на уменьшение числа  $sp^3$  связей для легированных медью АПП, что подтверждает способность меди стимулировать процесс графитизации в процессе роста углеродного покрытия.

При бинарном легировании титаном и медью положение G пика изменяется с  $1549\text{ см}^{-1}$  до  $1572\text{ см}^{-1}$ , при этом соотношение  $I_D/I_G$  существенно возрастает с 0,71 до 2,52. Это указывает на то, что число  $sp^3$  связей при бинарном легировании АПП снижается, а число  $sp^2$  связей возрастает. Легирование титаном и медью стимулирует увеличение степени разупорядоченности  $sp^2$  связей.

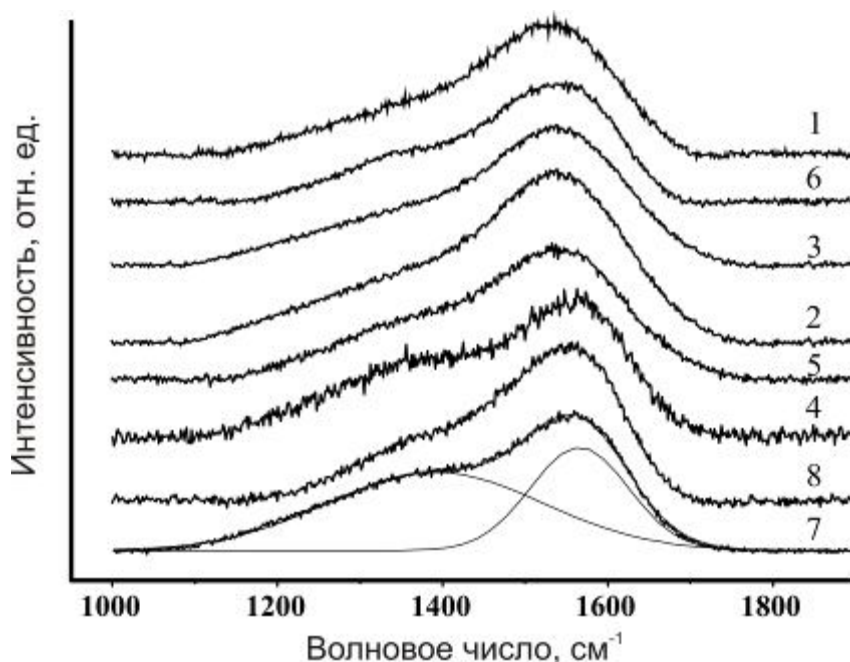


Рисунок 1 – Рамановские спектры одно- и двухкомпонентно легированных Ti и Cu АПП (нумерация образцов та же, что и в таблице 1)

Такое поведение отношения  $I_D/I_G$  характеризует уменьшение степени упорядоченности атомов углерода и отдельных углеродных кластеров в аморфной углеродной основе вследствие формирования твердого карбида титана, что подтверждается данными работы [4].

### Литература

1. Erdemir, A. Superlubricity / A. Erdemir, J.R. Martin. – Amsterdam: Elsevier Science, 2007. – 512 p.

2. Robertson, J. Diamond-like amorphous carbon / J Robertson // *Material Science and Engineering: Elsevier Science*. – 2002. – Vol. R, № 37. – P. 129–281.

3. Ahn, H.S. Application of phase contrast imaging atomic force microscopy to tribofilms on DLC coatings / H.S. Ahn, S.A. Chizhik, A.M. Dubravin, V.P. Kazachenko, A.N. Popov // *Wear*. – 2001. – № 249. – P. 617–625.

4. Рогачев, А.В. Механические свойства и структура композиционных углеродных покрытий / А.В. Рогачев, А.Н. Попов, В.П. Казаченко, С.С. Сидорский // *Материалы, технологии, инструмент*. – 2001. – Т. 5, № 2. – С.77–80.

**В.Г. Пинчук<sup>1</sup>, С.В. Короткевич<sup>2</sup>, С.О. Бобович<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> УО «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», Беларусь,

<sup>2</sup> РУП «Гомельэнерго», Беларусь

## **ФОРМИРОВАНИЕ МЕТАЛЛОРГАНИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТНЫХ СЛОЁВ ПРИ ФРИКЦИОННОМ НАГРУЖЕНИИ МЕТАЛЛОВ**

Современные технологии интенсивной пластической деформации позволяют получать материалы нанокристаллической и субмикроструктурной структуры с высокими прочностными характеристиками. Образование таких структур при трении возможно в силу локализации процессов пластической деформации в поверхностных объёмах и воздействия градиентов температурных полей при их скоростном деформировании. Немаловажную роль в кинетике структурных преобразований имеет специфика фрикционного нагружения и температурные флуктуации.

Одним из направлений повышения износостойкости фрикционно сопряжённых поверхностей металлов является формирование металлорганических соединений в фрикционном контакте. Это осуществляется применением восстанавливающих антифрикционных препаратов (ВАФП), способствующих формированию на поверхности трения полимерного защитного слоя. Использование ВАФП способствует восстановлению мощности двигателей, уменьшению расхода топлива, поддержанию давления масла. В наших исследованиях реализация ВАФП осуществлялась посредством применения:

1) фторсодержащих присадок политрифторэтилена (фторопласта 3) к базовым смазочным материалам Литол-24, Циатим-201 и др.;



2) применением мелкодисперсных металлических ( $\text{Cu}$ ,  $\text{CuO}$ ,  $\text{Cu}_2\text{O}_3$ ) и органических (ионол, дифениламин, триэтаноламин) присадок и наполнителей к этим смазкам и маслам, которые в зоне контактов поверхностей образуют металлоорганические соединения.

Действие первых поверхностно-активных веществ (ПАВ) сводится к насыщению поверхностей длинными фторсодержащими молекулами, выполняющими роль своеобразного армирующего материала, повышающего прочность материалов контактирующих пар. Во втором случае, в зоне триботехнических контактов образуются соединения металлов под воздействием ПАВ. В зоне трения на пятнах фактического контакта реализуется механизм локальных поверхностных реакций, который осуществляет химическую приработку поверхностей [1]. Продуктами реакции являются соединения металла, заполняющие интрузии и дефекты поверхности трения. В этом случае, в результате своеобразной микрошлифовки поверхности возрастает класс чистоты поверхности на 60–80 %, а также возрастает износостойкость поверхностного слоя. Применение фторсодержащих и металлоорганических препаратов позволяет формировать в поверхностных слоях металла мелкодисперсную ячеистую структуру (наноструктуру) с размером блоков  $\approx 10^{-2}$  мкм, квазиравномерно распределённых по объёму поверхностного слоя (рисунок 1).



Рисунок 1 – Наноструктура никеля

Эти нанокристаллические и субмикрокристаллические дислокационные кластеры обуславливают высокую прочность и износостойкость, ввиду отсутствия локализованных концентраторов напряжений, в которых формируются элементы разрушения. Согласно [2], ячеистая сотовая структура эффективно удерживает смазку. Противоизносные свойства металлов, связанные с самоорганизацией материала поверхностных слоёв, определяются и физико-химическими процессами, протекающими в граничном смазочном слое. В работе [3], методами ядерного магнитного резонанса (ЯМР) и ФМР определена взаимосвязь изменений дислокационной структуры поверхностных слоёв металла (никель) и физико-химическими свойствами смазки Циатим-201 при трении. Выявленная частичная полимеризация смазки и образование в ней металлоорганических комплексов приводит к замедлению процессов наклёпа поверхностных слоёв и увеличению износостойкости материала. Саморегуляция процессов упрочнения в этом случае может происходить по следующей схеме: замедление наклёпа связано с интенсивным выходом дислокаций из поверхностного слоя, что приводит к активации поверхности, стимулирующей развитие процессов образования водородных связей, комплексов и полимеризации смазки. В свою очередь, образование комплексных соединений и водородных связей на поверхности трения приводит к адсорбционному понижению прочности и пластифицированию поверхностных слоёв.

Эффективность действия фторсодержащих присадок иллюстрируются результатами, представленными на рисунке 2.

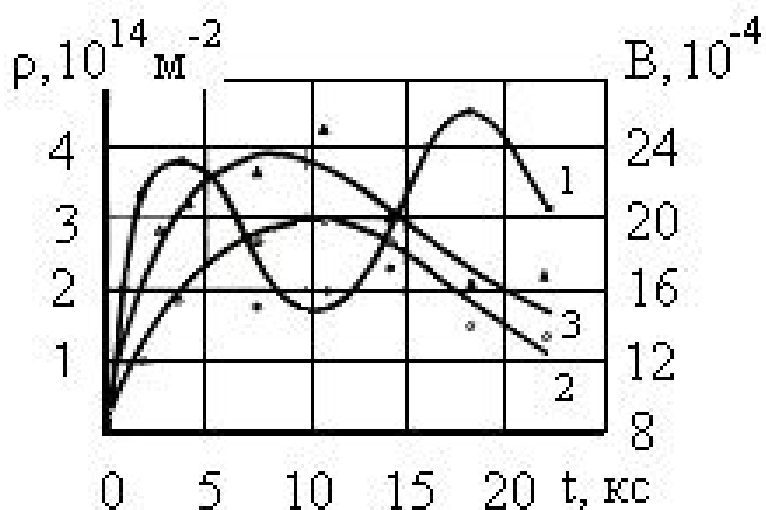


Рисунок 2 – Зависимость плотности дислокаций ( $\rho$ ) и уширения линий рентгенограммы ( $B$ ) от времени испытания  $t$ :  
1 – изменение при трении Ni в среде ЦИАТИМ-201;

2, 3 – изменение  $\rho$  и  $V$ , соответственно, в среде ЦИАТИМ-201 +3 % фторопласта-3

Добавка в смазку Циатим-201 мелкодисперсного фторопласта (Фт-3) в количестве 1–3 мас. % приводит к значительному замедлению роста плотности дислокаций  $\approx 4$  раза и, соответственно, к возрастанию продолжительности цикла изменения прочностных свойств никеля (пары трения Ni–Mo). Анализ литературных данных и характера изменения физико-механических свойств (плотность дислокаций, ширина линии рентгеновских интерференций, микротвёрдости), физико-химических (спектры ЯМР, ИК-спектроскопии) и триботехнических (интенсивность изнашивания, потеря массы образцов при трении и коэффициент трения) свойств даёт основание считать, что этот эффект связан с деструкцией полимера и образованием поверхностно-активных молекул, приводящих к уменьшению силы трения и, соответственно, сдвиговых деформаций.

Таким образом, действие фторсодержащих и металлоорганических композиционных смазок сводится к формированию защитных слоёв на поверхности трения и насыщению поверхностных слоёв длинными фторсодержащими молекулами, выполняющими роль армирующего материала. В результате этих процессов повышается износостойкость фрикционных сопряжений. Образование металлоорганических соединений приводит к увеличению долговечности деталей машин и механизмов.

Применение фторсодержащих присадок и металлоорганических антифрикционных препаратов, которые в зоне фрикционных сопряжений реализуют механизм локальных поверхностных реакций, весьма обоснованно. Продуктами реакции заполняются интрузии и залечиваются поверхностные дефекты, что в конечном итоге, повышает износостойкость поверхностного слоя. Применение плакирующих смазок позволяет формировать в поверхностных слоях металла мелкодисперсную ячеистую структуру (наноструктуру) с размером блоков  $\approx 10^2$  мкм квазиравномерно распределённых по объёму поверхностного слоя. Эти нанокристаллические и субмикроскопические фрагменты микроструктуры обуславливают высокую прочность и износостойкость, ввиду отсутствия локализованных концентраторов напряжений, в которых формируются элементы разрушения.

### Литература

1. Хайнике, Г. Трибохимия / Г. Хайнике. – М.: Мир, 1987. – 584 с.

2. Самсонов, А.В. Применение восстанавливающих антифрикционных препаратов в малой энергетике / А.В. Самсонов // Турбины и дизели. – 2007. – № 4. – С. 2–4.

3. О взаимосвязи изменений структуры поверхностных слоёв твёрдых тел и смазочной среды при трении / В.Г. Пинчук, Р.Г. Пинчук, В.В. Харитонов, Е.М. Шишкин // Трение и износ. – 1982. – Т. 3, № 2. – С. 335–338.

**А.В. Семченко<sup>1</sup>, В.В. Сидский<sup>1</sup>, В.Е. Гайшун<sup>1</sup>,  
С.А. Сорока<sup>2</sup>, А.А. Сидерко<sup>2</sup>, Л.В. Судник<sup>3</sup>, Я.В. Чеченкова<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Беларусь,

<sup>2</sup>ОАО «Интеграл», Беларусь,

<sup>3</sup>ГНУ «Институт порошковой металлургии НАНБ», Беларусь

## **СИНТЕЗ ЗОЛЬ-ГЕЛЬ МЕТОДОМ SBT-ПОКРЫТИЙ**

Сегнетоэлектрическая керамика характеризуется двумя особенностями. Во-первых, это наличие остаточной электрической поляризации образца, после устранения внешнего электрического поля активации – причём, через приложение противоположного внешнего поля, знак остаточной поляризации можно обратить. Во-вторых, это необычайно большие (до ~105) значения диэлектрической проницаемости в узком диапазоне температур в области сегнетоэлектрического фазового перехода, при котором происходит изменение микроструктуры кристалла, в частности, изменение типа его симметрии [1]. Появление сегнетоэлектрической керамики с общей структурной формулой  $\text{Sr}(\text{Bi}_x\text{Ta}_x)\text{O}_9$  (SBT) для применения в устройствах с энергонезависимой памятью стало огромным шагом в компьютерном производстве, так как сегнетоэлектрическая оперативная память работает в 100 000 раз быстрее (цикл записи составляет 100 нс) и потребляет при этом как минимум на порядок меньше энергии [2].

Для получения сегнетоэлектриков с общей структурной формулой  $\text{Sr}(\text{Bi}_x\text{Ta}_x)\text{O}_9$  предложен золь-гель метод, сочетающий в себе преимущества контроля стехиометрии многокомпонентных соединений и конформное осаждение сверхтонких слоёв.

Для получения сегнетоэлектрических покрытий состава Sr-Bi-Ta (SBT-покрытий) использовали рабочий плёнкообразующий раствор,

содержащий металлоорганические соединения Ta, нитраты металлов Sr и Bi с мольным соотношением Sr:Bi:Ta 1:1:2.

По изменению вязкости в зависимости от времени созревания определяют стабильность золя и его пригодность для последующего процесса нанесения пленок. Перед нанесением на подложку золь подогревается до комнатной температуры (20–22 °С).

Золь наносили в производственных условиях ОАО «Интеграл» на установке SOG 02 SEMIX on Glass методом центрифугирования; частота вращения подложки составляла от 500 до 2500 об/мин. В качестве подложки использовали пластины монокристаллического кремния. После нанесения золя пластины прошли ступенчатую термообработку от 80 до 350 °С, а затем отжиг в атмосфере кислорода при температуре 750 °С.

Съемка рентгендифракционных профилей SBT-покрытия на пластине проводилась на рентгеновском аппарате ДРОН-3М при  $\text{CoK}_\alpha$ -излучении (Co-фильтр) по методу Брегга-Брентано ( $\theta$ – $2\theta$ ) сканированием детектора с шагом  $\Delta\theta=0,02$  град. Также провели количественный анализ SBT-покрытия.

Исследования поверхности полученных SBT-покрытий проводили методом сканирующей электронной микроскопии (СЭМ), а также методом сканирующей зондовой микроскопии (СЗМ). Анализ данных СЗМ проводили с помощью модульной программы Gwyddion [3]. Данная программа предназначена для анализа полей высот, полученных различными техниками сканирующей зондовой микроскопии (АСМ, МСМ и т. д.). Gwyddion является свободным программным обеспечением.

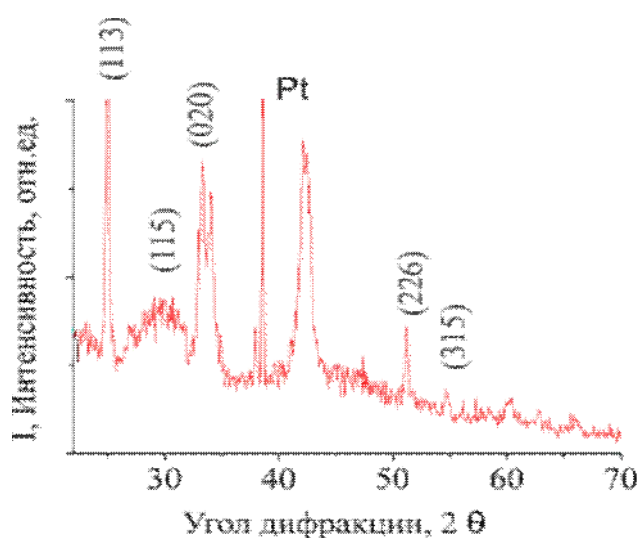


Рисунок 1 – Рентгеновский спектр SBT-покрытия, отожженного в атмосфере кислорода при температуре 750 °С в теч. 2 ч.

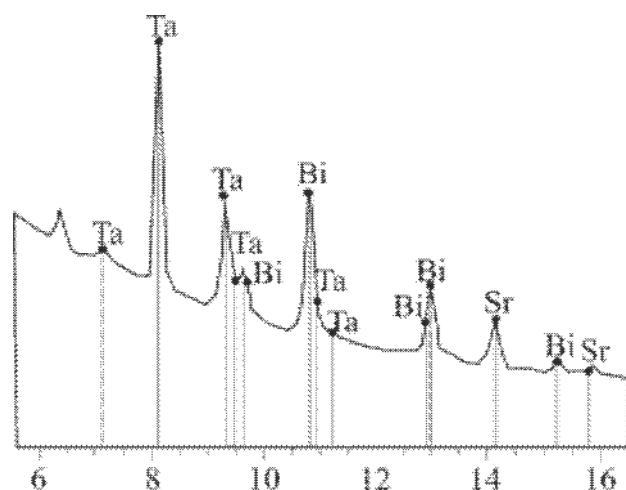


Рисунок 2 – Количественный анализ состава SBT-покрытия, отожженного в атмосфере кислорода при температуре 750 °С в теч. 2 ч.

Таблица 1 – Количественный анализ SBT-покрытия

Элемент	Весовые %	Атомные %	Соединения	Вес. % соед.
Ta	31,92	11,74	Ta <sub>2</sub> O <sub>5</sub>	38,97
Bi	30,61	9,75	Bi <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	34,12
Sr	22,75	17,28	SrO	26,91
O	14,72	61,24		

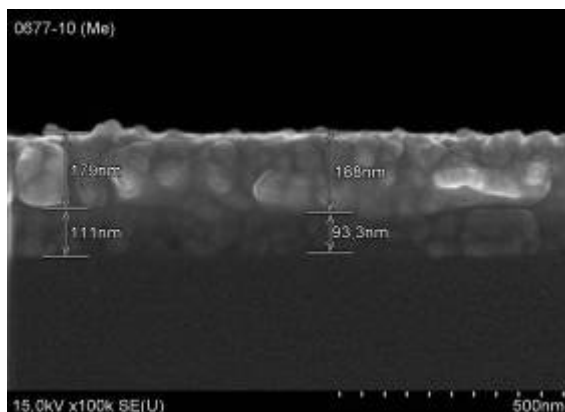
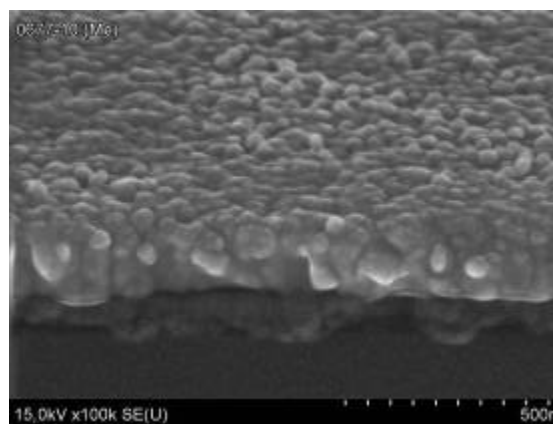
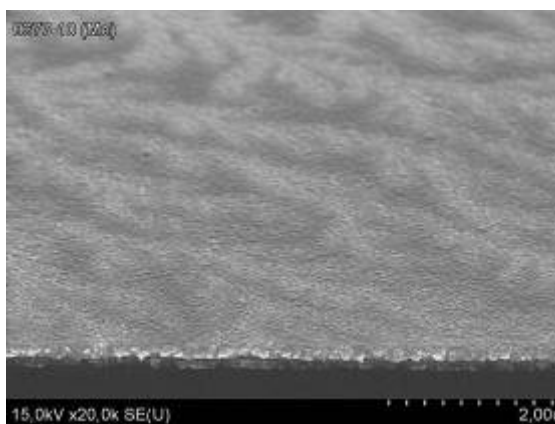


Рисунок 3 – СЭМ-изображения, СЭМ-скол SBT-покрытия на платине, отожженного при 750 °С в течение 2 часов в атмосфере кислорода

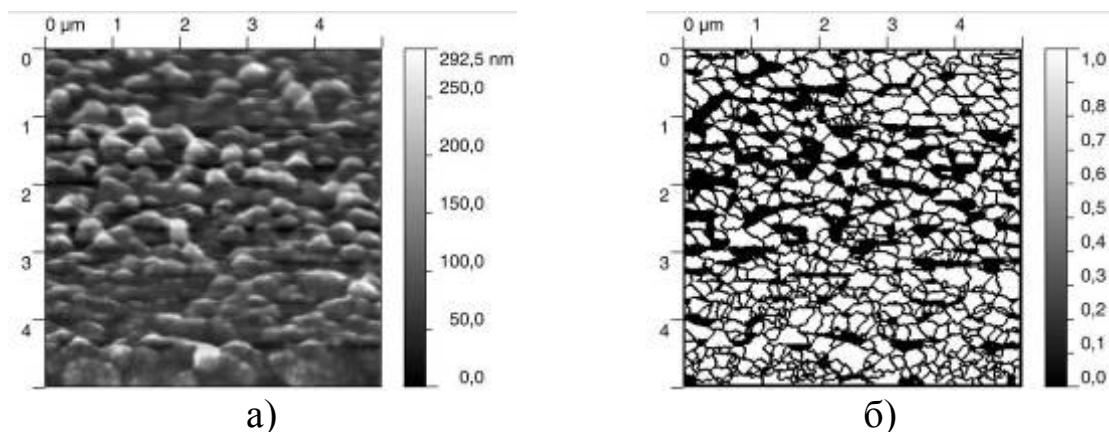


Рисунок 4 – СЭМ-изображение

- а) – SBT-покрытия на платиновом подслое;  
б) – изображение маркировки зёрен на поверхности

Для SBT-покрытия, нанесенного на кремниевую подложку с платиновым подслоем, количество частиц на участке площадью  $5 \times 5$  мкм составляет около 750, средний размер частиц составляет 100 нм, шероховатость поверхности составляет порядка 35 нм. Результаты данных СЭМ для SBT-покрытия, нанесенного на кремниевую подложку, подтверждаются данными атомно-силовой микроскопии.

### Литература

1. Иона, Ф. Сегнетоэлектрические кристаллы / Ф. Иона, Д. Ширане. – М.: Мир, 1965.
2. Morrison, F.D. Ferroelectric nanotubes / F.D. Morrison, Y. Luo, I.Szafraniak [et al.] // Rev. Adv. Mater. Sci. – 2003. – № 4. – P. 114–122.
3. Сеницына, О. Анализ и распознавание графической информации в наноскопии / О. Сеницына, А. Филонов, И. Яминский // Наноиндустрия. – 2009. – № 3. – С. 14–20.

**В.В. Сидский<sup>1</sup>, А.В. Семченко<sup>1</sup>, В.Е. Гайшун<sup>1</sup>, Л.В. Судник<sup>2</sup>,  
И.В. Ярец<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Беларусь,

<sup>2</sup>ГНУ «Институт порошковой металлургии НАНБ», Беларусь

**СТРУКТУРНЫЕ СВОЙСТВА ЗОЛЬ-ГЕЛЬ ПЛЁНОК**

## СОСТАВА $\text{Fe}_x\text{Co}_y\text{O}_z$ : $\text{SiO}_2$

В течение последнего десятилетия резко возрос интерес к наноразмерным системам, обладающим магнитными свойствами. Это объясняется их уникальными функциональными возможностями для последующего применения в опто- и наноэлектронике, измерительной технике, информационных технологиях нового поколения, средствах связи и пр. Эти системы могут синтезироваться в виде монолитов, пленок, порошков [1–2].

В данной работе рассматривается влияние температуры на структурные свойства плёночных образцов, содержащих соединения  $\text{Fe}_x\text{Co}_y\text{O}_z$ , и связь между составом магнитных частиц и их размерами.

Золь-гель методом получены покрытия со следующим соотношением соединений железа и кобальта в исходных золях  $(\text{Fe}(\text{NO}_3)_2:\text{Co}(\text{NO}_3)_2)$ : 1:0,3; 1:0,5; 0,5:1; 1:1. Затем образцы были поэтапно нагреты до температур 400°C, 600°C и 800°C. На каждом этапе на атомно-силовом микроскопе SOLVER P47-PRO снималась топография поверхности каждого образца.

С помощью программы Gwyddion получены данные о размерах и форме наночастиц, образовавшихся в золь-гель покрытии. Gwyddion – модульная программа для анализа данных сканирующей зондовой микроскопии. В первую очередь она предназначена для анализа профилей высоты, полученных с помощью методов сканирующей зондовой микроскопии (AFM, MFM, STM, SNOM/NSOM) [3].

В таблице 1 приведено распределение частиц по размерам на участке, площадью 1×1 мкм на поверхности  $\text{Fe}_x\text{Co}_y\text{O}_z$  –  $\text{SiO}_2$  покрытия для образцов с различным мольным соотношением Fe:Co и температурой отжига на воздухе 400, 600, 800 °C соответственно. Так, для  $\text{Fe}_x\text{Co}_y\text{O}_z$  –  $\text{SiO}_2$  покрытия, отожженного при температуре 800 °C, с мольным соотношением Fe:Co 1:1, размер частиц увеличивается до 40 нм, соответственно число зерен на участке площадью 1×1 мкм уменьшается до 290. При мольном соотношении Fe:Co 0,5:1 средний размер частиц составляет 30 нм, при этом количество частиц увеличивается до 550. Формирование «зародыша» частиц начинается при температуре отжига на воздухе 400 °C.

Таблица 1 – Распределение частиц по размерам на участке площадью 1×1 мкм

Мольное со-	Температура отжига, °C		
	400	600	800



отноше- ние Fe:Co	Число зёрен	Шеро- хова- тость, нм	Сред- ний размер зерна, нм	Число зёрен	Шеро- хова- тость, нм	Сред- ний размер зерна, нм	Число зёрен	Шеро- хова- тость, нм	Сред- ний размер зерна, нм
1:0,3	143	0,17	41	837	1,62	20	872	1,22	20
1:0,5	13	0,62	31	939	0,472	16	569	0,88	28
0,5:1	1344	1,69	16	388	4,62	36	549	7,94	31
1:1	326	2,55	30	1146	3,749	15	287	8,78	40

При температуре отжига 600 °С наблюдается образование однородных мелких частиц со средним размером 15–20 нм. С увеличением температуры отжига до 800 °С происходит алгомерация частиц, число зерен уменьшается, а средний размер частиц увеличивается до 40 нм, соответственно шероховатость поверхности увеличивается до 8,7

нм.

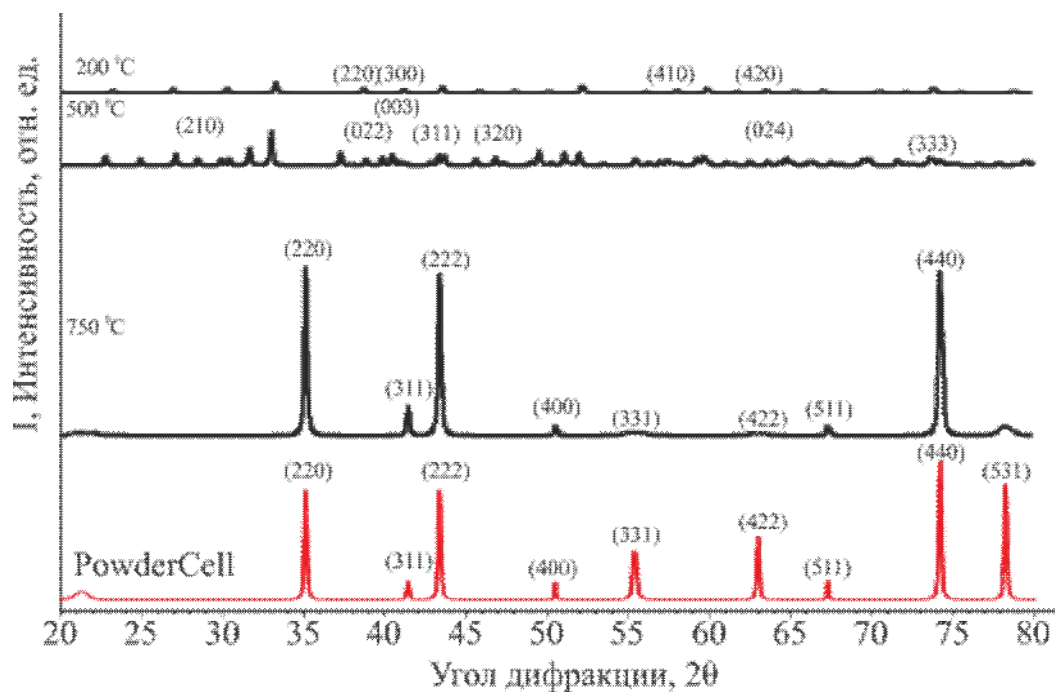


Рисунок 1 – Рентгенограмма синтезированных Fe<sub>x</sub>Co<sub>y</sub>O<sub>z</sub>-пленок в зависимости от температуры.

Результаты сопоставления экспериментальных и теоретической рентгенограммы, построенной в программе PowderCell 2.0

На рисунке 1 представлены рентгенограммы исследуемых наночастиц Fe<sub>x</sub>Co<sub>y</sub>O<sub>z</sub> в зависимости от температуры. На основании полученных рентгенограмм с использованием программы Powder Cell построили модель кристаллической решётки (рисунок 2) [4].

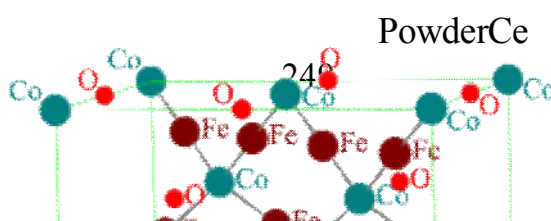
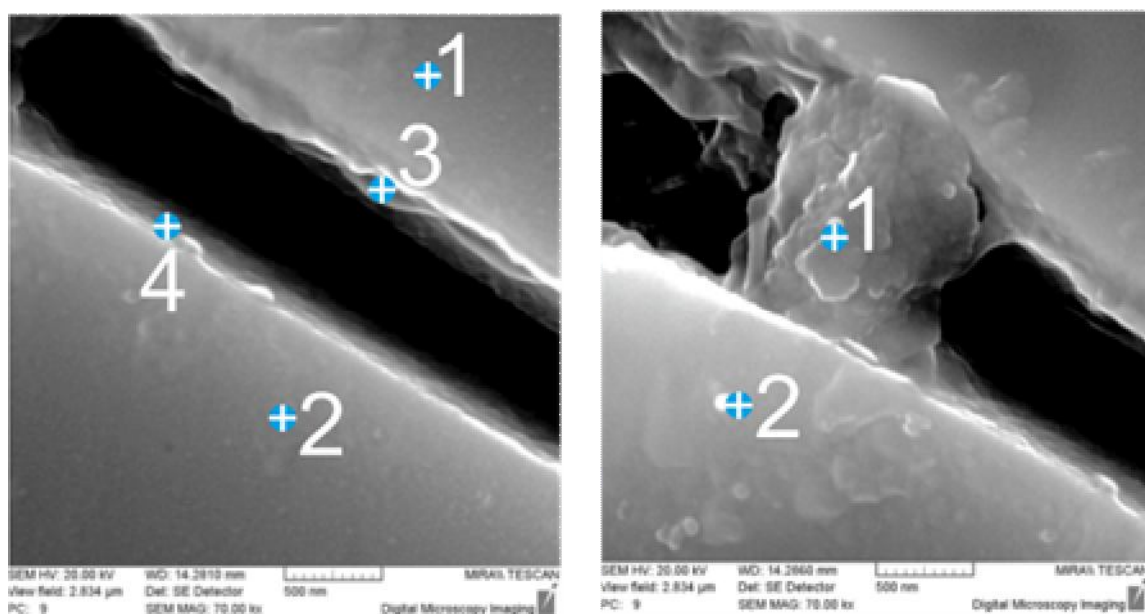


Рисунок 2 – Модель кристаллической решётки  $\text{FeCo}_2\text{O}_4$ , построенная в программе PowderCell 2.0 ( $T_{\text{отжига}}=750^{\circ}\text{C}$ )

Как видно из представленных рентгенограмм, при низких температурах ( $200\text{--}300^{\circ}\text{C}$ ) наночастица характеризуется кубической симметрией (тип ячейки – примитивная). В диапазоне температур  $200\text{--}300^{\circ}\text{C}$  в матрице сосуществует смесь оксидов железа и кобальта. Далее в диапазоне температур  $300\text{--}600^{\circ}\text{C}$  происходит переход от одной кристаллической фазы к другой. При отжиге при  $600\text{--}750^{\circ}\text{C}$  образуются наночастицы со структурой шпинели.

При исследовании СЭМ-изображения и элементного анализа поверхности золь-гель пленок, содержащих соединения  $\text{Fe}_x\text{Co}_y\text{O}_z - \text{SiO}_2$ , выявлено фазовое образование частиц состава  $\text{Fe}_x\text{Co}_y\text{O}_z$  в неорганической  $\text{SiO}_2$  – матрице.

Итак, в результате анализа данных АСМ – изображений с помощью программы Gwyddion выявлена возможность варьирования размеров частиц (от 15 до 40 нм) в золь-гель покрытиях за счёт изменения концентрации и типа активаторов в  $\text{SiO}_2$  – матрице, а также за счёт изменения температуры. С увеличением температуры отжига до  $800^{\circ}\text{C}$  происходит алгомерация частиц, число зерен уменьшается, а средний размер частиц увеличивается до 40 нм, и шероховатость поверхности увеличивается до 8,7 нм. При температуре обработки на воздухе в диапазоне  $600\text{--}900^{\circ}\text{C}$  образуются частицы  $\text{CoFe}_2\text{O}_4$  с характерной кубической симметрией со структурой шпинели.



Область исследования	SiO <sub>2</sub>	Fe	Co	Область исследования	SiO <sub>2</sub>	Fe	Co
1	79,5	16,1	4,5	1	–	80,1	19,9
2	80,2	15,2	4,7	2	71,1	21,5	7,4
3	100	–	–				
4	100	–	–				

Рисунок 3 – СЭМ-изображение и элементный анализ поверхности золь-гель пленок, содержащих соединения  $Fe_xCo_yO_z - SiO_2$ , отожженных при температуре 750 °С

### Литература

1. Kraus, W. POWDER CELL a Program for the Representation and Manipulation of Crystal Structures and Calculation of the Resulting X-ray Powder Patterns / W. Kraus, G. Nolze // *Hi. Appl. Cryst.* – 1996. – № 29. – P. 301–303.
2. Azadmanjiri, J. Preparation and electromagnetic properties of  $Ni_{1-x}Cu_xFe_2O_4$  nanoparticle ferrites by sol-gel auto-combustion method / J. Azadmanjiri, U. K. Salehani, M.R. Barati, F. Farzan // *Materials Letters.* – 2007. – Vol. 61. – P. 84–87.
3. Shifeng, Y. Rapid synthesis of  $Mn_{0.65}Zn_{0.35}Fe_2O_4/SiO_2$  homogeneous nanocomposites by modified sol-gel auto-combustion method / Y. Shifeng, W. Ling, L. Zhou // *Journal of Crystal Growth.* – 2004. – Vol. 273. – P. 226–233.
4. Синицына, О. Анализ и распознавание графической информации в наноскопии / О. Синицына, А. Филонов, И. Яминский // *Наноиндустрия.* – 2009. – № 3. – С. 14–20.

Е.Л. Тихова, В.И. Кондратенко

УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Беларусь

## ОСОБЕННОСТИ ФОТОМЕТРИЧЕСКОГО КОНТРОЛЯ

Фотометрические системы контроля шероховатости технологических поверхностей привлекательны с технической точки зрения ввиду ряда особенностей. Такими особенностями является, в первую очередь, неразрушающий характер и оперативность получения информации, особенно при применении разновидностей фотометрического контроля, базирующихся на применении интегральных характеристик рассеянного излучения для определения статистических свойств поверхности [1]. Кроме того, характер контроля приобретает планарность, т.е. позволяет контролировать не сечение образца, а весь образец в целом. Наиболее перспективным является метод, основанный на измерении отношения интенсивности диффузной компоненты рассеянной световой волны  $I_d$  к интенсивности зеркальной компоненты  $I_z$ :

$$TIS = I_d / I_z .$$

Данный параметр не зависит от коэффициента отражения и определяется исключительно профилем рассеивающей поверхности. При использовании в качестве зондирующего светового пучка лазерного излучения зеркальную компоненту можно рассматривать как нулевую пространственную частоту в спектре рассеянного излучения (в схеме с почти нормальным падением). Однако, поскольку сечение зондирующего пучка ограничено, он обладает определенной угловой расходимостью в области главного лепестка, и поэтому при измерении производится интегрирование рассеянного излучения в области  $\delta\Omega$ , близкой к нулевой частоте, т. е.:

$$TIS = \frac{\int |G(\varphi)|^2 d\varphi - \int_{\delta\Omega} |G(\varphi)|^2 d\varphi}{\int_{\delta\Omega} |G(\varphi)|^2 d\varphi} ,$$

где угловое распределение рассеянного светового поля  $G(\varphi)$  (включающее зеркальную компоненту), в силу дуализма пространственных частот, совпадает в определенной области с пространственно-частотным  $G(\omega)$ . Это позволяет применить к изучению рассеяния аппарат Фурье-анализа. Однако, как показано в работе [2], в формировании зеркальной компоненты принимают

участие пространственные частоты функции распределения профиля поверхности выше  $k = 2\pi/\lambda$ , где  $\lambda$  – длина волны зондирующего излучения. Данное обстоятельство требует знания характера статистики распределения неоднородностей для проведения экстраполяции спектра пространственных частот в высокочастотную область.

В применяемых методиках оптического контроля, как правило, определение параметров шероховатости производится в предположении о Гауссовом характере статистики распределения неоднородностей поверхности. Однако данное предположение, выдвинутое априорно, может служить источником весьма существенной погрешности, что требует калибровки измерительных систем на основании применения эталонных образцов. Однако и в этом случае вопрос о справедливости использования той либо иной статистики остается открытым ввиду наличия частотного ограничения у любого измерительного (в том числе – и щупового) прибора и, как следствие, необходимости процедуры экстраполяции. В то же время, как следует из исследований последних лет, нормальное распределение является скорее исключением, чем правилом, и ограничено применимо только к узкому классу аморфных объектов, в то время как для кристаллических и поликристаллических структур естественной является статистика Пуассона ввиду дискретности структуры вещества и, как следствие – счетности числа возможных направлений скола поверхности при обработке, а также дискретности размеров скола. Спад спектральной кривой для статистики Пуассона имеет гиперболический характер в отличие от экспоненциального характера при нормальном распределении. Как следствие, при пуассоновской статистике поверхности вклад в зеркальную компоненту при одинаковых среднеквадратичных отклонениях от линии профиля  $\sigma$  оказывается значительно более существенным, чем при нормальной статистике, и наоборот – вклад в диффузную компоненту рассеянного излучения оказывается заниженным, что может приводить к существенным погрешностям при необоснованном использовании типа статистики. Погрешность имеет случайный характер, асимптотически стремится к нулю при стремлении автокорреляционной длины профиля  $L$  к нулю (гипотетический случай) и к бесконечности (сверхгладкие поверхности).

В настоящей работе предпринята попытка экспериментального анализа статистики рассеивающей поверхности на основании исследования индикатрисы светорассеяния. Исследование

проводилось на стеклянных образцах. Ввиду аморфности материала можно было ожидать, что статистика светорассеяния будет максимально приближена к нормальной, и кривая распределения интенсивности в спектре пространственных частот рассеянного излучения будет иметь Гауссов характер, так как коэффициенты разложения гауссовского процесса по ортонормированной системе, которой является преобразование Фурье, являются совместно нормальными случайными величинами. В то же время для дискретной структуры, каковой является в принципе любое твердое тело разумно предположить, что угол наклона каждой микрограницы изменяется скачком с каждым изменением некоторого процесса Пуассона со средней скоростью отсчетов  $\alpha$ . Будем также полагать, что между изменениями угол наклона микрограниц постоянен и принимает непрерывно распределенное значение с математическим ожиданием  $\xi$  и дисперсией  $\sigma^2$ . Такой процесс эргодичен и стационарен, и для него автокорреляционная функция будет иметь вид

$$R(\tau) = \xi^2 + \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|},$$

а спектральное распределение запишется следующим образом

$$\Phi(\omega) = 2\pi\xi^2\delta(\omega) + \frac{2\alpha\sigma^2}{\omega^2 + \alpha^2}.$$

В силу изотропности материала образца следует положить математическое ожидание угла наклона микрограней равным нулю, и тогда в спектральном распределении остается только второй член, представляющий собой Лоренцев контур. Математическая обработка экспериментально полученной кривой заключалась в переходе от углового распределения светового поля к распределению в спектре мощности в соответствии с равенством

$$\omega = \kappa \sin \varphi$$

и последующей аппроксимации спектральной зависимости гауссианой, Лоренцевым контуром и их суперпозицией:

$$\frac{I(\omega)}{I_{\max}} = \frac{A}{1 + B\omega^2} + (1 - A)\exp(-C\omega^2).$$

В качестве критерия соответствия рассматривалась дисперсия адекватности. Построение регрессионной модели осуществлялось методами пошаговой оптимизации. Параметром оптимизации являлась остаточная дисперсия. Поскольку регрессионная модель содержала не более трех параметров, применялся простейший покоординатный пошаговый поиск с постоянным шагом и изменением шага в окрестности точки экстремума. Применение данного метода основывалось на предварительном анализе поведения

поверхности отклика. Поскольку нас интересовал глобальный экстремум, предварительно функция отклика была исследована на наличие локальных экстремумов путем построения сечений. Анализ подтвердил их наличие и позволил определить начальные условия для процедуры оптимизации. Также статистической проверке было подвергнуто априорно постулируемое предположение о квадратичной зависимости спектральной кривой от пространственной частоты, которое выдвигалось в качестве нулевой гипотезы. Регистрация индикатрисы светорассеяния проводилась с шагом в один градус и, соответственно, оптимизация проводилась по 90 экспериментальным точкам. Результаты аппроксимации показали, что в области низких пространственных частот, что отвечает крупномасштабным неоднородностям, кривая распределения очень хорошо описывается гауссианой, однако в области высоких пространственных частот начиная с  $\sim 0,4k$  различие становится существенным. Лоренцев контур дает заниженные значения в области низких пространственных частот и существенно завышенные – в области высоких пространственных частот и в целом представляет менее удовлетворительную аппроксимацию. Это нашло свое численное выражение в значении остаточной дисперсии, которая для случая аппроксимации гауссовым распределением составила  $\sim 6,3 \%$ , а в приближении пуассоновского процесса  $\sim 14,4 \%$ . Данное различие статистически значимо и подтверждает первоначальное предположение о нормальном распределении неоднородностей, если в качестве альтернативной гипотезы выбирается предположение о пуассоновской статистике. Однако наибольшее соответствие было достигнуто при использовании суперпозиции обеих зависимостей. В этом случае качественное совпадение наблюдается во всем доступном анализу диапазоне пространственных частот, а остаточная дисперсия составляет  $0,29 \%$ , что более чем на порядок лучше результата аппроксимации гауссианой. Вклад составляющих характеризуется весовыми коэффициентами, которые в рассмотренном эксперименте составили соответственно  $62,6 \%$  для Гауссовой и  $37,4 \%$  для Пуассоновской составляющих. Таким образом, показано, что статистика распределения неоднородностей с большой достоверностью может быть представлена в виде суперпозиции гауссова и пуассоновского процессов, что согласуется с априорными представлениями о формировании профиля рассеивающей поверхности.

## Литература

1. Фотометрический контроль шероховатости и дефектности / Н.И. Алешкевич, В.И. Кондратенко, В.В. Сытько, В.П. Трушко. – Минск: БелНИИ НТИ, 1989. – 48 с.

2. Кондратенко, В.И. Фотометрический контроль состояния поверхности / В.И. Кондратенко, В.В. Сытько, Д.С. Умрейко // Известия Белорусской инженерной академии. – 1999. – № 1 (7). – С. 42–45.

**А.А. Хмыль<sup>1</sup>, Н.Н. Федосенко<sup>2</sup>, В.Г. Шолох<sup>2</sup>, А.Н. Купо<sup>2</sup>**

**<sup>1</sup>УО «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», Беларусь**

**<sup>2</sup>УО «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», Беларусь**

## **ЛАЗЕРНОЕ ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОЕ ОСАЖДЕНИЕ СЕРЕБРА НА МЕДНЫЕ ПОДЛОЖКИ**

Метод лазерного электрохимического осаждения является одним из наиболее перспективных для разработки технологий формирования микроэлектронных устройств [1]. Основные его преимущества заключаются в локальности воздействия. Селективность лазерного электрохимического осаждения позволяет применять этот метод в процессах локального безмасочного осаждения и травления токопроводящих элементов печатных плат, селективного формирования контактных площадок микросхем. Воздействие лазерного излучения в процессе осаждения покрытия может существенно изменить его свойства. Поэтому основной задачей исследования является изучение влияния лазерного излучения на свойства электрохимического покрытия.

В работе использовался лазер LS-2137U на алюмо-иттриевом гранате, работающий в импульсном режиме, длина волны излучения 532 нм. При формировании серебряных покрытий на меди использовался ферроцианидный электролит серебрения [2]. Образцы электрохимических серебряных покрытий на меди были получены при следующих значениях технологических параметров: энергия лазерного излучения в импульсе составляла 448 мДж, длительность импульса –  $6 \cdot 10^{-9}$  с, частота следования импульсов – 10 Гц, напряжение на электродах – 4 В. Исследования проводились в диапазоне от 200 до 400 импульсов.



Чтобы проанализировать возможность протекания фотохимических реакций в электролите, при воздействии лазерного излучения, были зарегистрированы спектры поглощения в видимой области спектра исходного электролита и электролита, подвергнувшегося воздействию лазерного излучения в процессе электрохимического осаждения. Спектры поглощения, представленные на рисунке 1, были зарегистрированы на спектрофотометре СФ-46 в пределах длин волн от 420 до 800 нм: (1) – исходный ферроцианидный электролит; (2) – электролит после воздействия на него 200 импульсов лазерного излучения; (3) – электролит после воздействия на него 400 импульсов лазерного излучения.

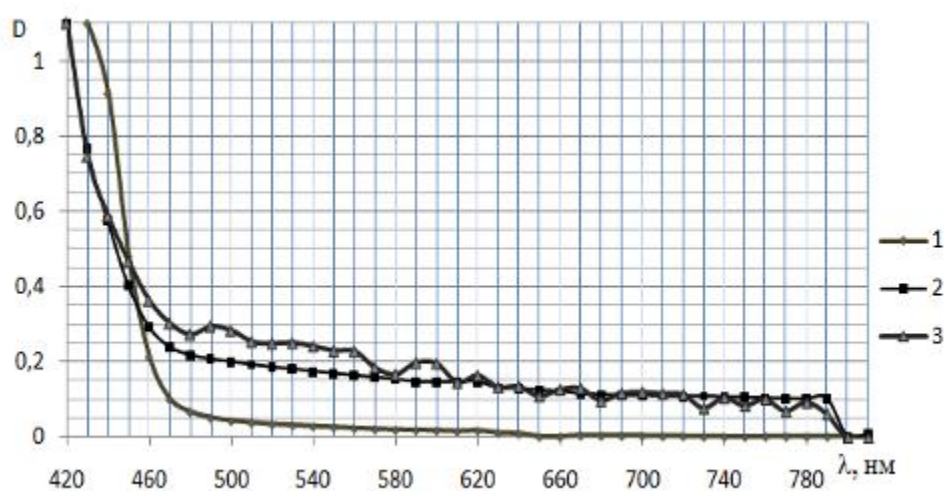


Рисунок 1 – Спектр поглощения ферроцианидного электролита

Из приведённых зависимостей оптической плотности от длины волны следует, что поглощательная способность используемого электролита возрастает при увеличении времени лазерного воздействия. Этот факт свидетельствует о том, что в процессе электрохимического осаждения при лазерном воздействии в электролите протекают фотохимические процессы, приводящие к диссоциации цианидных комплексов и, как следствие, к увеличению концентрации ионов серебра [2].

Таблица 1 – Статистические величины кристаллитов серебряного покрытия на медной подложке

Статистические величины	Воздействие 200 импульсов лазерного излучения		Воздействие 400 импульсов лазерного излучения	
	Вне зоны ЛО	В зоне ЛО	Вне зоны ЛО	В зоне ЛО

Максимальная высота (нм)	477,6	395,3	492,9	228,1
Средняя высота (нм)	293,2	219,6	228,4	88,6
Угол $\theta$ (°)	3,2	1,4	2,6	1,3

Методом атомно-силовой микроскопии исследована структура поверхности полученных серебряных осадков. Из данных, приведенных в таблице 1, видно, что максимальная и средняя высота шероховатости поверхности серебряного покрытия, полученного при воздействии от 200 до 400 импульсов лазерного излучения в зоне локального осадка (ЛО) меньше, чем в области электрохимического фона. Угол  $\theta$  между перпендикуляром, проведённым к поверхности покрытия, и нормалью к грани кристаллита за пределами локального осадка больше, чем в его пределах. Среднеквадратичное значение неровности высоты в зоне локального осадка ниже, чем за его пределами.

Приведенные данные показывают, что кристаллическая структура серебряного покрытия, полученного при воздействии большего количества импульсов лазерного излучения, в зоне локального осадка характеризуется улучшенными параметрами по сравнению с покрытиями, полученными при воздействии 200 импульсов лазерного излучения.

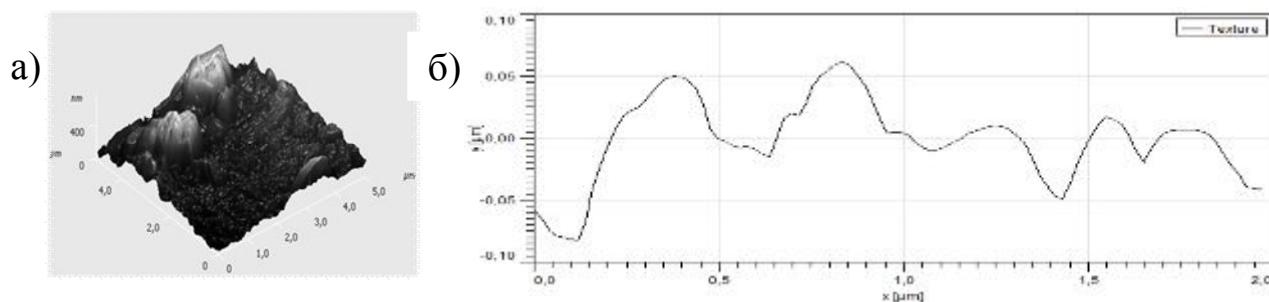


Рисунок 2 – Трёхмерное изображение (а) и профиль поверхности (б) покрытия серебра в зоне локального осадка (400 импульсов)

На рисунках 2 и 3 приведены профили поверхности и трёхмерное изображение покрытия серебра вне и в зоне локального осадка, полученного при воздействии 400 импульсов.

Из рисунка 2 видно, что в зоне локального осадка кристаллиты расположены плотнее и имеют более равномерную сглаженную форму, чем за его пределами (рисунок 3). Это свидетельствует о том, что покрытие в зоне локального осадка имеет более плотноупакованную поликристаллическую структуру, что должно обеспечивать увеличение проводимости и улучшение триботехнических характеристик. Ла-

зерная стимуляция в процессе электрохимического осаждения обеспечивает условия формирования покрытия с более совершенной структурой.

В зависимости от длительности воздействия лазерного излучения наблюдаются некоторые отличия в структуре серебряных покрытий, т. е. при увеличении времени осаждения электрофизические характеристики осадков улучшаются.

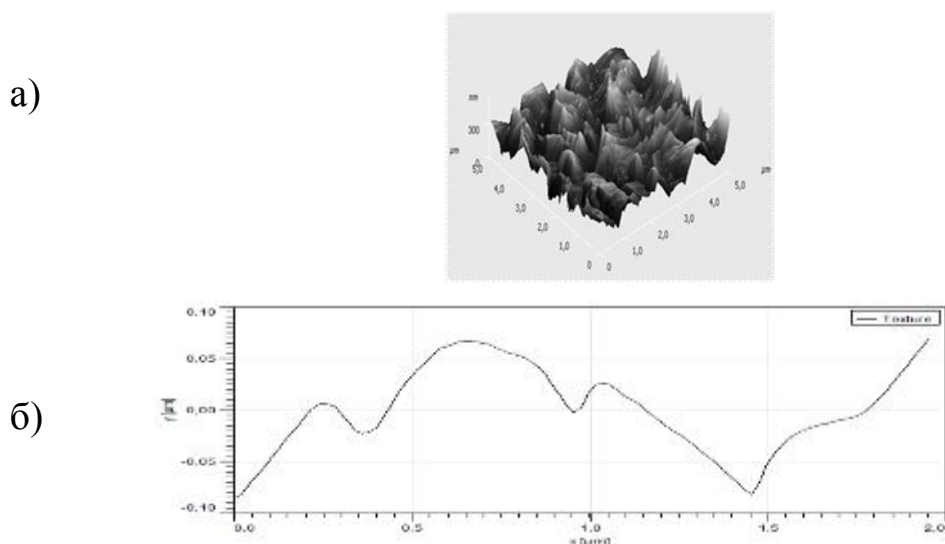


Рисунок 3 – Трёхмерное изображение (а) и профиль поверхности (б) серебряного покрытия вне зоны локального осадка (400 импульсов)

Исследована микротвёрдость указанных электрохимических покрытий, полученных при 200 и 400 импульсах лазерного излучения, значения которой в зоне локального осадка составили 0,18 ГПа и 0,21 ГПа, а вне зоны – 0,15 ГПа и 0,18 ГПа. Показано, что микротвёрдость электрохимических покрытий в зоне локального осадка выше, чем за его пределами независимо от времени лазерного воздействия, что согласуется с результатами исследования топологии.

Полученные данные подтверждают изложенные выше предположения о том, что воздействие лазерного излучения обуславливает формирование более плотной поликристаллической структуры, обеспечивая более высокие механические и электрические свойства осадков серебра на медных подложках.

### Литература

1. Хмыль, А.А. Влияние лазерного излучения при локальном формировании тонких плёнок электрохимическим методом / А.А. Хмыль,

В.А. Емельянов, А.В. Шапчиц, В.Г. Шолох, Н.Н. Федосенко // Журнал прикладной спектроскопии. – 1996. – Т. 63, № 3. – С. 506–509.

2. Рогачев, А.В. Влияние лазерного излучения на спектральные свойства цианидного электролита серебрения. / А.В. Рогачев, Н.Н. Федосенко, В.Г. Шолох, А.Н. Купо // Сб. научн. трудов IV междунар. науч.-техн. конф. «Материалы, технол. и обор. в производстве, ремонте и модерн. машин». – Новополоцк: УО «ПГУ», 2007. – Т. 1. – С. 67–69.

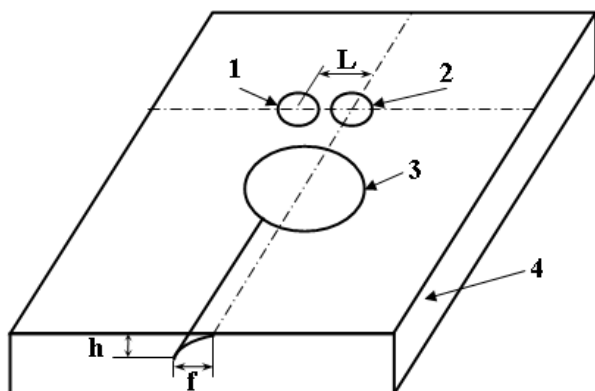
**С.В. Шалупаев, Ю.В. Никитюк, А.А. Серeda, В.В. Свиридова**

**УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Беларусь**

## **ДВУЛУЧЕВОЙ ЛАЗЕРНЫЙ МЕТОД ФОРМИРОВАНИЯ СКРУГЛЕННЫХ КРОМОК В СТЕКЛОИЗДЕЛИЯХ**

Наиболее эффективным способом разделения хрупких неметаллических материалов в настоящее время является метод управляемого лазерного термораскалывания. Сущность его заключается в локальном поверхностном нагреве материала лазерным излучением с последующим резким охлаждением зоны нагрева хладагентом. В результате в области подачи хладагента образуется трещина, следующая за лазерным пучком. Этой тематике посвящен ряд работ [1–7]. В результате исследований по данной тематике был разработан целый ряд методов прецизионной лазерной обработки хрупких неметаллических материалов, одним из которых является метод асимметричного лазерного термораскалывания. Данный метод позволяет получить наклонную трещину со скругленными кромками. Различные варианты реализации данного метода предложены авторами в работе [3]. В этой работе для формирования асимметричного распределения термоупругих полей в образцах из силикатных стекол использовано воздействие лазерного излучения с длиной волны 10,6 мкм, поглощаемое в тонких поверхностных слоях обрабатываемого материала. В одном случае асимметричность распределения достигается за счет нагрева поверхности материала эллиптическим лазерным пучком, ориентированным под углом к направлению относительного перемещения, а во втором асимметричность распределения достигается за счет смещения хладагента относительно линии воздействия лазерного излучения. В пред-

ставленной работе авторами проведены исследования процесса получения скругленных кромок стеклоизделий с использованием двух лазерных пучков с различными длинами волн 10,6 мкм и 1,06 мкм [4–5].



1 – YAG-лазер; 2 – CO<sub>2</sub>-лазер;  
3 – хладагент; 4 – стеклянная  
пластина

Рисунок 1 – Схема расположения лазерных пучков и хладагента

На рисунке 1 представлена схема взаимного расположения лазерных пучков и хладагента на поверхности обрабатываемого материала. Выполнены экспериментальные исследования зависимости глубины  $h$  и отклонения  $f$  трещины от линии обработки при различных значениях взаимного смещения лазерных пучков  $L$  и скоростях обработки  $v$ . Экспериментальные исследования были выполнены на лазерном технологическом комплексе, в состав которого входят два лазера с различной длиной излучения.

Обрабатываемая стеклянная пластина толщиной 4 мм перемещается координатным столом относительно неподвижных лазерных пучков и хладагента. Пучок CO<sub>2</sub>-лазера с длиной волны  $\lambda = 10,6$  мкм формировали на поверхности в виде круга диаметром 3 мм, пучок YAG-лазера с длиной волны  $\lambda = 1,06$  мкм в виде круга диаметром 2 мм, хладагент подавали на поверхность в виде мелкодисперсной воздушно-водяной смеси диаметром 5 мм. При этом пучок CO<sub>2</sub>-лазера и хладагент на поверхности обрабатываемой пластины располагали на линии обработки, расстояние между их центрами составляло 4 мм. Центр пучка YAG-лазера смещали относительно центра пучка CO<sub>2</sub>-лазера вдоль линии перпендикулярной линии обработки. Расстояние  $L$  между центрами лазерных пучков изменяли от 0 до 2 мм. Мощность лазерных пучков  $P_1 = 30$  Вт для CO<sub>2</sub>-лазера и  $P_2 = 100$  Вт для YAG-лазера. Оба лазера работают в непрерывном режиме.

На рисунке 2 представлены экспериментальные зависимости глубины трещины  $h$  и экспериментальные зависимости отклонения трещины  $f$  при различных скоростях обработки для величин смещения YAG-лазера  $L$  равных 0,5 мм, 1 мм и 1,5 мм.

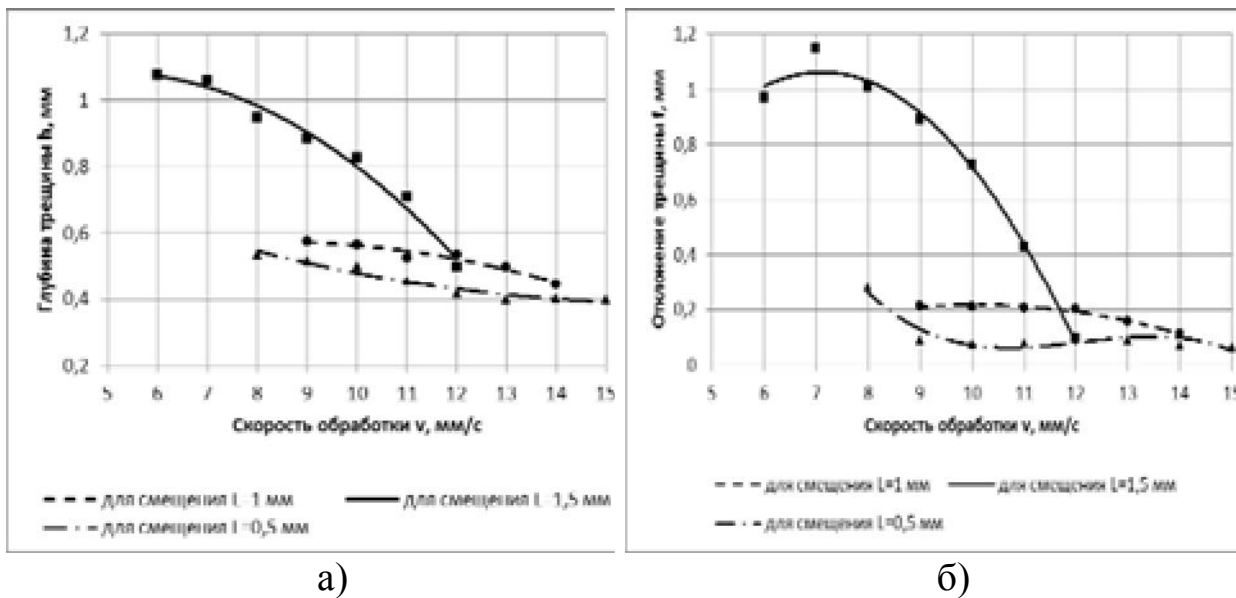


Рисунок 2 – Экспериментальная зависимость глубины (а) и отклонения трещины (б) для величины смещения лазерных пучков  $L = 0,5-1,5$  мм

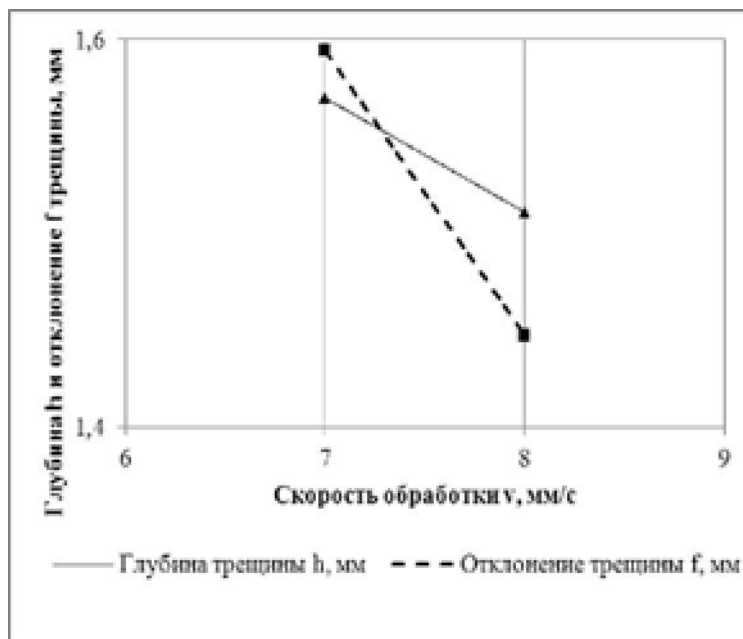
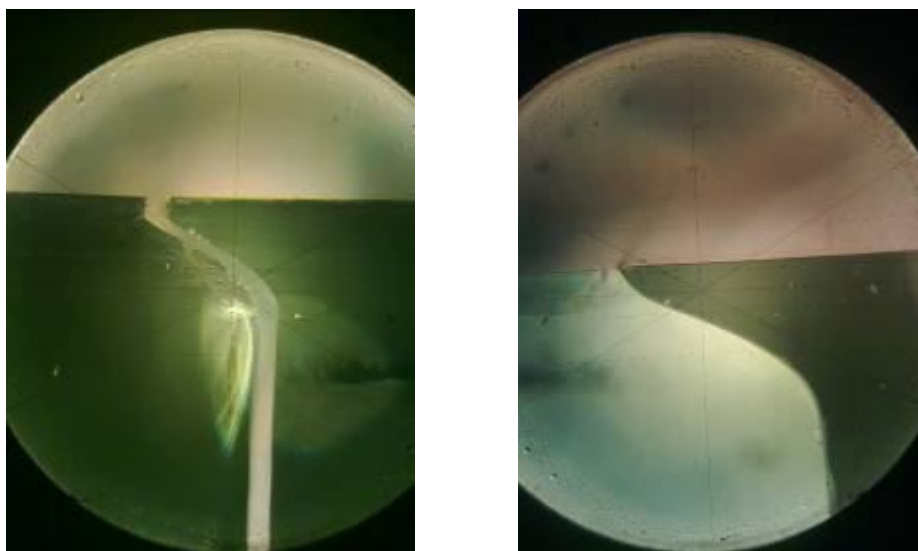


Рисунок 3 – Экспериментальная зависимость глубины и отклонения трещины для величины смещения лазерных пучков  $L = 2$  мм  
 На рисунке 3 аналогичные зависимости для величины смещения YAG-лазера  $L$  равном 2 мм.

Для каждой выбранной скорости обработки были получены несколько образцов, по каждому образцу получены значения глубин и отклонений трещин и выведено среднее их значение. Зарождение трещины происходит на поверхности обрабатываемого материала в области подачи хладагента на линии воздействия пучка  $CO_2$ -лазера. Далее трещина распространяется вглубь материала, при этом откло-

няясь в сторону линии воздействия пучка YAG-лазера, и на различной для каждого режима обработки глубине прекращает свое развитие. Окончательное разделение можно выполнить путем докальвания (механического, термического, ультразвукового). Профиль торцов разделенного образца представлен на рисунке 4.



а) а) – для параметров обработки  $v = 8$  мм/с,  $L = 1,5$  мм  
б) б) для параметров обработки  $v = 7$  мм/с,  $L = 2$  мм

Рисунок 4 – Профиль торцов разделенного образца

Видно, что на торце одной части разделенного образца образуется фаска, а на торце другой части выступ. Из анализа представленных на рисунках 1–3 зависимостей видно, что с увеличением скорости обработки наблюдается общее уменьшение глубины трещины и величины ее отклонения от линии обработки. При этом диапазон скоростей, для которых наблюдается устойчивое зарождение и развитие трещины, отличается для различных величин смещения  $L$  пучка YAG-лазера от линии обработки. Так, для смещения  $L = 0,5$  мм этот диапазон для заданных параметров лазерных пучков лежит в пределах от 9 до 20 мм/с. С увеличением скорости наблюдается уменьшение глубины трещины, при этом отклонение трещины от линии воздействия пучком CO<sub>2</sub>-лазера остается практически неизменным. На скорости 8 мм/с трещина развивается на всю толщину образца, т. е. наблюдается процесс сквозного термораскалывания, а отклонение трещины значительно увеличивается. При меньших скоростях в области воздействия пучком CO<sub>2</sub>-лазера температура на поверхности превышает температуру стеклования, и при последующем охлаждении на поверхности

образуется сетка микротрещин и развития трещины не наблюдается. На скоростях более 20 мм/с отсутствует зарождение трещины. Следует отметить, что для данного смещения  $L$  на скоростях 9 и 10 мм/с профиль трещины получается отличным от общего вида, представленного на рисунке 4. Как видно из рисунка 5, зарождение трещины происходит на поверхности образца на линии воздействия пучка  $\text{CO}_2$ -лазера, затем трещина развивается вглубь, отклоняясь в сторону линии воздействия  $\text{YAG}$ -лазера. Однако на некоторой глубине трещина вновь отклоняется в сторону линии воздействия пучка  $\text{CO}_2$ -лазера, образуя своеобразную «волну».

Для смещения  $L = 1$  мм диапазон скоростей, при котором наблюдается устойчивое зарождение и развитие наклонной трещины, составляет 9–14 мм/с.

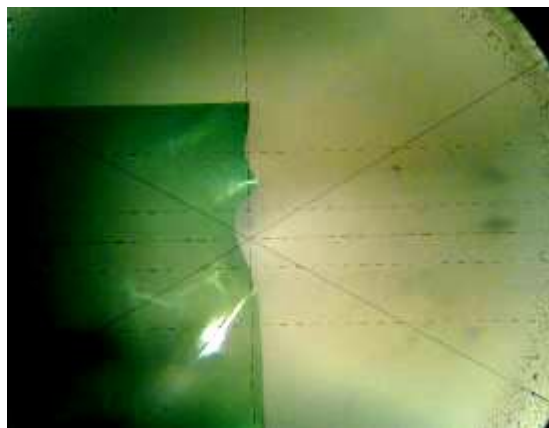


Рисунок 5 – Вид «волнообразной» трещины

Для  $L = 1,5$  мм – 7–11 мм/с. При этом на скорости обработки 6 мм/с также еще наблюдается устойчивое развитие наклонной трещины, однако на поверхности вследствие перегрева образуется сетка микротрещин, что приводит к снижению величины отклонения трещины. Для скорости обработки 12 мм/с влияние  $\text{YAG}$ -лазера перестает быть ощутимым, и образующаяся на линии воздействия пучка  $\text{CO}_2$ -лазера трещина развивается вглубь практически перпендикулярно поверхности. Для смещения  $L = 2$  мм диапазон скоростей оказался достаточно узким – от 7 до 8 мм/с. При этом величины отклонения и глубины трещины оказываются наибольшими.

Таким образом, на основе полученных результатов можно сделать вывод, что предложенный метод двулучевого асимметричного лазерного термораскалывания позволяет эффективно получать изделия из силикатных стекол со скругленными кромками. При этом параметры



скругленных кромок можно задавать, варьируя технологические режимы обработки.

Следует отметить еще один положительный эффект, полученный в ходе исследований. Для измерения глубины  $h$  и отклонения  $f$  после получения наклонной трещины, перед докалыванием образца, наносилась еще одна трещина, перпендикулярная линии обработки с использованием только пучка  $\text{CO}_2$ -лазера и хладагента. Трещину наносили в соответствии с рисунком 1 справа налево. От основания выступа наклонной трещины наблюдается устойчивое зарождение и развитие трещины параллельной поверхности обрабатываемого материала, т. е. осуществляется процесс параллельного лазерного термораскалывания. Появление параллельной трещины наблюдается при отклонениях наклонной трещины  $f$  свыше 0,6 мм для относительного смещения лазерных пучков  $L$  равных 1,5 и 2 мм. При этом зарождение параллельной трещины происходит точно в основании выступа. Таким образом, регулируя отклонение и глубину наклонной трещины, можно зарожать параллельную трещину на заданной глубине.

### Литература

1. Lumley, R.M. Controlled separation of brittle materials used a laser / R.M. Lumley // J. Of the Amer. Cer. Soc. – 1968. – Vol. 49, № 9. – P. 850–854.
2. Мачулка, Г.А. Лазерная обработка стекла / Г.А. Мачулка. – М.: Сов. радио, 1979. – 136 с.
3. Способ резки неметаллических материалов: пат. 2024441 РФ, МКИ 5 C03B33/02 / В.С. Кондратенко; заявитель В.С. Кондратенко; заявл. 04.02.92; опубл. 12.15.94
4. Двухлучевое лазерное термораскалывание хрупких неметаллических материалов / С.В. Шалупаев, Е.Б. Шершнева, Ю.В. Никитюк, А.А. Середа // Оптический журнал. – 2005. – Т. 73, № 5. – С. 62–66.
5. Шалупаев, С.В. Лазерное термораскалывание хрупких неметаллических материалов по замкнутым криволинейным контурам / С.В. Шалупаев, Ю.В. Никитюк, А.А. Середа // Оптический журнал. – 2008. – Т. 75, № 2. – С. 11–15.
6. Увеличение эффективности управляемого лазерного термораскалывания диэлектрических материалов / В. К. Сысоев [и др.] // Оптический журнал. – 2004. – Т. 71, № 2. – С. 65–69.
7. Jiao, J. Cutting glass substrates with dual-laser beams / J. Jiao, X. Wang // Optics and Lasers in Engineering. – 2009. – Vol. 47. – P. 860–864.

**Е.Б. Шершнев, Ю.В. Никитюк, В.Ф. Шолох, С.И. Соколов**

**УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Беларусь**

## **ЛАЗЕРНОЕ УПРАВЛЯЕМОЕ ТЕРМОРАСКАЛЫВАНИЕ КРИСТАЛЛИЧЕСКОГО КВАРЦА**

Широкое использование кристаллического кварца в современной электронной промышленности [1] выводит на первый план задачи, связанные с поиском эффективных технологий его обработки. Одной из таких задач является задача разделения монокристаллов кварца на пластинки заданных размеров. Используемые для ее решения механические способы резки кристаллических материалов, технология применения которых, как правило, требует учета анизотропии только упругих свойств материала, обладают рядом недостатков: невысокая точность, низкое качество поверхностей разделения, необходимость дополнительной обработки поверхностей среза. В связи с этим в последнее время для разделения монокристаллов кварца на пластинки заданных размеров применяется лазерное термораскалывание [2]. Однако задачи лазерного термораскалывания требуют принципиального учета не только анизотропии упругих свойств материала, но и анизотропии его тепловых свойств.

Как известно, кристаллический кварц обладает сильно выраженной анизотропией тепловых и упругих свойств. Так, коэффициент линейного термического расширения вдоль оси симметрии третьего порядка и в направлениях, перпендикулярных ей, отличаются в 1,6 раза. Аналогичное отношение коэффициентов теплопроводности равно 1,8 [3]. Существенное отличие указанных параметров приводит к тому, что при разделении кристаллического кварца в различных направлениях методом лазерного термораскалывания необходимо осуществлять дифференцированный нагрев, обеспечивающий формирование термоупругих напряжений, необходимых для образования лазерно-индуцированной трещины. Так как при лазерном термораскалывании определяющее влияние на формирование лазерно-индуцированной трещины оказывают напряжения, действующие перпендикулярно плоскости разделения, а величина этих напряжений пропорциональна линейному коэффициенту термического расширения в том же направлении, то при формировании трещины в плоско-

сти XZ необходимо рассматривать напряжения  $\sigma_y$ , при формировании трещины в плоскости XY необходимо рассматривать напряжения  $\sigma_z$ , при формировании трещины в плоскости ZY необходимо рассматривать напряжения  $\sigma_x$  (см. рисунок 1). На рисунке 1 ось Z параллельна оси симметрии третьего порядка C.

Величина термоупругих напряжений, возникающих при изменении температуры в твердом теле, прямо пропорциональна произведению соответствующего коэффициента линейного термического расширения на величину изменения температуры. В свою очередь максимальные значения температуры в зоне лазерной обработки  $T_{\max}$  обратно пропорциональны теплопроводности материала. При этом, в случае реализации лазерного термораскалывания таких анизотропных материалов, как кристаллический кварц, наиболее существенный вклад в изменение  $T_{\max}$  оказывает величина коэффициента теплопроводности в направлении, перпендикулярном плоскости обработки. Таким образом, при формировании трещины перпендикулярной плоскости YZ необходимо учитывать коэффициент теплопроводности  $\lambda_x$ , при формировании трещины перпендикулярной плоскости XY необходимо учитывать коэффициент теплопроводности  $\lambda_z$ , при формировании трещины перпендикулярной плоскости XZ необходимо учитывать коэффициент теплопроводности  $\lambda_y$  (см. рисунок 1).

Максимальные значения температуры в зоне лазерной обработки  $T_{\max}$  обратно пропорциональны скорости относительного перемещения лазерного пучка и материала  $v$  и прямо пропорциональны мощности лазерного излучения  $P$ .

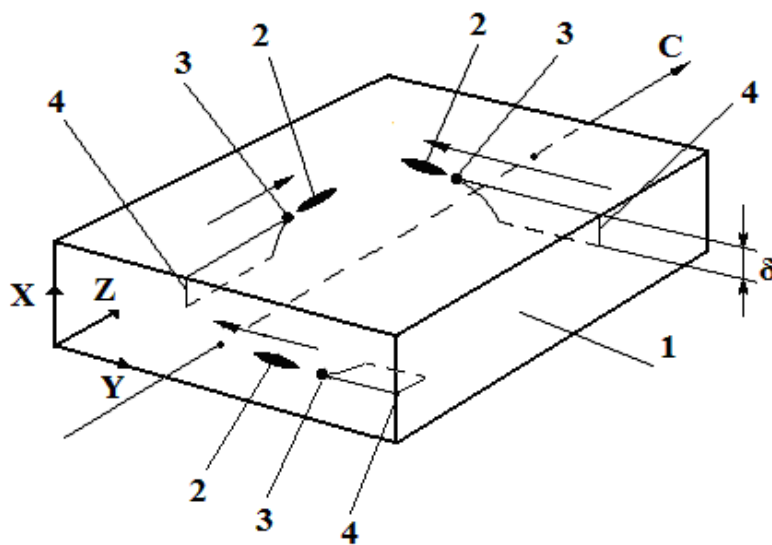


Рисунок 1 – Схема формирования лазерно-индуцированной трещины в кристаллическом кварце: 1 – материал; 2 – зона нагрева;

3 – зона охлаждения; 4 – трещина

Таким образом, для оценки технологических параметров лазерного термораскалывания можно использовать простые соотношения, приведенные для трех основных вариантов резки:

1) случай лазерного термораскалывания кристаллического кварца вдоль оси симметрии третьего порядка, при этом линия реза лежит в плоскости параллельной оси симметрии третьего порядка:

$$\frac{v}{P} = k \cdot \frac{\alpha_y}{\lambda_x} = k \cdot \frac{\alpha_+}{\lambda_+}, \quad (1)$$

2) случай лазерного термораскалывания кристаллического кварца перпендикулярно оси симметрии третьего порядка, при этом линия реза лежит в плоскости параллельной оси симметрии третьего порядка:

$$\frac{v}{P} = k \cdot \frac{\alpha_z}{\lambda_x} = k \cdot \frac{\alpha_{\parallel}}{\lambda_+}, \quad (2)$$

3) случай лазерного термораскалывания кристаллического кварца перпендикулярно оси симметрии третьего порядка, при этом линия реза лежит в плоскости перпендикулярной оси симметрии третьего порядка:

$$\frac{v}{P} = k \cdot \frac{\alpha_x}{\lambda_z} = k \cdot \frac{\alpha_+}{\lambda_{\parallel}}. \quad (3)$$

Коэффициенты линейного термического расширения и теплопроводности кристаллического кварца вдоль оси симметрии третьего порядка и перпендикулярно ей:  $\alpha_{\parallel} = 9 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ,  $\alpha_+ = 14,8 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$  и  $\lambda_{\parallel} = 12,3 \text{ Вт/мК}$ ,  $\lambda_+ = 6,8 \text{ Вт/мК}$  [3].

Для проверки предложенных соотношений были проведены расчеты методом конечных элементов для трех перечисленных выше случаев обработки кристаллического кварца. При расчетах использовались следующие параметры лазерного термораскалывания: мощность лазерного излучения – 30 Вт; радиус лазерного пятна – 1,5 мм; скорость относительного перемещения лазерного пучка и материала – 15 мм/с. Результаты численных расчетов показали, что при выбранных расчетных параметрах максимальные растягивающие напряжения равнялись: 86,8 МПа в случае 1), 46,1 МПа в случае 2) и 55,5 МПа в случае 3).



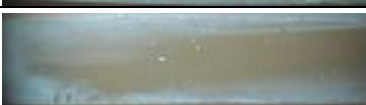
Таким образом, при мощности лазерного излучения равной 30 Вт при скорости  $v=15$  мм/с в первом случае будет формироваться лазерно-индуцированная трещина. Для реализации процесса лазерного

термораскалывания во втором и в третьем случае скорость  $v$  должна равняться 8,7 мм/с и 7,9 мм/с соответственно.

Были проведены экспериментальные исследования процессов лазерного термораскалывания кристаллов кварца. В качестве материала использовались пластины кристаллического кварца размерами 20x10x1,5 мм. Мощность лазерного излучения составляла 30 Вт, пучок был сфокусирован в виде круглого пятна радиусом 1,5 мм. В качестве средства перемещения был использован двухкоординатный стол с ходом перемещения 500×500 мм, обеспечивающий скорость перемещения в диапазоне от 0 до 100 мм/с. Для резки был использован CO<sub>2</sub> – лазер с длиной волны излучения 10,6 мкм и с регулируемой мощностью от 0 до 80 Вт.

Результаты эксперимента отражены в таблице 1.

Таблица 1 – Результаты лазерного термораскалывания кристаллического кварца

Ориентация реза \ V, мм/с	6	15
1		
2		Нет реза
3		Нет реза

В соответствие с полученными экспериментальными данными при одинаковых параметрах обработки лазерное термораскалывание более устойчиво протекает в случае, когда линия реза лежит в плоскости, параллельной оси симметрии третьего порядка, что находится в хорошем соответствии с результатами численного моделирования и подтверждает справедливость предлагаемых критериев.

### Литература

1. Справочник по кварцевым резонаторам / под ред. П.Г. Позднякова. – М.: Связь, 1978. – С. 3.
2. Гиндин, П.Д. Математическая модель термораскалывания хрупких анизотропных материалов / П.Д. Гиндин // Поверхность. – 2010. – № 1. – С. 14–18.

3.Справочник по электротехническим материалам / под ред. Ю.В. Корицкого и др. – Л.: Энергоатомиздат, 1988. – Т. 3. – С. 581–583.

# Содержание

## Секция 1 «Оптика кристаллов»

(нелинейная оптика, оптическая гиротропия)

<b>Астахов П.В., Алешкевич Н.А., Свиридова В.В.</b> Особенности поглощения электромагнитных волн тонкопленочными покрытиями .....	9
<b>Belyi V.N., Kazak N.S., Ryzhevich A.A., Petrova E.V., Khilo N.A.</b> Propagation and nonlinear transformation of vortex quasinondiffractive light beams in crystals .....	13
<b>Гиргель С.С.</b> Бесселевы световые поля в одноосных кристаллах ..	17
<b>Константинова А.Ф., Евдищенко Е.А., Набатов Б.В., Головина Т.Г.</b> Развитие исследований оптической активности кристаллов в институте кристаллографии РАН .....	22
<b>Семченко И.В., Асадчий В.С.</b> Моделирование электромагнитных свойств двухвитковой спирали с оптимальными параметрами в режиме излучения циркулярно поляризованной волны ...	23
<b>Семченко И.В., Хахомов С.А., Самофалов А.Л.</b> Исследование сильных киральных свойств искусственных анизотропных структур в свч диапазоне .....	27
<b>Семченко И.В., Хахомов С.А., Фаняев И.А.</b> Моделирование электромагнитных свойств одновитковой спирали с оптимальными параметрами, обеспечивающими излучение циркулярно поляризованной волны .....	31
<b>Филиппов В.В.</b> Температурно-независимые направления кристалла $\text{KGd}(\text{WO}_4)_2$ .....	35
<b>Фомичева Л.А., Дунина Е.Б., Корниенко А.А.</b> Методика определения параметров пространственного распределения электронной плотности для иона $\text{U}^{4+}$ в $\text{Cs}_2\text{ZrBr}_6$ и $\text{Cs}_2\text{UBr}_6$ по оптическим спектрам .....	41
<b>Шаповалов П.С.</b> Системы уравнений Ермакова в нелинейных взаимодействиях Гауссовых световых пучков .....	45
<b>Шолох В.Ф., Желонкина Т.П., Сазонов Д.М.</b> Эффект Фарадея в движущейся среде .....	48

**Секция 2 «Акустика кристаллов»**  
(упругие волны, фотоакустика, акустооптика)

<b>Велещук В.П., Власенко А.И., Гнатюк В.А., Даулетмуратов Б.К., Ляшенко О.В., Левицкий С.Н.</b> Порог плавления CdTe при импульсном лазерном облучении, определенный по акустическому отклику .....	52
<b>Кулак Г.В., Анисимова А.Е.</b> Дифракция света на ультразвуке, распространяющемся вдоль Кристаллографической оси третьего порядка гиротропного кубического кристалла .....	56
<b>Кулак Г.В., Матвеева А.Г., Гуделев В.Г.</b> Брэгговская дифракция света на акусто-фоторефрактивных голографических решетках .....	60
<b>Ляшенко О.В., Власенко А.И., Киселюк М.П., Велещук В.П., Онанко А.П.</b> Акустико-эмиссионные исследования надежности светодиодов .....	64
<b>Mityurich G.S., Serdyukov A.N.</b> Thermo-optical generation of the sound by quasi-nondiffraction beams in magnetic and natural gyrotropic media with internal stresses .....	69
<b>Хило П.А.</b> Преобразование поляризации бесселевых световых пучков при квазиколлинеарной акустооптической дифракции в анизотропных кристаллах .....	80

**Секция 3 «Теория фундаментальных взаимодействий»**  
(электрослабые свойства микрочастиц, электродинамические и адронные процессы взаимодействия, гравитация)

<b>Андреев Василий, Андреев Виктор, Панков А.А.</b> Эффекты $Z'$ - бозона на коллайдере $sl\bar{c}$ с поперечно поляризованными пучками .....	85
<b>Андреев В.В., Сейтлиев А.М.</b> Квазистатические поляризуемости спинорной частицы в КЭД .....	89
<b>Бабич К.С., Андреев В.В.</b> Задачи на связанные состояния с линейным потенциалом в импульсном пространстве .....	94
<b>Вакулина Е.В., Дерюжкова О.М., Максименко Н.В.</b> Поляризуемость пиона в кварково-полево-петлевом подходе в петлевом приближении .....	98
<b>Гайдукевич Д.В., Стражев В.И.</b> О физической интерпретации безмассовых пределов уравнения Дирака-Кэлера .....	103
<b>Гайдукевич Д.В.</b> Внутренние симметрии и законы сохранения	



в теории поля Кальба-Рамонда .....	105
<b>Горбацевич А.К., Тарасенко А.Н.</b> Движение и излучение компактных астрофизических объектов в окрестности сверхмассивной чёрной дыры .....	108
<b>Гулов А.В., Панков А.А., Скалзуб В.В., Цитринов А.В.</b> Идентификация новых нейтральных калибровочных бозонов на большом адронном коллайдере .....	112
<b>Дей Е.А.</b> Двухчастичные связанные состояния в формализме уравнения Солпитера .....	117
<b>Длугунович В.А., Курочкин Ю.А., Холенков А.В.</b> Вектор-параметр Ф.И. Федорова для системы поляризаторов .....	121
<b>Желонкина Т.П., Лукашевич С.А., Шолох В.Ф.</b> Инвариантность и законы сохранения .....	127
<b>Зыкунов В.А.</b> Мёллеровское рассеяние от энергий LLab до ILC ..	129
..	
<b>Капшай В.Н., Гришечкин Ю.А., Данильченко М.С.</b> Численное решение релятивистских интегральных уравнений теории поля для связанных состояний .....	134
<b>Капшай В.Н., Шиляева К.П.</b> Вычисление комплексных резонансных быстрот для модельных аналитических потенциалов ...	138
<b>Кисель В.В., Крылов Г.Г., Овсюк Е.М., Амирфахриан М., Редьков В.М.</b> Волновые функции частицы с поляризуемостью в кулоновском поле .....	143
<b>Куиш А.Л.</b> Связь теорий в области сильного взаимодействия в аспекте принципа соответствия .....	147
<b>Левчук М.И., Львов А.И.</b> Правило сумм Балдина для протона ...	152
...	
<b>Максименко Н.В., Кучин С.М.</b> Спектр масс кваркониев .....	156
<b>Овсюк Е.М., Токаревская Н.Г.</b> Заряженная скалярная частица с поляризуемостью в магнитном поле .....	161
<b>Рябушко А.П., Жур Т.А., Боярина И.П.</b> Влияние светового давления звезды на траекторию тела в специальной теории относительности .....	164
<b>Рябушко А.П., Жур Т.А., Неманова И.Т.</b> Законы сохранения и орбиты тел в солнечной системе при учете гравитационного поля реликтовой материи .....	169
<b>Сергеенко М.Н.</b> Комплексные траектории редже в потенциальном подходе КХД .....	174
<b>Соловцова О.П., Хандрамай В.Л.</b> КХД анализ правила сумм Бьеркена с учётом вклада $O(\alpha_s^4)$ .....	178

<b>Соловцова О.П., Черниченко Ю.Д.</b> Релятивистское обобщение кулоновского ресуммирующего фактора .....	183
<b>Степаненко Ю.Ю., Подольский С.В., Курилин А.С., Максименко Н.В., Андреев В.В., Бабич К.С.</b> Некоторые особенности методики повторного анализа данных эксперимента E391 ...	190
<b>Тюменков Г.Ю., Дей Е.А.</b> Численное и графическое исследование характеристик распадов псевдоскалярных мезонов .....	194
<b>Шалыт-Марголин А.Э.</b> Гравитация в ультрафиолетовом и инфракрасном пределах, изменяющаяся энтропия и энергия голографического экрана .....	198

#### **Секция 4 «Новые материалы и технологии»**

(физика лазеров и лазерные технологии,  
ионно-лучевые и плазменные технологии,  
формирование структуры и свойства покрытий)

<b>Бурбело Р.М., Исаев Н.В., Кузьмич А.Г.</b> Особенности фототермоакустического преобразования в неоднородных полупроводниковых структурах: импульсный режим облучения .....	203
<b>Гайшун В.Е., Косенок Я.А., Тюленкова О.И., Туров В.В.</b> Реологические свойства водных дисперсных систем на основе абразивного наноразмерного порошка диоксида кремния марки ОХ-50 .....	207
<b>Горбачев Д.Л., Рогачев А.В., Ярмоленко М.А., Рогачев А.А.</b> Способы управления молекулярной структурой полимерных покрытий, сформированных из активной газовой фазы .....	210
<b>Даулетмуратов Б.К.</b> Механизм распространения и глубина образования ударной волной в CdTe при лазерном импульсном облучении .....	219
<b>Коваленко Д.Л., Гайшун В.Е., Алешкевич Н.А., Васильевич В.В.</b> Использование диэлектрических золь-гель пленок для формирования КНИ-структур .....	223
<b>Мышковец В.Н., Максименко А.В., Баевич Г.А., Грищенко В.В.</b> Оборудование и технологии для импульсной лазерной сварки металлов и сплавов .....	227
<b>Пилипцов Д.Г., Рогачев А.В., Федосенко Н.Н., Руденков А.С., Чжоу Бин</b> Влияние природы металла на фазовые состояния легированных углеродных покрытий .....	233

<b>Пинчук В.Г., Короткевич С.В., Бобович С.О.</b> Формирование металлорганических поверхностных слоёв при фрикционном нагружении металлов .....	236
<b>Семченко А.В., Сидский В.В., Гайшун В.Е., Сорока С.А., Сидерко А.А., Судник Л.В., Чеченкова Я.В.</b> Синтез золь-гель методом SBT-покрытий .....	240
<b>Сидский В.В., Семченко А.В., Гайшун В.Е., Судник Л.В., Ярец И.В.</b> Структурные свойства золь-гель плёнок состава $Fe_xCo_yO_z: SiO_2$ .....	243
<b>Тихова Е.Л., Кондратенко В.И.</b> Особенности фотометрического контроля .....	247
<b>Хмыль А.А., Федосенко Н.Н., Шолох В.Г., Купо А.Н.</b> Лазерное электрохимическое осаждение серебра на медные подложки .....	251
..	
<b>Шалупаев С.В., Никитюк Ю.В., Серeda А.А., Свиридова В.В.</b> Двухлучевой лазерный метод формирования скругленных кромок в стеклоизделиях .....	255
<b>Шершнев Е.Б., Никитюк Ю.В., Шолох В.Ф., Соколов С.И.</b> Лазерное управляемое термораскалывание кристаллического кварца .....	261

## **Научное издание**

**Гомельский научный семинар по теоретической физике,  
посвященный 100-летию со дня рождения Ф. И. Федорова**

**(Гомель, 20–22 июня 2011 года)**

## **Материалы**

Подписано в печать 02.09.2011. Формат 60x84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 15,8.  
Уч.-изд. л. 17,3. Тираж 100 экз. Заказ № 428

Издатель и полиграфическое исполнение :  
учреждение образования  
«Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины».  
ЛИ № 02330/0549481 от 14.05.2009.

Ул. Советская, 104, 246019, Гомель

